

Die mathematische Theorie ballistischer Kurven

Eugen Willerding



www.eugen-willering.de
©2019 Eugen Willering
Cover: Reentry von Apollo 8, NASA

Die mathematische Theorie ballistischer Kurven

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Grundgleichungen	11
3	Die Wurfparabel	16
3.1	Einfluss der Erdrotation	22
4	Die klassische Ballistik	26
4.1	Integration der Grundgleichungen	26
4.2	Reihenlösungen nach Euler	37
4.3	Reihenentwicklung nach Tempelhof	40
4.4	Reihenlösungen nach der Zeit	43
4.5	Alternative Approximation	46
4.6	Numerische Integration	55
4.7	Historische Zahlenbeispiele	58
4.8	Funktional-Approximationen	68
4.8.1	Die Gerade als erste Näherung	68
4.8.2	Die Parabel als erste Näherung	73
4.9	Asymptotische Zeitreihen	83
4.10	Der senkrechte Schuss	89
4.11	Senkrechter Schuss in große Höhen	96
4.12	Der freie Fall aus großer Höhe	97
4.13	Über die Flugbahn von Golfbällen	103
5	Hypersonische Ballistik	111
5.1	Die erweiterten Grundgleichungen	111
5.2	Das Allen - Eggers Modell	113
5.3	Ballistischer Wiedereintritt (Skip Reentry)	122
5.4	Satellitenbahnen mit Luftreibung (Aerobraking)	129
5.5	Theorie der Kármán-Linie	139

6	Raketenballistik	145
6.1	Aufstiegsbahn einer Rakete	147
6.2	Die vertikale Aufstiegsbahn	164
6.3	Die Keplerbahn	167
6.4	Die optimale Flugbahn	173
7	Schlussbemerkungen	179
	Anhang	181
A.1	Die Lambertsche W - Funktion	181
A.2	Der Satz von Cranz	184
A.3	Das ballistische Integral	186
A.4	Optimierung von Stufenraketen	188
	Literaturverzeichnis	198

1 Einleitung

Das Werfen von Speeren und Pfeilen als technische Jagd-Kunst hat die Menschheit schon seit Jahrtausenden beschäftigt und fasziniert. Aus rein empirischer Erfahrung hat man es hier sicherlich zu hoher Fertigkeit gebracht. Das heute benutzte Wort *Ballistik* kommt aus dem Griechischen, von *ballein* – Werfen. Die Entwicklung der Ballistik als Wissenschaft wurde in Westeuropa erst zu Beginn des sechzehnten Jahrhunderts stärker vorangetrieben. Hauptmotivation war natürlich die Frage, wie man Kanonenkugeln möglichst genau ins Ziel bringt und von welchen Faktoren dies abhängt. Und hier war zunächst die genaue Gestalt der Flugbahn von Interesse. Die besten Gelehrten und Mathematiker ihrer Zeit waren mit dem Problem *dieser ballistischen Kurve* beschäftigt: TARTAGLIA, G. GALILEI, I. NEWTON, J. BERNOULLI, F. BACON, L. EULER, J.L. LAMBERT, L. LEGENDRE, S.D. POISSON, und F. SIACCI, um nur Einige zu nennen. Doch was ist von ihren analytischen Ergebnissen heute noch bekannt, wo moderne Hochfrequenz - Radaranlagen jede Flugbahn genaustens vermessen können, aber das Schulwissen gerade noch die Wurfparabel begreift?

Obwohl schon um 1300 die ersten Feuerwaffen in Europa auftauchten, wusste man noch um 1500 nicht sicher, dass die Form der Flugbahn einer Kanonenkugel wirklich eine *kontinuierliche Kurve* ist. Nach den Lehren des ARISTOTELES sollte die Kanonenkugel mehr oder weniger in einer geraden Linie in die Luft steigen, dann plötzlich stoppen und in senkrechtem Fall zum Erdboden zurückfallen (*Impetustheorie*). Dann aber schrieb im Jahre 1537 der italienische Mathematiker TARTAGLIA¹ ein Buch über Artilleristik (*Nova Scientia*), indem er darauf hinwies, daß die Geschosshahn eine kontinuierliche Kurve sei, eine zur damaligen Zeit noch gewagte Behauptung. In einem zweiten Buch (*Quesiti et Inventioni diverse*) aus

¹Nicola Tartaglia (1499-1557), eigentlich Nicolo Fontana, italienischer Mathematiker, Physiker und Topograph. Tartaglia heißt der Stotterer, weil er 1512 von einem Schwert im Gesicht verletzt wurde. Ihm gelang zum erstenmal die Lösung einer speziellen kubischen Gleichung.

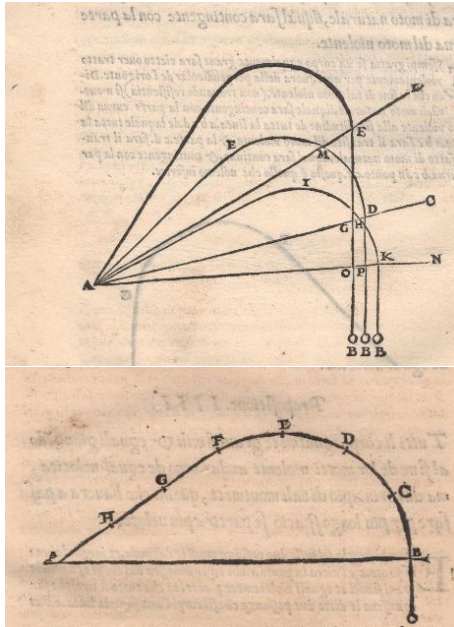


Fig. 1.1: Ballistische Kurven aus dem Buche „Nova Scientia“ des italienischen Mathematikers Nicolo Tartaglia aus dem Jahre 1537. Deutlich ist hier noch der Einfluss der „Impetustheorie“ zu sehen. Diese mathematisch-philosophische Vorstellung geht auf den Scholastiker Albert von Rickmersdorf (1316 - 1390) zurück und hat wohl noch älteren Ursprung.

dem Jahre 1546 erläuterte er diese Frage noch eingehender. Als Berater für militärische Fragen der Stadt Verona wurde er gefragt, **unter welchem Winkel eine Geschossbahn maximale Reichweite erzielt.** Durch experimentelle Tests im ebenen Gelände stellte er dann fest, daß dieser Winkel nahe **45 Grad** ist. Für die damaligen Geschwindigkeiten war das ein realistisches Resultat.

Der Erste, der die Flugbahn als eine parabelförmige Kurve ansah, war GALILEO GALILEI. Er argumentiert in seinem Werk *Der Dialog über die zwei Weltsysteme* von 1632, dass im Vakuum die Flugbahn eine Parabel sein müsse. Im Jahre 1644 veröffentlichte EVANGELISTA TORRICELLI

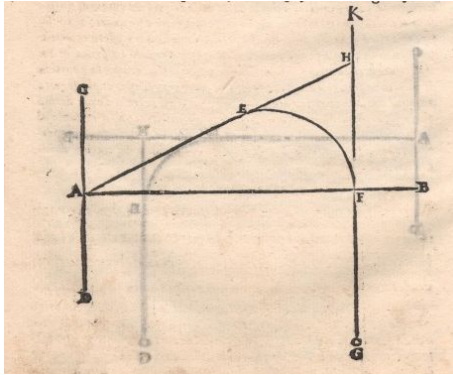
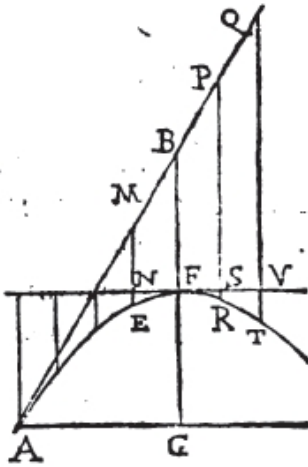


Fig. 1.2: In dem Buch „Nova Scientia“ des italienischen Mathematikers NICOLO TARTAGLIA aus dem Jahre 1537 erscheint die ballistische Kurve schon als kontinuierliche Kurve: Zunächst als eine Gerade, dann geht sie allmählich in einem Bogen in eine senkrechte Gerade (**senkrechte Asymptote**) zum Boden über. 1687 nahm I. NEWTON an, daß dies sehr gut einer Hyperbel entspricht.

(1608-1647) in seinem Hauptwerk *Opera Geometrica* ([55])² den Teil *De motu gravium ...* Hier verallgemeinert er die von GALILEI formulierte horizontale Theorie der Wurfparabel auf beliebige Abwurfwinkel und gibt eine Tabelle für die Wurfweiten an. Seine Theorie ergab für diesen Winkel exakt 45 Grad, in glücklicher Übereinstimmung mit den Messungen von TARTAGLIA aus dem Jahre 1537.

Im Jahre 1740 wurden in England von BENJAMIN ROBINS (1707-1751) mit dem ballistischen Pendel Messungen von Geschossgeschwindigkeiten gemacht. Die Ergebnisse lagen bei 400 m/s - 600 m/s, ein für damalige Zeit unglaublich hoher Wert. Die Ergebnisse erschienen in seinem Werk *New Principles of Gunnery* (1742), für welches er 1746 die Copley Medaille erhielt, die höchste Auszeichnung der Royal Society. Das Werk erlangte im 18. Jahrhundert große Bedeutung und wurde in verschiedene Sprachen übersetzt und erweitert (L. EULER, 1745). So schrieb für die französische Ausgabe der Ökonom und Politiker A. R. J. TURGOT (1727-1781) an LOUIS XVI: (Zitat durch Clifford Truesdell, *An Idiot's Fugitive Essays*

²Berühmt ist dieses Werk von Torricelli auch durch die Betrachtung eines unendlich langen Rotationskörpers (Trompete von Torricelli), welcher zwar ein endliches Volumen - Maß, aber ein unendliches Oberflächen - Maß hat.



Tabula continens Amplitudines Semiperabolarum ab eodem impetu fallarum. Supplicat maxima amplitudine partium 10000. Sunt autem numeri Tabulae finis rectilinearum elevationis daptorum.

GRAD. Elevat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Elevat.	GRAD. Elevat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Elevat.
0	0000	90	23	7193	67
1	349	89	24	7431	66
2	698	88	25	7660	65
3	1045	87	26	7880	64
4	1392	86	27	8090	63
5	1736	85	28	8290	62
6	2079	84	29	8480	61
7	2419	83	30	8660	60
8	2756	82	31	8829	59
9	3090	81	32	8988	58
10	3410	80	33	9135	57
11	3746	79	34	9272	56
12	4067	78	35	9397	55
13	4384	77	36	9511	54
14	4695	76	37	9613	53
15	5000	75	38	9703	52
16	5299	74	39	9781	51
17	5592	73	40	9848	50
18	5870	72	41	9903	49
19	6157	71	42	9945	48
20	6428	70	43	9976	47
21	6691	69	44	9994	46
22	6947	68	45	10000	45

Fig. 1.3: Die Erklärung der Wurfparabel nach EVANGELISTAE TORRICELLI 1644. In der mittleren Spalte der Tabelle sind die Wurfweiten in der Form $10000 \sin(2\Theta)$ eingetragen, wobei Θ den Elevationswinkel des Kanonenrohres bezeichnet. Die Wurfweite ist invariant gegenüber der Transformation $\Theta \rightarrow 90^\circ - \Theta$.

on Science (1984), p. 337)

The famous Leonhard Euler, one of the greatest mathematicians of Europe, has written two works which could be very useful to the schools of the Navy and the Artillery. One is a Treatise on the Construction and Manoeuver of Vessels; the other is a commentary on the principles of artillery of Robins . . . I propose that your Majesty order these to be printed.

Denn L. EULER hatte das Buch von ROBINS mit erheblichen mathematischen Ergänzungen (*Lehrsätze der Artillerie 1745*) ins Deutsche übersetzt und so seinen Wert erheblich gesteigert. 1766 veröffentlichte dann J.H. LAMBERT eine eigene theoretische Untersuchung und konstruierte eine sogenannte „**echelle ballistique**“. J. LAMBERT zeigte 1766, dass man bei der Auswertung mit dem ballistischen Pendel nicht mit elastischen Stößen, sondern eher mit inelastischen Stößen zu tun hat. Noch un-

glaublicher war dann die Messung der Geschossabbremung durch den Luftwiderstand. Nun erkannte man die Bedeutung des Luftwiderstandes bei hohen Geschwindigkeiten.

I. NEWTON hatte schon 1687 gezeigt, daß die Bremskräfte mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ansteigen müssten. Doch eine genauere Lösung gab er nicht an. Die erste allgemeine analytische Lösung des ballistischen Problems wurde durch J. BERNOULLI im Mai - Heft der *Acta Eruditorum Lipsiae* Seite 246 des Jahres 1719 gegeben. Die Motivation zu dieser Untersuchung entstand offenbar durch eine „Provokation“ des schottischen Mathematikers und Astronomen J. KEILL, der es BERNOULLI sehr Übel nahm, dass ein Mathematiker minderen Ranges (Bernoulli) einem Mathematiker höchsten Ranges (Newton) einen kleinen Fehler in der ersten Ausgabe seiner *Principia* bei der geometrischen Konstruktion einer ballistischen Flugbahn nachgewiesen hat. J. BERNOULLI nahm für die Bremsbeschleunigung des Luftwiderstandes ein Gesetz der Form v^n an und erhielt für die ballistische Kurve bei beliebigem n die parametrische Darstellung in horizontaler x - Richtung und in vertikaler y - Richtung

$$x = a \int \frac{dp}{\mathbf{Z}(p)^{2/n}}, \quad y = a \int \frac{p dp}{\mathbf{Z}(p)^{2/n}}, \quad (1.1)$$

mit

$$\mathbf{Z}(p) = b \int (1 + p^2)^{(n-1)/2} dp. \quad (1.2)$$

Das Problem kann also auf eine einzige *Quadratur (Integral)* zurückgeführt werden, was dann aber G.F. TEMPELHOF 1781 zu der Bemerkung veranlasste, dass diese Lösung *sich nicht ohne die Bedingung der „concessis quadraturis“ berechnen ließ*. Schließlich lösten J. BERNOULLI 1719 und L. EULER 1743 das ballistische Problem mit Hilfe der Differentialrechnung für ein erweitertes quadratisches Widerstandsgesetz. Einen gewissen Schlusspunkt setzte dann der schon oben erwähnte Generalleutnant G. F. TEMPELHOF mit seinem Werk *Le Bombadier Prussien* von 1781, welches von FRIEDRICH DEM GROSSEN sofort unter militärische Geheimsache gestellt wurde. Die Gründe sind nicht ganz klar, zumal in diesem Buch komplizierte längliche Reihenentwicklungen zur Darstellung der ballistischen Kurve benutzt werden, deren praktische Verwendbarkeit höchst zweifelhaft war und wohl auch nie numerisch ausgewertet wurden – ganz im Gegensatz zu denen von J.H. LAMBERT. Klassische Lehrbücher zur Ballistik schrieben schließlich I. DIDION 1848 in Frankreich und



Fig. 1.4: Die Zarenkanone (Mörser) von 1586, wie sie heute am Kreml in Moskau zu sehen ist. Die Kugeln wurden später (1834) zur Dekoration gegossen. Kaliber 890mm. Quelle: Wikipedia Commons)

F. SIACCI 1888 in Italien und C. CRANZ von 1896 an in Deutschland ([13])³. Ab 1942 wurde in den USA der *Rockefeller Differential Analyser*, der letzte am **MIT** von dem amerikanischen Erfinder VANNEVAR BUSH entwickelte rein mechanische Walzen - Analog - Rechner, dazu benutzt, die nichtlinearen Differentialgleichungen der Ballistik für unterschiedliche Spezialfälle wie *Bombenabwurf* und *Flugabwehr* zu lösen.

Wie man lesen kann, hat das ballistische Problem weitgehende Anwendungen in der Geschichte erfahren: Seien es die Bahnen von Kanonenkugeln, von Tennisbällen, von Golfbällen, von Fußballen (mit dem *Magnuseffekt* bei rotierenden Bällen), von Raumfahrzeugen oder von auf die Erde stürzenden Meteoriten – überall spielt das ballistische Problem in unterschiedlichen Ausprägungen eine Rolle.

³CARL JULIUS CRANZ (1858 - 1945). Wuchs in einer Pfarrersfamilie auf. Privatdozent für Mathematik und Mechanik an der TH Stuttgart (1884-1903), Professor an der Militärtechnische Akademie (1903-1920) in Berlin, Professor für technische Physik an der TH Berlin (1929-1935) sowie Wissenschaftlicher Berater der chinesischen Regierung in Nanking (1935-1937)

Ein besonderes isoliertes Problem stellten zu Beginn des 19. Jahrhunderts Experimente mit fallenden Kugeln in hohen Türmen oder tiefen Bergwerksschächten dar, die aufgrund der Erdrotation eine sehr kleine „Ostablenkung“ erfuhren. Da diese „Ostablenkung“ ein direkter mechanischer Beweis der Erdrotation darstellte (das Foucaultpendel kam ja erst später), hat man damals viel Mühe auf die genaue Berücksichtigung des Luftwiderstandes auf diese fallenden Kugeln verwandt. Hier sind insbesondere die Untersuchungen von J.F. BENZENBERG, P.S. LAPLACE sowie von C.F. GAUSS um 1802 zu nennen.

2 Grundgleichungen

Im 17. Jahrhundert konnte man mit der neuen Differentialrechnung vier große *Kurvenprobleme* angehen und lösen:

- Bahnkurve der Planeten um die Sonne (Kegelschnitte)
- Die Kettenlinie (Form eines hängenden Seiles)
- Das Brachystochrone Problem (minimale Rollkurven)
- Die Bahnkurve einer Kanonenkugel (Wurfparabel nach Torricelli - Galilei oder Hyperbel nach Newton)

Von all diesen Kurvenproblemen ist das ballistische Problem (Wurfbe-
wegung mit Luftwiderstand) das Schwierigste. Selbst I. NEWTON hatte
mit diesem Problem seine Schwierigkeiten, denn seine geometrische Kon-
struktion der ballistischen Kurve als Hyperbel in der ersten Auflage
der Principia war nur eine Approximation, keine exakte Lösung einer
Differentialgleichung. Im Laufe des 18. Jahrhunderts konnten für das
quadratische Luftwiderstandsgesetz allerdings Reihenentwicklungen oder
genäherte analytische Lösungen gefunden werden.

Im Folgenden soll das klassische Problem der äußeren Ballistik mit
besonderer Berücksichtigung des 18. Jahrhunderts diskutiert werden. Als
Anregung diene hier auch ein Kapitel aus dem Lehrbuch zur Geschichte
der mechanischen Prinzipien von I. Szabo ([49]).

Ist der Luftwiderstand eine quadratische Funktion der Geschwindig-
keit $v = |\mathbf{v}|$, so lauten die allgemeinen Bewegungsgleichungen für eine
rotierende Kanonenkugel im Erdschwerefeld bei völliger *Windstille*

$$\dot{\mathbf{v}} = -k v \mathbf{v} + \epsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \mathbf{g} \quad (2.1)$$

Hier bedeutet k den ballistischen Koeffizienten von der Dimension einer
inversen Länge und das vektorielle Kreuzprodukt $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ die Beschleu-
nigung durch den sogenannten *Magnuseffekt* ([31], [38]). Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$

liegt parallel zur Rotationsachse der Kanonenkugel und sein Betrag entspricht der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel. Der Vektor $\mathbf{g} = \{0, 0, g\}$ beschreibt die zum Boden gerichtete Erdbeschleunigung. ϵ ist eine dimensionslose Konstante, die in der Größenordnung

$$\epsilon \sim \frac{\rho_{Luft}}{\rho_{Kugel}} \quad (2.2)$$

liegt. Kompliziertere Situationen entstehen bei schneller Rotation, wenn das Geschoss nicht mehr eine Kugel, sondern längliche Gestalt hat (Kreisel­dynamik)¹. Die Querschleunigung, beschrieben in der obigen Bewegungsgleichung durch den Term $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, war die Hauptursache für die mysteriösen Seitenabweichungen oder Weitenvariationen bei ballistischen Kurven, die man sich im 18. Jahrhundert noch nicht richtig erklären konnte. Die richtige Vermutung aus zahllosen Experimenten hatte schon der englische Militäringenieur B. ROBINS (1702 - 1751) , der auch schon vorschlug, dass Kanonen *gezogene Rohre* haben sollten ([39]).

Die Preußische Akademie der Wissenschaften hatte noch im November 1793 ein Preisausschreiben zu diesem Thema vorgeschlagen. Darin hieß es: ([40])

Da die Erfahrung lehrt, dass die in einem widerstehenden Mittel geworfenen Körper, Bomben, zum Beispiel, sich meistens mehr oder weniger von der lochtrechten Ebene entfernen, in welche sie geworfen werden; so verlangt die Königliche Akademie zu wissen: I) Wie und aus welchen Ursachen diese Abweichung statt findet? II) Wie ihre Quantität in jedem einzelnen Falle, mittels der anfänglichen Geschwindigkeit, des Elevationswinkels, der Gestalt des Körpers u.s.w. bestimmt werden kann.

Den Preis erhielt damals der Artillerieleutnant J.P. VON ROHDE (1759-1834), der aber irrtümlich die Abweichungen anstatt der Eigenrotation der geworfenen Körper den Windkräften und besonders den Zündern zuschrieb. Als Rechtfertigung für die Vergabe des Preises an J.P. VON ROHDE gab die Akademie erklärend an:

¹Noch komplizierter ist die gekoppelte Bahn - Kreisel­dynamik des von den Menschen seit über 20000 Jahre benutzten Bumerangs

Die Akademie erkennt, dass die Aufgabe, welche zur gegenwärtigen (unter dem 12. Februar 1794 eingekommenen) Abhandlung Anlass gegeben hat, sehr schwer aufzulösen ist;. Auch sind die aufgeworfenen Fragen bey weitem noch nicht völlig beantwortet. Die Erfahrung lehret, dass bei Kugeln ohne Zünder ebenfalls eine beträchtliche Abweichung stattfindet. Indessen konnte die Akademie nicht unterlassen diese Schrift zu krönen, aus welcher viel Scharfsinn und tiefe Einsichten in die höhere Mathematik hervorleuchten, und durch welche die Bahn zu ferneren Untersuchungen auf eine glückliche Art eröffnet worden.

Eine zufriedenstellende physikalische Erklärung für diese Abweichung ballistischer Bahnen konnte erst 1852 der Physiker H.G. MAGNUS (1802-1870) geben. Aber auch die rein mathematische Beschreibung ist nicht einfach und bedarf - wie oben zu sehen - der Vektoralgebra. Wir definieren den dreidimensionalen Tangentenvektor \mathbf{e} der Bahn und dessen zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{e}}$ gemäß

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{e} + v \dot{\mathbf{e}}. \quad (2.3)$$

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$\dot{v} \mathbf{e} + v \dot{\mathbf{e}} = -k v^2 \mathbf{e} + \epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} \quad (2.4)$$

Skalare Multiplikation mit \mathbf{e} führt für \dot{v} zu der Gleichung

$$\dot{v} = -k v^2 + \mathbf{e} \circ \mathbf{g}. \quad (2.5)$$

Setzt man dies wieder in die obige Gleichung ein, so folgt die Relation

$$v \dot{\mathbf{e}} = +\epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} - \mathbf{e} (\mathbf{e} \circ \mathbf{g}). \quad (2.6)$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{e}}$ steht senkrecht auf dem Tangentenvektor \mathbf{e} und es gilt $\mathbf{e} \circ \dot{\mathbf{e}} = 0$. Anstatt nach der Zeit differenzieren wir nun nach der Bogenlänge s . Wegen $ds = v dt$ gilt so auch

$$v^2 \frac{d\mathbf{e}}{ds} = +\epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} - \mathbf{e} (\mathbf{e} \circ \mathbf{g}). \quad (2.7)$$

Diese Gleichung definiert die Krümmung $K = 1/r$ der ballistischen Kurve. Multiplizieren wir (2.6) noch skalar mit $\mathbf{g} \times \mathbf{e}$, so gilt für das Spatprodukt

$$\boxed{[\mathbf{g} \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}] = \epsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \circ (\mathbf{g} \times \mathbf{e}) .} \quad (2.8)$$

Ohne Eigenrotation bewegt sich die Kugel immer entlang der *lotrechten Ebene*, die durch die Vektoren \mathbf{e} und \mathbf{g} aufgespannt werden. Mit Rotation gilt dies aber nicht mehr, wie die obige Vektorgleichung zeigt. Abweichungen von der Flugbahn können je nach Rotationssinn sowohl nach Rechts wie nach Links geschehen. Es können aber auch künstlich „Auftriebe“ oder „Abtriebe“ ohne seitliche Abweichungen entstehen. Abhilfe kann nur dadurch erreicht werden, dass der Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ der Kanonenkugel möglichst exakt parallel zum Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ausgerichtet wird. Genau dies wurde ab der Mitte des 19ten Jahrhunderts durch *gezogene Rohre mit Führungsrillen* erreicht.

Der „Magnuseffekt“ spielt heutzutage bei sehr unterschiedlichen Sportarten eine wichtige Rolle: Fußball (**Bananenflanke, Flatterball**), Tennis - Tischtennis (**Topspin, Slice**), und Cricket (**spin bowling**). Golfbälle besitzen sogenannte **dimples**, kleine kreisförmige Dellen an der Balloberfläche, welche die Wirksamkeit des „Magnuseffektes“ noch erhöhen. Um den Rückstoß bei einem Geschütz zu vermindern und damit die Genauigkeit zu erhöhen, wurden zudem im 20. Jahrhundert sogenannte *Mündungsbremsen* („*muzzle brakes*“) an das Rohrende montiert. Ausführlich werden solche verwickelten Fragen in dem modernen Standardwerk von R.L. MCCOY über äußere Ballistik behandelt ([30]).

Wir beschränken uns zunächst auf Flugbahnen von *nicht - rotierenden Körpern*, bei denen das Spatprodukt $[\mathbf{g} \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}]$ immer Null ist. Sonderfälle wie die Flugbahn eines rotierenden Fußballes oder eines schnell rotierenden Golfballes werden gesondert behandelt. Die x - Achse unseres lokalen Koordinatensystems zeigt immer in horizontale, die y - Achse immer in vertikale Richtung. Dann gelten bei *Windstille* und quadratischem Widerstandsgesetz die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (a - k v^2) \frac{\dot{x}}{v} \\ \ddot{y} &= (a - k v^2) \frac{\dot{y}}{v} - g \end{aligned} \quad (2.9)$$

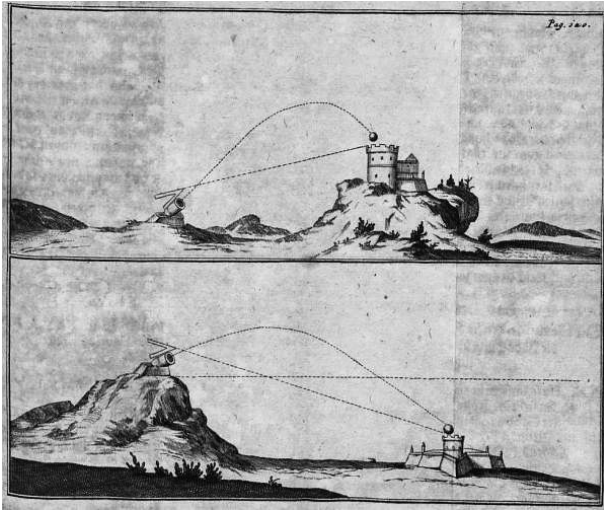


Fig. 2.1: Der Ingenieur und Architekt NICOLAS FRANCOIS BLONDEL (1618 - 1686) schrieb das erste ausführliche Werk über „die Kunst, Bomben zu werfen“. Er benutzte schon die parabolische Kurventheorie nach Galilei und Torricelli, um die ballistische Kurve zu beschreiben. Für die damaligen Geschwindigkeiten eine gute Näherung.

wobei k der ballistische Koeffizient (inverse Länge) und g die Fallbeschleunigung bezeichnet². Die Größe a beschreibt eine Eigenbeschleunigung in Richtung der momentanen Bahntangente. Wir sehen hier schon den fließenden Übergang von klassischer Ballistik zu Raketenballistik, *zumal in umgekehrter Zeitrichtung betrachtet eine bremsende Bewegung wie eine beschleunigte Bewegung erscheint und auch so beschrieben werden kann.*

²Kühen und Furtwängler haben in Potsdam 1906 für die Schwerebeschleunigung g den Normwert $g \sim 9.81274m/s^2$ bestimmt. Dieser Wert für Potsdam galt bis 1971 als internationale Standard-Eichung

3 Die Wurfparabel

Bevor wir die Wirkung einer bremsenden Kraft auf die Flugbahn genauer untersuchen, wollen wir den einfachsten Fall zuerst behandeln. Ohne Luftwiderstand gelten die sehr einfachen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g. \quad (3.1)$$

Als Lösungen erhält man die schon von GALILEI und TORICELLI diskutierte Wurfparabel. Man bekommt für die Bahnkurve als Funktion der Zeit t die Gleichungen

$$\begin{aligned} x[t] &= v_0 \cos[\Theta] t, \\ y[t] &= v_0 \sin[\Theta] t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

und für die Gestalt der Bahn die Parabel

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos[\Theta]^2}.$$

Dabei ist Θ der Elevationswinkel, v_0 die Abschussgeschwindigkeit und t die verflossene Zeit. Die Wurfweite W ergibt sich bei ebener Bodenfläche zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin[2\Theta]. \quad (3.3)$$

Hieraus folgt sofort die maximale Schussweite bei einem Elevationswinkel von $\Theta = 45^\circ$. Die maximale Steighöhe H ergibt sich zu

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin[\Theta]^2 \quad (3.4)$$

und die Flugzeit T zu

$$T = \frac{2 v_0}{g} \sin[\Theta] \quad (3.5)$$

Aus den beiden letzteren Formeln folgt die für alle Wurfparabeln gültige Beziehung

$$H = \frac{1}{8} g T^2. \quad (3.6)$$

Diese Relation gehört zu den bemerkenswertesten Formeln der Ballistik, weil sie auch *mit Luftwiderstand* noch eine sehr gute Näherung darstellt. Selbst in der Raketenballistik spielt sie eine gewisse Rolle, wie wir später noch sehen werden.

Aus der obigen parabolischen Theorie kann man zudem noch die Beziehung

$$\frac{1}{2} g T^2 = W \tan[\Theta] \quad (3.7)$$

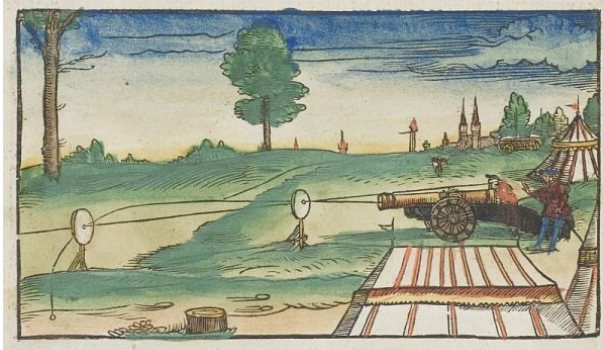
ableiten, welche im 18. Jahrhundert für die Länge von *Brandröhren* wichtig war. So liest man bei J. VEGA den Satz ([57]): *Die Quadrate der Brandröhrenlängen verhalten sich gegeneinander wie die Produkte aus den Wurfweiten multipliziert mit den Tangenten der Elevationswinkel vom Horizonte...*

Hat die Normale der ebenen Bodenfläche zum gravitativen Lot eine kleine Neigung α ($\alpha < 0$ Gefälle, $\alpha > 0$ Steigung), so ist die Wurfweite *auf dieser geneigten Fläche* durch den Ausdruck

$$w = \frac{W}{\cos[\alpha]} = \frac{2 v_0^2 \cos[\Theta] \sin[\Theta - \alpha]}{g \cos[\alpha]^2} \quad (3.8)$$

gegeben. Diese Formel löst das Problem des französischen Baumeisters und Ingenieurs N.F. BLONDEL (1618-1686) (siehe Fig. 2.1). Maximal wird diese Schussweite im geneigten Gelände bei der Elevation

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad (3.9)$$



Quelle: Deutsche Fotothek

Fig. 3.1: Eine Illustration aus dem Buch *ARCHITECTUR* von WALTHER HERMENIUS RYFF, Nürnberg 1547. Insbesondere hier über die „mathematischen“ und „mechanischen“ Künste. (Quelle: [wikimedia.commons](https://commons.wikimedia.org/))

welches die Winkelhalbierende zwischen dem gravitativen Lot und der geneigten Bodenfläche beschreibt. Der relative Elevationswinkel Θ_α in Bezug auf die geneigte Ebene ist also $\Theta_\alpha = \Theta - \alpha$. Um 1900 stellte man sich die Aufgabe, bei welchen identischen Winkeln Θ_α und Θ die Schussweite im ebenen und geneigten Gelände identisch ist. Diese Forderung führt zu der Gleichung

$$\cos[\Theta + \alpha] = \cos[\Theta] \cos[\alpha]^2 \quad (3.10)$$

Diese implizite Relation hat nur für Neigungswinkel $\alpha > 0$ *ansteigendes Gelände* zwei Lösungszweige, die in Figur (3.2) dargestellt sind. Der kritische Grenzwinkel für die Elevation ist dabei

$$\cos[\Theta_c] = \sqrt{\frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}} \approx 16.714^\circ, \quad (3.11)$$

was einem ansteigenden Geländewinkel α von

$$\cos[\alpha_c] = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 51.827^\circ \quad (3.12)$$

entspricht. Eine weitere Komplizierung des so behandelten Problems tritt ein, wenn das Ziel selber beweglich ist (**FLAK**). Historische Probleme dieser Art können nur noch *iterativ* gelöst werden.

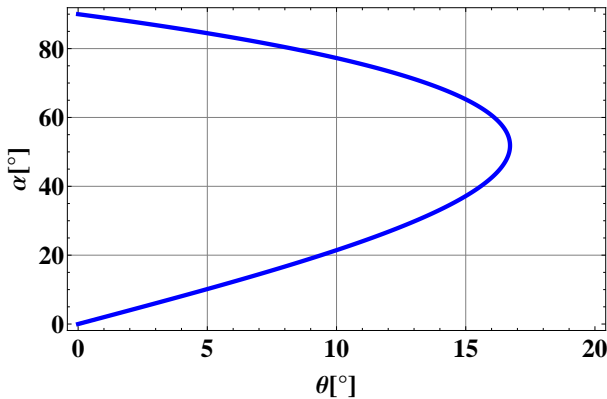


Fig. 3.2: Die beiden Lösungswege der impliziten Relation (3.10).

Zur Abrundung sollen drei ausgewählte Aufgaben zur Wurfparabel diskutiert werden, die C. CRANZ in seinem Lehrbuch ([13]) vorgestellt hat.

Aufgabe 1: Ist es möglich, von der Spitze der Cheopspyramide aus mit einem Stein über die Basis der Pyramide hinaus zu werfen?

Das Problem läuft darauf hinaus, den optimalen Weitwurf von einer Anhöhe H zu bewerkstelligen (Analogie im Sport: *Kugelstoßen*). Soll die horizontale Weite W vom Fußpunkt des Werfers erreicht werden, so gilt nach der Parabeltheorie für den optimalen Abwurfwinkel in der Höhe H

$$\cos(2\Theta_m) = \frac{H}{\sqrt{W^2 + H^2}}. \quad (3.13)$$

Die dazu erforderliche optimale (minimale) Abwurfgeschwindigkeit ist

$$v_0 = \sqrt{g \left(\sqrt{W^2 + H^2} - H \right)}. \quad (3.14)$$

Im Falle $H = 0$ ergibt sich die bekannte Forderung $\Theta_m = 45^\circ$ und $v_0 = \sqrt{gW}$. Mit $H = 137.2\text{m}$ und $W = 113,75\text{m}$ erhält man hier aber

$$\Theta_m = 19.83^\circ; \quad v_0 = 20.06 \text{ m/s} \quad (3.15)$$

Da als typische Geschwindigkeit der Werfer etwa 24m/s angenommen wird (statistisches Mittel), könnte zumindest ohne Luftwiderstand dieser Wurf gelingen.

Aufgabe 2: Dasselbe Ziel in beliebiger Höhenlage zum Abschussort wird gleichzeitig von zwei Kugeln getroffen, die mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und den Abgangswinkeln Θ_1 und Θ_2 abgeschossen wurden. Wie groß ist der Unterschied in den Flugzeiten?

Diese Aufgabe knüpft an das moderne **MRSI** - Verfahren (*Multiple Rounds Simultaneous Impact*) an, bei dem mit *modularen Treibladungen* mehrere „Kanonenkugeln“ zu unterschiedlichen Zeiten und Elevationen abgeschossen werden, aber *gleichzeitig* am entlegenen Ziel ankommen. Das Verfahren eignet sich aber wohl nur für Einzelgeschütze und funktioniert natürlich nur unterhalb der maximalen *Schussreichweite*.

Nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Kugel mit der Marke 1 abgeschossen wurde, zu einem etwas späteren Zeitpunkt $t = \delta T$ die Kugel mit der Marke 2. Dann müssen die folgenden zwei notwendigen **dynamischen** Bedingungen für die Flugzeit T der Kugel „1“ und der Zeitverzögerung δT für Kugel „2“

$$v_1 \cos(\Theta_1) T = v_2 \cos(\Theta_2) (T - \delta T) \quad (3.16)$$

sowie

$$v_1 \sin(\Theta_1) T - \frac{1}{2} g T^2 = v_2 \sin(\Theta_2) (T - \delta T) - \frac{1}{2} g (T - \delta T)^2 \quad (3.17)$$

erfüllt sein. Zu diesen zeitlichen Bedingungen tritt noch die **geometrische** Forderung, dass beide Wurfparabeln die Koordinaten des Zielortes enthalten müssen. Dies schränkt die möglichen Werte von $v_{1,2}$ und $\Theta_{1,2}$ erheblich ein. Aus den obigen Gleichungen lassen sich die zwei Unbekannten t und T berechnen. Man erhält für die Flugzeit von Kugel 1

$$T = \frac{2 v_1 v_2^2 \cos(\Theta_2) \sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{g [v_2^2 \cos(\Theta_2)^2 - v_1^2 \cos(\Theta_1)^2]} \quad (3.18)$$

und die Zeitverzögerung für die Kugel 2

$$\delta T = \frac{2 v_1 v_2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{g [v_1 \cos(\Theta_1) + v_2 \cos(\Theta_2)]}. \quad (3.19)$$

Genau dies ist auch das Ergebnis von C. CRANZ in ([13]).

Aufgabe 3: Ein Mörser wird auf die Spitze eines Burgturmes gerichtet, der Schuss trifft den Turm an seinem Fußpunkt in der Horizontalebene durch das Geschütz nach t_1 Sekunden. Ein zweiter Schuss mit anderer Ladung (Anfangsgeschwindigkeit) und doppelter Elevation trifft die Spitze des Burgturmes nach t_2 Sekunden. Wie hoch ist der Burgturm und wie weit ist er entfernt?

Die Unbekannten des Problems sind also die Höhe H des Turmes, seine Entfernung W zum Geschütz, außerdem die beiden Abgangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 . Eine weitere von den obigen Größen abhängig Unbekannte ist die erste Elevation Θ , die aber wegen $\tan[\Theta] = H/W$ mit der Höhe und Entfernung des Turmes verknüpft ist. Somit ergeben sich folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} v_1 \cos[\Theta] t_1 &= W, \\ v_2 \cos(2\Theta) t_2 &= W, \\ v_1 \sin[\Theta] t_1 - g t_1^2/2 &= 0, \\ v_2 \sin(2\Theta) t_2 - g t_2^2/2 &= H, \\ W \sin[\Theta] &= H \cos[\Theta]. \end{aligned}$$

Wir haben so fünf Gleichungen für fünf Unbekannte. Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung lautet

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{g t_1 t_2}{\sqrt{2(t_2^2 - t_1^2)}}, \\ v_2 &= \frac{1}{2} g t_2 \sqrt{\frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}, \\ H &= \frac{1}{2} g t_1^2, \\ W &= \frac{1}{2} g t_1^2 \sqrt{\frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}. \end{aligned}$$

Damit ist auch diese Aufgabe vollständig erledigt. Der erste Elevationswinkel ergibt sich natürlich aus der Relation

$$\tan[\Theta] = \sqrt{\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 + t_1^2}}.$$

Wie allerdings C. CRANZ auf diese Aufgabe gekommen ist, bleibt im Dunkeln.

3.1 Einfluss der Erdrotation

Der britische Mathematiker J.E. LITTLEWOOD (1885-1977) berichtet in seinem Buch *A Mathematician's Miscellany* aus dem Jahre 1953 von einer Begebenheit während des Seegefechtes am 8. Dezember 1914 vor den Falklandinseln zwischen mehreren britischen Schlachtschiffen und zwei deutschen Panzerkreuzern der Ostasienflotte, die ihm ein britischer Offizier als unmittelbar Beteiligter mitteilte. Die britischen Schiffe begannen auf große Distanzen zu feuern, verfehlten aber ständig ein deutsches Schiff zunächst immer um etwa 100 Yards¹ linksseitig. Man hatte zwar beim Zielen auf große Entfernungen stillschweigend auch die Drift durch die Erdrotation durch einen Linksvorhalt berücksichtigt, aber vergessen, dass man sich auf der Südhalbkugel bei etwa $\varphi \sim -52^\circ$ befindet, wo keine Rechtsablenkung, sondern eine Linksablenkung auftritt. Aufgrund des falschen Linksvorhalts verdoppelte sich so der Fehler.

Das so geschilderte Geschehen wirft die Frage nach dem Einfluss der Erdrotation auf die Bahn einer Kanonenkugel auf. Nach Figur (3.3) betrachten wir auf der Erdoberfläche ein Koordinatensystem, bei dem die $+x$ Achse nach Osten, die $+y$ Achse nach Norden und die $+z$ Achse in den Zenit zeigt. Dann gelten die schon von C.F. GAUSS 1802 aufgestellten Bewegungsgleichungen (hier ohne Luftwiderstand)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega \sin[\varphi] \dot{y} + 2\Omega \cos[\varphi] \dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega \sin[\varphi] \dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} - 2\Omega \cos[\varphi] \dot{x} &= -g. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Die Größe $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ bedeutet die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ die geographische Breite. Um die Gleichungen in zweckmäßiger Approximation zu lösen, führen wir für den Erdboden die komplexe Koordinate

$$\zeta = x + iy$$

ein. Die obigen Gleichungen reduzieren sich dann auf das System

$$\ddot{\zeta} + 2i\Omega \sin[\varphi] \dot{\zeta} + 2\Omega \cos[\varphi] \dot{z} = 0,$$

¹1 yd = 0.9144 m

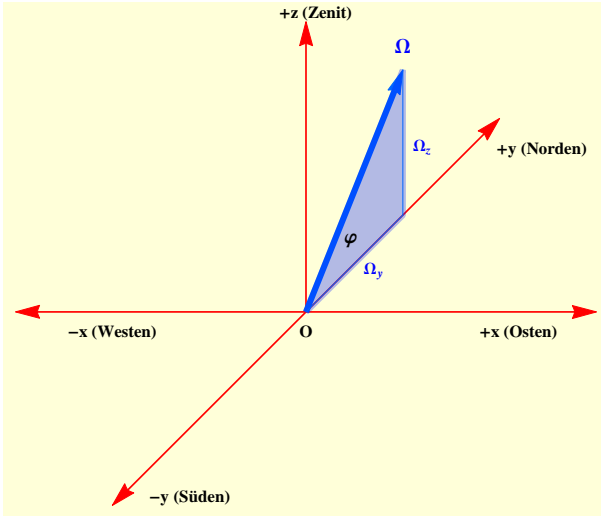


Fig. 3.3: Das lokale Koordinatensystem auf der Nordhalbkugel der rotierenden Erde mit dem axialen Winkelgeschwindigkeitsvektor Ω . Der Vektor zeigt auf den Nordpol (Polarstern) des Himmels. Der Neigungswinkel φ entspricht der geographischen Breite des Ortes. Auf der Nordhalbkugel ($\varphi > 0$) wird eine Wurfpardabel nach rechts, auf der Südhalbkugel ($\varphi < 0$) nach links abgelenkt.

$$\ddot{z} - 2\Omega \cos[\varphi] \dot{x} + g = 0.$$

Dieses gekoppelte System kann man einfach durch eine Reihenentwicklung bis zur dritten Ordnung in der Zeit t mit den Anfangswerten $x[0] = y[0] = z[0] = 0$ sowie

$$\dot{\zeta}[0] = v_0 \cos[\Theta] e^{i\alpha}; \quad \dot{z}[0] = v_0 \sin[\Theta].$$

lösen, wobei α der Azimuthwinkel ist, der von Osten über Norden gezählt wird. Man erhält

$$\begin{aligned} \zeta[t] = & e^{i\alpha} v_0 \cos[\Theta] t - \\ & i e^{i\alpha} v_0 \Omega \cos[\Theta] \sin[\varphi] t^2 - \\ & v_0 \Omega \sin[\Theta] \cos[\varphi] t^2 + \\ & \frac{1}{3} \Omega g \cos[\varphi] t^3 + \dots \end{aligned}$$

Der *erste Term* beschreibt die Spur der ungestörten Wurfparabel längs des Erdbodens in der Richtung α , der *zweite Term* eine dazu orthogonale Abweichung, die auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel aber nach links gerichtet ist. Der *dritte Term* beschreibt eine reine Westablenkung, während der *vierte Term* eine Ostablenkung anzeigt, wie sie auch bei einem freien Fall in einen tiefen Schacht auftritt. Auch die Flugzeit wird leicht modifiziert, wie man an der Lösung für die vertikale z Koordinate

$$z[t] = v_0 \sin[\Theta] t + \left(v_0 \Omega \cos[\alpha] \cos[\Theta] \cos[\varphi] - \frac{1}{2} g \right) t^2 + \dots$$

sehen kann. Für die geänderte Flugzeit ergibt sich so

$$T = 2 \frac{v_0}{g} \sin[\Theta] + 2 \frac{v_0^2}{g^2} \Omega \cos[\alpha] \sin[2\Theta] \cos[\varphi] + \dots$$

Mit der Wurfweite W nach der Flugzeit T und der Gipfelhöhe H der Bahn lässt sich das obige Ergebnis vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \zeta[T] &= e^{\nu\alpha} \left(1 + \sqrt{2} \Omega \cos[\varphi] \sqrt{\frac{W}{g}} \cot[\Theta] \cos[\alpha] \right) W - \\ &2\nu e^{\nu\alpha} \Omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \sin[\varphi] W - \\ &\frac{8}{3} \Omega H \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos[\varphi]. \end{aligned}$$

Während der letzte Term eine feste Westablenkung anzeigt, beschreibt der erste Term eine Erhöhung oder Erniedrigung der Schussweite und der zweite Term die rechts - links Abweichung vom Azimut, je nach Erdhalbkugel. Mit den Werten $W = 10000$ m, $H = 5000$ m, $g = 9.81\text{m/s}^2$, $\Theta = 45^\circ$ und $\varphi = \pm 52^\circ$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \Omega H \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos[\varphi] &\sim 19 \text{ m} \\ \sqrt{2} \Omega W \cos[\varphi] \sqrt{\frac{W}{g}} \cot[\Theta] \cos[\alpha] &\sim 20 \cos[\alpha] \text{ m} \end{aligned}$$

$$2 \Omega W \sqrt{\frac{2 H}{g}} \sin[\varphi] \sim \mathbf{37 m.}$$

Mit diesem Ergebnis wird die Schilderung von LITTLEWOOD verständlich, warum beim Verwechseln der geographischen Breite und daraus resultierenden falschem Vorhalt ein Fehler von etwa 90 Meter auftreten kann.

4 Die klassische Ballistik

Seit I. NEWTON wissen wir, dass der Luftwiderstand bei höheren Geschwindigkeiten bis knapp unterhalb der Schallgeschwindigkeit in guter Näherung proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sein muss. In der hydrodynamischen Theorie spielt hier die Reynoldszahl der Strömung um die Körperoberfläche (Grenzschicht) eine wichtige Rolle. Auf das quadratische Gesetz werden wir uns im Folgenden zunächst beschränken.

4.1 Integration der Grundgleichungen

Die idealisierten Bewegungsgleichungen eines Projektils *mit Eigenbeschleunigung* a und einem reinen Luftwiderstandsgesetz der Form $k v^2$ lauten dann

$$\ddot{x} = (a - k v^2) \frac{\dot{x}}{v}, \quad (4.1)$$

$$\ddot{y} = (a - k v^2) \frac{\dot{y}}{v} - g, \quad (4.2)$$

wo k ein *Luftwiderstandsbeiwert* der Dimension einer inversen Länge ist. Für die Geschwindigkeit gilt $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Die eventuell vorhandene Eigenbeschleunigung a (**Base Bleed Geschoss; Rakete**) wirkt hier immer längs der momentanen Bahntangente. Zunächst werden wir diese Eigenbeschleunigung aber Null setzen. Schon hier sieht man, dass Raketballistik und klassische Ballistik fließend ineinander übergehen. Reine Raketenballistik werden wir in einem späteren Kapitel behandeln. Die Gravitation wird als konstant und die Erde als eben angesehen. Multipliziert man die erste Gleichung mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} und addiert beide, so gilt wegen

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2v\dot{v} = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \quad (4.3)$$

die erste Grundgleichung

$$v\dot{v} + k v^3 + g\dot{y} = 0. \quad (4.4)$$

Berücksichtigen wir nun die elementaren Beziehungen

$$\dot{x} = v \cos[\theta]; \quad \dot{y} = v \sin[\theta], \quad (4.5)$$

so lässt sich (4.4) auch schreiben als

$$\dot{v} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.6)$$

Aus dieser Gleichung folgt für die ballistische Kurve die Existenz eines Punktes **M** *minimaler Geschwindigkeit*. Denn aus $\dot{v} = 0$ folgt sofort

$$\sin[\theta_m] = -\frac{k v^2}{g} \quad (4.7)$$

Da die Größe $\sin[\theta_m]$ immer negativ ist, muss der Punkt **M** bei antriebslosem Flug stets hinter dem Gipfelpunkt (*Vertex*) auf dem absteigenden Ast der ballistischen Kurve liegen. Nur bei der Parabel und beim Senkrechtsschuss sind Gipfelpunkt und **M** identisch.

Wird andererseits die erste Gleichung von (4.1) mit \dot{y} , die zweite mit \dot{x} multipliziert und dann die zweite von der ersten subtrahiert, so gilt zunächst

$$\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x} = g \dot{x} \quad (4.8)$$

und wegen (4.5) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + g \cos[\theta] = 0. \quad (4.9)$$

Die beiden Gleichungen (4.6) und (4.9) sind die beiden Fundamentalgleichungen der ballistischen Kurve, nun aber in den Größen v , der Bahngeschwindigkeit, und dem Tangentenwinkel θ der Bahnkurve. Beide Gleichungen lassen sich auch dynamisch einfach interpretieren. Die Gleichung (4.6) beschreibt die Kräftebilanz in tangentialer Richtung an der Bahnkurve, die Gleichung (4.9) normal zur Kurve. Das letztere sieht man ein, wenn man die Bogenlänge s der Bahnkurve

$$ds = v dt \quad (4.10)$$

einführt. Dann kann man (4.9) auch schreiben als

$$v^2 \frac{d\theta}{ds} + g \cos[\theta] = 0. \quad (4.11)$$

Die Größe $ds/d\theta$ stellt aber bis auf das Vorzeichen den Krümmungsradius der Bahnkurve dar, so dass die Gleichung (4.11) das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalbeschleunigung und der Normalkomponente der Erdbeschleunigung dargestellt. Auf ähnliche Weise kann man auch bei der Bewegung einer Testmasse um einen Zentralkörper nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz zeigen, warum dieser Körper „schwerelos“ ist. Für eine Kreisbahn ist dies natürlich trivial.

Die Bogenlänge spielt bei der Theorie der ballistischen Kurve eine wichtige Rolle, denn wegen (4.10) kann man (4.5) auch als

$$\begin{aligned} dx &= \cos[\theta] ds \\ dy &= \sin[\theta] ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

schreiben. Wäre hier die Bogenlänge s als Funktion des Winkels θ bekannt, so ergeben die obigen Gleichungen nach einer Quadratur die ballistische Kurve. Diese Idee ist tatsächlich durchführbar.

Die erste Bewegungsgleichung (4.1) lässt sich wegen (4.5) umschreiben in

$$\frac{d}{dt}\{v \cos[\theta]\} + kv \{v \cos[\theta]\} = 0. \quad (4.13)$$

oder mit $ds = v dt$

$$\frac{d}{ds}\{v \cos[\theta]\} + k \{v \cos[\theta]\} = 0. \quad (4.14)$$

Aus dieser Gleichung folgt der wichtige Satz, dass in einer ballistischen Kurve mit quadratischem Widerstandsgesetz die horizontale Geschwindigkeitskomponente exponentiell mit der Bogenlänge der Bahn abnimmt. Dies gilt aber nur bei einem quadratischen Widerstandsgesetz. Hat am Scheitelpunkt der Bahn die Kanonenkugel die horizontale Geschwindigkeit \dot{x}_S , so gilt bei einem quadratischen Luftwiderstand

$$\dot{x} = \dot{x}_S e^{-k s}, \quad (4.15)$$

wobei die Bogenlänge der Bahn vor dem Scheitelpunkt negativ, nach dem Scheitelpunkt positiv gezählt wird.

Mit der Abkürzung

$$u = v \cos[\theta] \quad (4.16)$$

lautet die obige Relation am Abschussort

$$u[s] = v_0 \cos[\Theta] e^{-k s}, \quad (4.17)$$

wo Θ jetzt den Elevationswinkel am Abschussort $s = 0$ und v_0 die Abschussgeschwindigkeit bedeuten.

Wir wollen jetzt eine einzige Differentialgleichung für $v[\theta]$ ableiten. Dazu schreiben (4.6) nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.18)$$

Eliminieren wir hier die Größe $d\theta/dt$ mit Hilfe von (4.9), so erhalten wir die fundamentale Gleichung

$$g \frac{dv}{d\theta} - \frac{k v^3}{\cos[\theta]} - g v \tan[\theta] = 0. \quad (4.19)$$

Dieser Typ von Differentialgleichung ist charakteristisch für ein ballistisches Problem. Es erweist sich hier als günstig, wieder die Geschwindigkeit u über Grund einzuführen. Mit $v = u/\cos[\theta]$ führt dies schließlich zu der *Bernoullischen Differentialgleichung*¹

$$g \cos[\theta]^3 \frac{du}{d\theta} = k u^3. \quad (4.20)$$

Wir führen nun die Steigung p der Bahnkurve gemäß

$$p = \tan[\theta]; \quad \cos[\theta] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}; \quad d\theta = \frac{dp}{1+p^2} \quad (4.21)$$

ein. Damit lautet die Gleichung für u

$$g \frac{du}{dp} = k \sqrt{1+p^2} u^3. \quad (4.22)$$

oder nach Division durch u^3

$$g \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{u^2} \right) + 2k \sqrt{1+p^2} = 0. \quad (4.23)$$

¹Benannt nach JACOB BERNOULLI, der sie 1695 diskutiert hat. Normalform $y' + p[x]y = q[x]y^n$.

Diese Differentialgleichung erster Ordnung ist integrierbar und liefert $u = v \cos[\Theta]$ als Funktion des Parameters p . Man erhält dann durch direkte Integration

$$\frac{g/k}{u^2[p]} + p \sqrt{1 + p^2} + \operatorname{arcsinh}[p] = C. \quad (4.24)$$

Die Integrationskonstante C wird durch die Anfangsbedingung bestimmt. Die transzendente Gleichung (4.24) stellt so den **Hodograph** der einfachen ballistischen Kurve bei quadratischem Luftwiderstand dar². Denn es gilt wegen $p = \dot{y}/\dot{x}$ auch

$$\frac{g/k}{\dot{x}^2} + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = C. \quad (4.25)$$

Am Scheitelpunkt der ballistischen Kurve ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente $\dot{y}_S = 0$. Bezeichnet man dann die dortige Horizontalgeschwindigkeit mit \dot{x}_S , so gilt für den Hodographen

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\dot{x}_S}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\dot{x}}\right)^2 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right). \quad (4.26)$$

Diese exakte Formel für den Hodographen der Wurfbewegung benutzte J.H. LAMBERT 1767 zur Konstruktion einer **échelle ballistique**, eine Art „Nomogramm“ ähnlich einem „Rechenschieber“ zur Berechnung ballistischer Kurven ([26]). Ist die Funktion $u[p]$ einmal bekannt, kann die ballistische Kurve in *parametrischer Form* berechnet werden. Mit Hilfe von (4.9) folgt das Zeitdifferential

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{u d\theta}{\cos^2[\theta]} = -\frac{1}{g} u[p] dp. \quad (4.27)$$

und daraus die Bahnkurve

$$dx = -\frac{1}{g} u^2[p] dp; \quad dy = -\frac{1}{g} p u^2[p] dp. \quad (4.28)$$

²Dieses wichtige Integral des ballistischen Problems war schon J. BERNOULLI 1719 bekannt, wurde dann 1745 von L. EULER und 1766 von J.H. LAMBERT neu abgeleitet. 2012 hat im Wettbewerb „Jugend forscht“ der Abiturient SHOURYYA RAY diese Gleichung neu gefunden, was in der Weltpresse als etwas übertriebene Sensation dargestellt wurde.

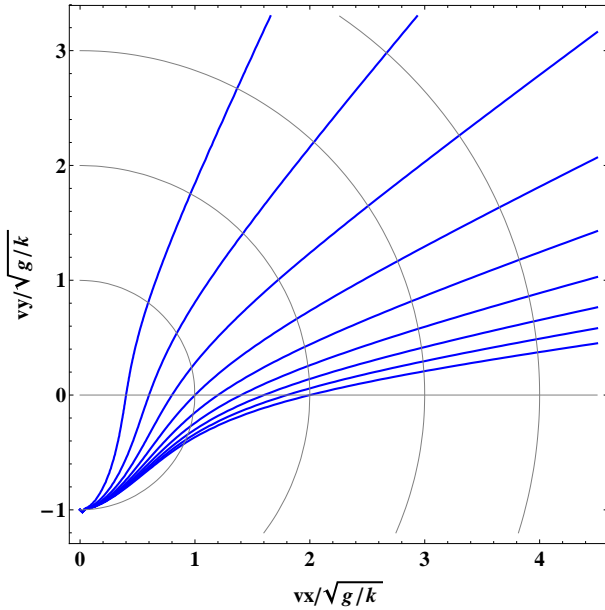


Fig. 4.1: Der Hodograph (4.26) der ballistischen Wurfbewegung mit quadratischem Widerstandsgesetz als Funktion verschiedener Werte der Scheitelpunktgeschwindigkeit v_x bei $v_y = 0$. Alle Geschwindigkeiten sind in Einheiten von $\sqrt{g/k}$. Alle Kurven enden bei der skalierten konstanten Fallgeschwindigkeit -1 .

Mit der Definition

$$\mathbf{f}[p] = p \sqrt{1 + p^2} + \ln[p + \sqrt{1 + p^2}] \quad (4.29)$$

gilt dann im Einzelnen

$$dx = -\frac{v_0^2}{g} \frac{\cos[\Theta]^2 dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.30)$$

und

$$dy = -\frac{v_0^2}{g} \frac{\cos[\Theta]^2 p dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.31)$$

sowie

$$dt = -\frac{v_0}{g} \frac{\cos[\Theta] dp}{\sqrt{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}}}. \quad (4.32)$$

Der Winkel Θ bezeichnet jetzt den Abgangswinkel der Kanonenkugel beim Abschuss. Aus der letzteren Gleichung folgt durch Differentiation nach der Zeit eine sehr einfache Differentialgleichung für $p[t]$, auf die wir noch zurückkommen werden. Auch die Gesamtgeschwindigkeit kann wegen

$$v^2 = u^2 (1 + p^2) \quad (4.33)$$

durch

$$v[p]^2 = \frac{v_0^2 \cos[\Theta]^2 (1 + p^2)}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.34)$$

ausgedrückt werden. Mit dieser Gleichung ist es zum Beispiel möglich, den Punkt minimaler Geschwindigkeit längs der ballistischen Kurve zu berechnen.

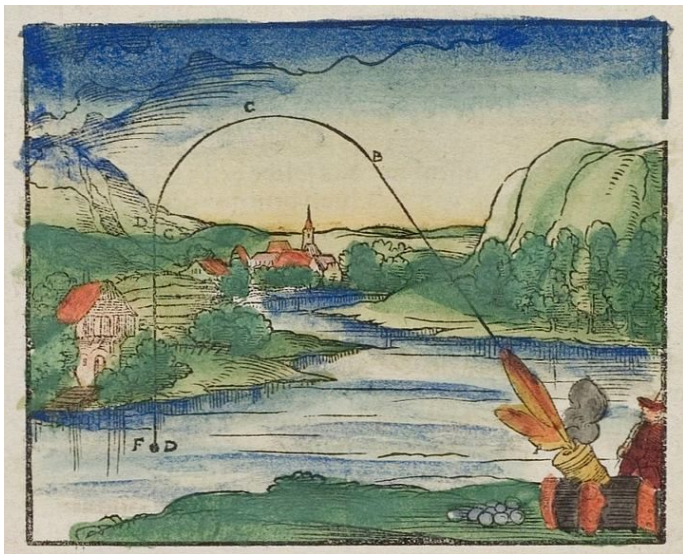
Damit lässt sich die ballistische Kurve *parametrisch durch Quadraturen* darstellen. Im Prinzip ist dies auch die Lösung, die J. BERNOULLI 1719 als Erster fand. Vom praktischen Nutzen sind diese Differentiale eigentlich nur für die Berechnung der beiden Asymptoten der Kurve. Für den Abstand W_A der *senkrechten Asymptoten* vom Abschussort gilt das Integral

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_{-\tan[\Theta]}^{\infty} \frac{\cos[\Theta]^2 dz}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] + \mathbf{f}[z]\}} \quad (4.35)$$

Im Anhang (A.3) diskutieren wir dieses mathematisch sehr interessante Integral etwas genauer in der komplexen Ebene. Eine Vereinfachung durch die *Residuenmethode* ist aber leider nicht möglich. Die andere Asymptote ist die rückwärts fortgesetzte Gerade, die eine etwas höhere Elevation als Θ am Abschussort hat.

Die Differentialgleichung (4.23) gilt für den Fall $n = 2$. Im allgemeineren Bernoulli - Fall von 1719 gilt stattdessen ($a = 0$)

$$g \frac{du}{d\theta} \cos[\theta]^{n+1} - c u^{n+1} = 0. \quad (4.36)$$



Quelle: Deutsche Fotothek

Fig. 4.2: Eine Illustration aus dem Buch ARCHITECTUR von Walther Hermenius Ryff, Nürnberg 1547. Insbesondere hier über die „mathematischen“ und „mechanischen“ Künste. Hier erkennt man noch die alte dreiteilige „Impetushypothese“ aus Gerade - Kreis - Gerade. (Quelle: wikimedia commons)

und in der Variablen p

$$g \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{u^n[p]} \right) + n c \left(\sqrt{1+p^2} \right)^{n-1} = 0. \quad (4.37)$$

Hier sieht man sofort, dass der Fall $n = 1$ trivial ist. Für den Eulerschen Fall $n = 2$ ergibt sich wieder (4.23). Die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ wurden von dem Mathematiker C.G. Jacobi 1840 auf elliptische Integrale zurückgeführt.

Das Problem der ballistischen Kurve ist ein Musterbeispiel dafür, wie dynamische und geometrische Begriffsbildungen ineinander verwoben sind. Wir wollen jetzt eine einzige Differentialgleichung nur für den Verlauf $y[x]$ der ballistischen Kurve mit quadratischem Widerstandsgesetz herleiten.

Nach den vorherigen Überlegungen gilt zunächst

$$u^2 \frac{d\theta}{ds} + g \cos[\theta]^3 = 0. \quad (4.38)$$

Andererseits können wir (4.20) umschreiben in

$$\boxed{g \cos[\theta]^3 \frac{du}{d\theta} = k u^3.} \quad (4.39)$$

oder

$$g \cos[\theta]^3 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u^2} \right) + 2k = 0. \quad (4.40)$$

Wegen (4.38) können wir dies auch

$$u^2 \frac{d\theta}{ds} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u^2} \right) = 2k \quad (4.41)$$

oder

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{u^2} \right) = 2k \left(\frac{1}{u^2} \right) \quad (4.42)$$

schreiben. Nun gilt in der Kurvengeometrie für den Tangentenwinkel θ und für die Krümmung

$$\tan[\theta] = y'; \quad \cos[\theta] = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (4.43)$$

Dabei gilt $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$. Setzt man diese Formel in (4.38) ein, so folgt nach Streichung des gemeinsamen Faktors $\sqrt{1+y'^2}$ die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{y''}{g}. \quad (4.44)$$

Im Falle $u[x] = \dot{x}[t] = \textit{konstant}$ folgt hieraus die Galileische Wurfparabel als allgemeine Lösung. Der zeitliche Verlauf in der Bahnkurve ergibt sich aus dem Differential

$$dt = \sqrt{-\frac{y''[x]}{g}} dx. \quad (4.45)$$

Die eigentliche Differentialgleichung der Bahnkurve folgt schließlich durch Einsetzen von (4.44) in (4.42). Es gilt wegen $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung³

$$\boxed{y''' = 2k \sqrt{1 + y'^2} y''}, \quad (4.46)$$

die mit den Anfangsbedingungen

$$y[0] = 0; \quad y'[0] = \tan[\Theta]; \quad y''[0] = -\frac{g}{v_0^2} \sec[\Theta]^2 \quad (4.47)$$

gelöst werden muss. Auffallend ist hier, dass die Gravitationsbeschleunigung g gar nicht in die eigentliche Differentialgleichung der ballistischen Kurve eingeht, sondern nur durch eine Randbedingung berücksichtigt wird. Schon das erste Integral der obigen Differentialgleichung ist nicht mehr algebraisch, sondern von transzendenter Form und zeigt die ganzen mathematische Schwierigkeiten des ballistischen Problems – z.B. im Vergleich zum Keplerproblem der Planetenbahnbewegung.

Der wichtige *ballistische Koeffizient* k hat die *Dimension einer inversen Länge* und zugleich die physikalische Deutung ($n = 2$)

$$k = \frac{1}{2} c_w(\mathcal{M}) \frac{A \varrho_{Luft}}{m}, \quad (4.48)$$

wo A die Querschnittfläche, ϱ_{Luft} die Dichte der Luft, m die Masse des Projektils und c_w ein Widerstandsbeiwert bedeutet, der von der Form des Projektils und auch noch von der Geschwindigkeit (Machzahl) abhängen kann. Hier ist es wichtig, ob die Geschwindigkeit unterhalb oder oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt. Heutzutage weiß man, daß die Abbremsung durch drei Faktoren bestimmt wird: Im Überschallbereich durch den „Stoßwellenwiderstand“, dann durch die eigentliche Luftreibung und schließlich durch den „Bodensog“ am hinteren Ende des Geschosses, wo durch den Unterdruck Luftwirbel entstehen.

Eine ballistische Kurve besitzt im Allgemeinen zwei bemerkenswerte Extrempunkte auf ihrer Bahn. Der erste Punkt, der zeitlich kurz *nach* dem Gipfelpunkt (Vertexpunkt) erreicht wird, ist der Punkt *maximaler Krümmung*. Kurz danach folgt der Punkt *minimaler Geschwindigkeit*.

³In den Papieren von L. EULER (1745) erscheint sie so noch nicht, dann aber bei J.H. LAMBERT (1766), später auch bei I. DIDION (1848).

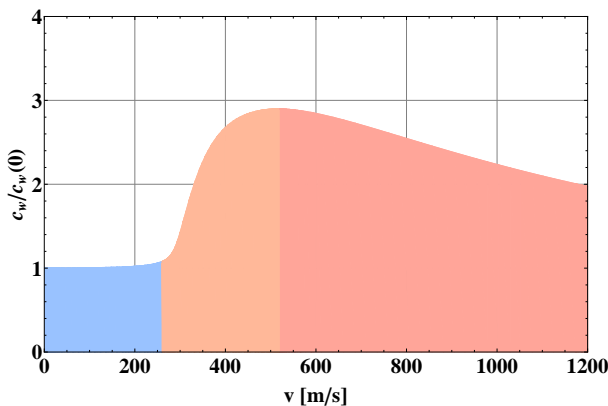


Fig. 4.3: Der Luftwiderstandsbeiwert $c_w(\mathcal{M})$ als Funktion der Geschwindigkeit nach C.J. CRANZ 1910 ([13]). Bis zur Schallgeschwindigkeit ($\approx 340\text{m/s}$) (**subsonic**) ist der Wert konstant, im folgenden Übergangsbereich (**transonic**) stark ansteigend und im Überschallbereich (**supersonic**) fällt der Widerstandsbeiwert in etwa mit dem Potenzgesetz $v^{-1/2}$ ab. Das quadratische Widerstandsgesetz gilt somit streng nur im **subsonischen** Bereich - genauer für **Reynoldszahlen** von 10^3 bis etwas über 10^5 . Im **supersonischen** Bereich gilt eher $k(v) \sim v^{3/2}$. Eine Patronenkugel mit 760m/s Anfangsgeschwindigkeit hält sich nur etwa 1sec im Überschallbereich auf.

Nur bei der reibungsfreien Parabelbahn oder beim Senkrechtschuß mit Luftwiderstand fallen beide Punkte im Vertexpunkt zusammen. Der Punkt x_v *minimaler* Geschwindigkeit folgt sofort aus der Gleichung (4.7) in transformierter Form zu

$$y'[x_v] y''[x_v] = k \left(\sqrt{1 + y'[x_v]^2} \right)^3 \quad (4.49)$$

Ganz analog gilt auch eine Bestimmungsgleichung für den Punkt x_K *maximaler* Krümmung. Für ihn folgt nach Definition für die Krümmung einer Kurve durch Extremwertbildung

$$y'[x_K] y''[x_K] = \frac{2}{3} k \left(\sqrt{1 + y'[x_K]^2} \right)^3. \quad (4.50)$$

Durch numerische Integration der ballistischen Differentialgleichung (4.46) lassen sich diese Punkte einfach bestimmen (siehe Fig. (4.4)).

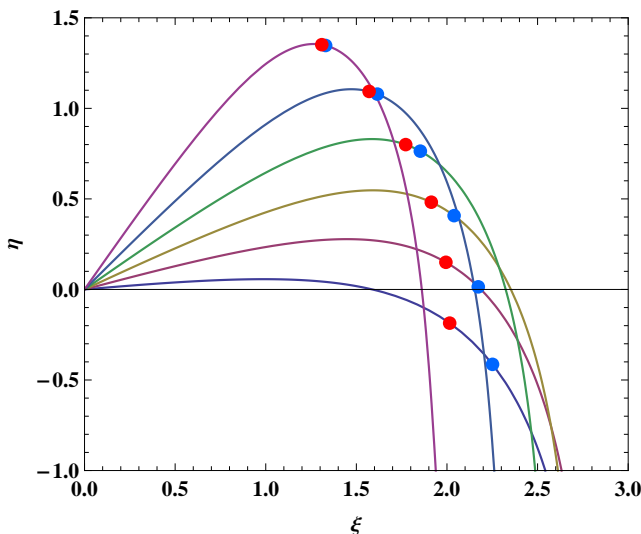


Fig. 4.4: Durch numerische Integration bestimmte ballistische Kurven mit den Bahnpunkten maximaler Krümmung (rot) und minimaler Geschwindigkeit (blau). Der Parameter μ beträgt hier $1/6$ und die Elevationswinkel gehen in 10er Schritten von 5 bis 55 Grad.

4.2 Reihenlösungen nach Euler

Schon im Jahre 1745 hat L. EULER versucht, die ballistische Kurve durch ein Polynom darzustellen. Wir können seine Lösung schnell mit Hilfe der Schlüsselgleichung (4.46) verifizieren. Wir machen einen Reihenansatz der Form

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{2v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k x^k \quad (4.51)$$

und bestimmen rekursiv die Koeffizienten c_k . Die so entstehende unendliche Reihe dürfte aber *semikonvergent* sein, wofür aber ein strenger Beweis fehlt. Von diesen Schwierigkeiten abgesehen ergibt sich so für die *ballistische Kurve* bis zu Termen fünfter Ordnung in x die *semikonvergente Reihendarstellung*

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{2v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \frac{k g}{3v_0^2} \sec[\Theta]^3 x^3$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k g}{12 v_0^4} \{2 k v_0^2 - g \sin[\Theta]\} \sec[\Theta]^4 x^4 & (4.52) \\
& -\frac{k g}{60 v_0^6} \{4 k^2 v_0^4 - 8 k g v_0^2 \sin[\Theta] + g^2 \cos[\Theta]^2\} \sec[\Theta]^5 x^5 -
\end{aligned}$$

Die höheren Terme in x werden algebraisch sehr kompliziert. Die ersten beide Terme beschreiben aber die typische „Wurfparabel“ nach *Galileo Galilei - Torricelli*, der nächste kubische Term dagegen eine reine Abbremsung und Verkürzung der Bahn im Abstiegsbereich durch die anfängliche Bremsbeschleunigung $k v_0^2$. Der Term vierter Ordnung in x kann aber - je nach den Parametern - sein Vorzeichen wechseln, so dass hier schon eine *semikonvergente* Entwicklung angedeutet wird.

Eine Regularisierung der Reihe ist wohl analytisch ausgeschlossen. Aber man kann versuchen, die ersten dominanten Terme der semikonvergenten Reihe asymptotisch aufzusummieren. Zu diesem Zweck betrachten wir nur die Partialentwicklung

$$\begin{aligned}
y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{2 v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \frac{k g}{3 v_0^2} \sec[\Theta]^3 x^3 \\
- \frac{k^2 g}{6 v_0^2} \sec[\Theta]^4 x^4 - \frac{k^3 g}{15 v_0^2} \sec[\Theta]^5 x^5 -
\end{aligned}$$

Durch Ausklammern von k läßt sich leicht zeigen, dass diese ins Unendliche fortgesetzte Reihe durch den geschlossenen Ausdruck

$$\boxed{y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left(e^{2 k \sec[\Theta] x} - 2 k \sec[\Theta] x - 1 \right)}. \quad (4.53)$$

dargestellt werden kann. Die Näherung stellt sich für alle Parameter k als äußerst genau heraus. Wie zu erwarten, sind die Schussweiten bei Flachbahnen etwas unterhalb der exakten Werte.

Mit der obigen analytischen Darstellung kann man auch versuchen, das alte Problem von *Tartaglia*, nämlich die Schussweite als Funktion des Abschusswinkels Θ und der Abschussgeschwindigkeit v_0 unter Einbeziehung des Luftwiderstandes zu berechnen. Euler gibt für dieses Problem 1745 eine Formel an, die aber in realistischen Fällen kaum anwendbar ist. Aus der obigen Darstellung der ballistischen Kurve folgt nämlich durch

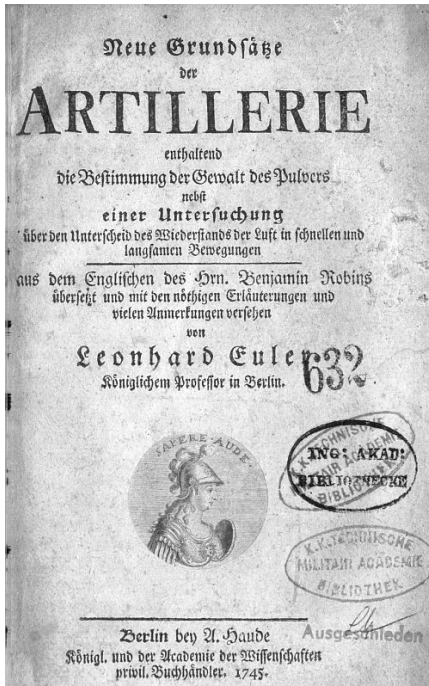


Fig. 4.5: Die erste ausführliche analytische Darstellung einer ballistischen Kurve durch Leonard Euler in seinem Werk „Grundsätze der Artillerie“ von 1745, indem er die experimentellen Resultate von Benjamin Robin aus England in einer physikalischen Theorie mathematisiert. Das Hauptproblem der Lösbarkeit durch Quadraturen wurde schon von J. Bernoulli 1719 in einer Kontroverse mit Newton rein formal gezeigt.

Umkehrung für die Wurfweite W die asymptotische Reihe

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left(\sin[2\Theta] - \frac{4k}{3g} \frac{v_0^2}{g} \sin[2\Theta] \sin[\Theta] + \dots \right) \quad (4.54)$$

In normalen Fällen ist aber $k v_0^2 > g$; also weit ab vom möglichen Konvergenzreis der obigen Entwicklung. Euler gibt auch eine Formel für den Elevationswinkel Θ_m maximaler Wurfweite bei horizontalem Gelände an.

Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man den asymptotischen Ausdruck

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \frac{k v_0^2}{g} + O(k^2), \quad (4.55)$$

der mit dem von L. EULER von 1745 übereinstimmt. Allerdings verändert sich der Koeffizient proportional k leicht, wenn man den Polynomgrad der Approximation bei der ballistischen Kurve erhöht. Wir werden im nächsten Kapitel durch numerische Integrationen und eine genauere analytische Untersuchung zeigen, daß in der obigen Reihe (4.55) anstatt des Faktors $1/6 \sim 0.1666$ eher $0.0742 \dots$ stehen muss. Ursache hierfür ist die merkwürdige Tatsache, daß für den fraglichen *numerischen Koeffizienten* der Reihenentwicklung nach k eine *Taylor - Entwicklung* der ballistischen Kurve nicht ausreichend ist.

Euler schließt seine Untersuchungen 1745 mit der Bemerkung:

Deswegen sind wir gezwungen, diese Untersuchung allhier abzubrechen, und wollen wir dem Autori⁴ die völlige Ausführung dieser Materie überlassen, als welche er uns in einer besondern Schrift nächstens zu liefern versprochen hat.

Doch L. EULER wartete vergebens...

4.3 Reihenentwicklung nach Tempelhof

Die umfangreichsten Reihendarstellungen der ballistischen Kurve stammen wohl von G.F. TEMPELHOF⁵, die er 1781 in seinem Buch (siehe Fig. 4.6) darlegte. Er berücksichtigte in seinen Betrachtungen auch schon eine variable Luftdichte mit der Höhe. Die Gleichung (4.9) kann mit (4.17) in die Form

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{g \cos[\theta]^3}{v_0^2 \cos[\Theta]^2} e^{2ks} \quad (4.56)$$

gebracht werden. Dies ist die Hauptgleichung von G.F. TEMPELHOF aus dem Jahre 1781, um entweder exakt die Bogenlänge s der Bahn als

⁴gemeint ist B. ROBINS, London 1742

⁵Georg Friedrich Tempelhof (auch Tempelhoff); (1737-1807). 1791 Gründer der Artillerie Akademie im Palais Tempelhoff; 1802 Generalleutnant; 1805 Schwarzer Adler-Orden.

Funktion des Tangentenwinkels θ oder umgekehrt genähert den Winkel als Funktion der Bogenlänge in einer Reihe darzustellen ([54]). Der zeitliche Verlauf ist dann durch (4.17) oder

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \frac{\cos[\Theta]}{\cos[\theta]} e^{-k s} \quad (4.57)$$

gegeben. Grundlage für TEMPELHOF ist nun diese Differentialgleichung (4.56), die als Lösung den Hodographen der ballistischen Kurve als Funktion der Bogenlänge hat. Mit der dimensionslosen Bogenlänge

$$S = \frac{1}{k} s \quad (4.58)$$

und dem meist kleinen Parameter ($\mu < 1$)

$$\mu = \frac{g}{k v_0^2} \quad (4.59)$$

lautet diese Gleichung dann

$$\frac{d\theta}{dS} = -\mu \frac{\cos[\theta]^3}{\cos[\Theta]^2} e^{2S}. \quad (4.60)$$

Wir lösen sie mit dem Ansatz

$$\theta = \Theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu^n (e^{2S} - 1)^n \quad (4.61)$$

Nach Bekanntwerden der c_n ist der Tangentenwinkel der Bahn als Funktion der Bogenlänge bekannt. Mit Hilfe dieser Reihe und (4.12) gelingt es dann, den komplexen Zeiger $\exp(i\theta(S))$ parametrisch als Funktion der Bogenlänge darzustellen. Auf diese Weise folgt

$$\begin{aligned} e^{i\theta(S)} &= e^{i\Theta} - \frac{1}{4} i \mu (e^{2S} - 1) (e^{2i\Theta} + 1) - \\ &\quad \frac{1}{16} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 (2e^{3i\Theta} + e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}) + \dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

und nach Integration über die Bogenlänge für die komplexe Bahnkoordinaten $\zeta[S] = \xi[S] + i\eta[S]$

$$\begin{aligned} \zeta[S] &= S e^{i\Theta} - \frac{1}{8} i \mu (e^{2S} - 1 - 2S) (e^{2i\Theta} + 1) \\ &\quad - \frac{1}{64} \mu^2 (e^{4S} - 4e^{2S} + 4S + 3) (2e^{3i\Theta} + e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}) + \dots \end{aligned} \quad (4.63)$$

LE
BOMBARDIER
PRUSSIEN

OU
DU MOUVEMENT
DES
PROJETILES

En supposant la résistance de l'air proportionnelle au
quarré des vitesses

PAR
M. R. TEMPELHOF,
CAPITAINE D'ARTILLERIE AU SERVICE DE SA MAJESTÉ LE ROI
DE PRUSSE.

Opinionum commenta deire dies, naturarum judicia confirmat.



A BERLIN, 1781.

Imprimé, au dépens de l'Auteur,
CHEZ CHRÉTIEN SIGISMOND SPENER.

Fig. 4.6: Das Einbandbild des Buches *Le Bombardier Prussien* von G.F. Tempelhof (Tempelhoff) aus dem Jahre 1781. Dieses Buch, in welchem man die umfangreichsten Reihenentwicklungen zur ballistischen Wurfbewegung vorfindet, stellt einen Höhepunkt und Abschluss in der theoretischen ballistischen Forschung des 18. Jahrhunderts dar.

Diese Reihen sind aber sehr langsam konvergent und man benötigt mindestens Terme bis zur vierten Ordnung in μ , um für moderate Elevationswinkel Θ die Genauigkeit der recht kurzen Lambertschen Funktionsdarstellung (4.127) zu erreichen. G. TEMPELHOF selber berechnete die Terme mit den *reellen trigonometrischen Funktionen* bis zur siebenten Ordnung in μ , was ich mit Computeralgebra nachgerechnet habe und dabei keinen Unterschied feststellen konnte. Bis zur dritten Ordnung ergeben sich nämlich aus (4.62) die beiden Entwicklungen

$$\begin{aligned}\cos[\theta] &= \cos[\Theta] - \frac{1}{4} \mu (e^{2S} - 1) \sin[2\Theta] \\ &\quad - \frac{1}{8} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 \cos[3\Theta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{96} \mu^3 (e^{2S} - 1)^3 (\sin[2\Theta] - 7 \sin[4\Theta]) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin[\theta] &= \sin[\Theta] - \frac{1}{4} \mu (e^{2S} - 1) (1 + \cos[2\Theta]) \\
& - \frac{1}{8} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 (\sin[\Theta] + \sin[3\Theta]) \\
& - \frac{1}{96} \mu^3 (e^{2S} - 1)^3 (3 - 4 \cos[2\Theta] - 7 \cos[4\Theta]) \\
& - \dots
\end{aligned}$$

Es bleibt aus heutiger Sicht eigentlich rätselhaft, warum das Buch von G.F. TEMPELHOF(F) damals als so fundamental angesehen wurde, da die analytischen Reihenentwicklungen kaum *Nutzen für die damalige praktische Artillerie hatten*. Obwohl zunächst geheimgehalten, berichtete schon 1797 der Astronom und Hauptmann der preußischen Armee JOHANN PHILIPP VON ROHDE über die Untersuchungen von Tempelhoff in seiner eigenen Schrift über das ballistische Problem ([40]).

4.4 Reihenlösungen nach der Zeit

Die klassische Lösung hat den Nachteil, dass sie nur eine *implizite* Darstellung der Bahnkurve in ihrem zeitlichen Verlauf darstellt. Es ist daher wichtig, nach einer alternativen Darstellung des zeitlichen Verlaufs der ballistischen Kurve zu suchen. Erste Versuche in dieser Richtung hat schon G. TEMPELHOF in seinem Werk unternommen, neuere Untersuchungen stammen von G.W. PARKER ([36] und auch R. SHOURYYA ([44]). Die Grundgleichungen des Problem sind wieder

$$\ddot{x} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} = 0, \quad (4.64)$$

$$\ddot{y} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} + g = 0, \quad (4.65)$$

die mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}[0] = v_0 \cos[\Theta]; \quad \dot{y}[0] = v_0 \sin[\Theta]. \quad (4.66)$$

durch eine *möglichst einfache Reihenentwicklung* oder Zeitfunktionen t gelöst werden müssen. Aufgrund der Struktur der Gleichungen als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einem integrierenden Faktor machen wir den Ansatz

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = v_0 \cos[\Theta] \left\{ \frac{1}{q}, \frac{p}{q} \right\}. \quad (4.67)$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen erhält man nach Umformungen die neuen bemerkenswerten Gleichungen

$$\dot{p} = -\frac{g}{v_0 \cos[\Theta]} q \quad (4.68)$$

$$\dot{q} = +k v_0 \cos[\Theta] \sqrt{1 + p^2}. \quad (4.69)$$

Dieses bemerkenswerte gekoppelte System muss für eine ballistische Kurve mit den Anfangsbedingungen

$$q[0] = 1, \quad p[0] = \tan[\Theta] \quad (4.70)$$

gelöst werden. Aus beiden gekoppelten Gleichungen folgt leicht

$$\ddot{p} + k g \sqrt{1 + p^2} = 0. \quad (4.71)$$

Diese Schlüsselgleichung folgt auch aus dem Zeitdifferential (4.32) und ist ihr direktes Äquivalent. Sie bestimmt den zeitlichen Verlauf der Bahntangentenneigung am Flugkörper und muss mit den Anfangsbedingungen

$$p[0] = \tan[\Theta]; \quad \dot{p}[0] = -\frac{g}{v_0 \cos[\Theta]} \quad (4.72)$$

gelöst werden. Das Vorzeichen der Wurzel in (4.71) ist von der Orientierung des Geschwindigkeitsvektors abhängig. Der Winkel zwischen der **Zenitrichtung** und der **Geschwindigkeitsrichtung** nimmt zeitlich immer zu.

Mit Standardmethoden erhält man so leicht die Taylorreihen bis zur dritter Ordnung in t

$$p[t] = \tan[\Theta] - \frac{g \sec[\Theta]}{v_0} t - k g \sec[\Theta] \frac{t^2}{2} + \frac{k g^2 \tan[\Theta]}{v_0} \frac{t^3}{6} + \dots \quad (4.73)$$

und

$$q[t] = 1 + k v_0 t - k g \sin[\Theta] \frac{t^2}{2} + \frac{k g (g \cos[\Theta]^2 - k v_0^2 \sin[\Theta])}{v_0} \frac{t^3}{6} - \dots \quad (4.74)$$

Mathematisch sind diese Reihen sehr interessant, aber für realistische Fälle nur langsam konvergent. Für die *praktische* Berechnung von ballistischen Kurven bieten sie so gegenüber der *numerischen Integration* keine wirklichen Vorteile, zumal ja die Positionen des Körpers noch einmal durch eine Quadratur gewonnen werden muss.

Die wichtigste Näherung, die sich aus den obigen Formeln ergeben, nennen wir die sogenannte *Lambertsche Approximation*, da schon J. LAMBERT auf diese im 18ten Jahrhundert gestoßen ist. Sie ist für Flachbahnen der beste Kompromiss zwischen Genauigkeit und analytischem Aufwand. Mit Hilfe der $p[t]$ und $q[t]$ Funktionen erhält man diese Approximation mit Index 1 durch die lineare und quadratische Näherung in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1[t] &= \frac{v_0 \cos[\Theta]}{1 + k v_0 t}, \\ \dot{y}_1[t] &= \frac{v_0 \sin[\Theta] - g t - \frac{1}{2} k g v_0 t^2}{1 + k v_0 t}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Durch Integration ergibt sich dann

$$x_1[t] = \frac{1}{k} \cos[\Theta] \ln(1 + k v_0 t), \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} y_1[t] &= \frac{1}{k} \left(\sin[\Theta] + \frac{g}{2 k v_0^2} \right) \ln(1 + k v_0 t) - \\ &\quad - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left((1 + k v_0 t)^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Für Flachbahnen mit Elevationen kleiner etwa 25 Grad sind diese Formeln für einen beliebigen ballistischen Koeffizienten k völlig ausreichend. Aus der ersten Gleichung für $x[t]$ können wir zudem die Zeit t eliminieren und in die zweite Einsetzen. Dann erhalten wir die rein algebraische Kurvengleichung

$$y_1[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left(e^{2 k \sec[\Theta] x} - 2 k \sec[\Theta] x - 1 \right). \quad (4.78)$$

Diese bemerkenswerte Gleichung ist für *flache Flugbahnen* eine sehr gute Näherung und entspricht unserer Approximation bei der Summation von einem analytischen Teil der Eulerschen Reihe (4.53). Die Wurfweite ist in allen Fällen wenige Prozent zu kurz.

4.5 Alternative Approximation

Die Lösung (4.78) für ballistische Flachbahnen wurde in ähnlicher Form schon von J.H. LAMBERT 1765, später von DIDION 1860 und schließlich von CRANZ in seinem Kompendium 1896 angegeben. Wie man leicht feststellen kann, erfüllen die Geschwindigkeitsfunktionen (4.75) die *halb entkoppelten* Differentialgleichungen ($\dot{x}_1 > 0$)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -k \sec[\Theta] \dot{x}_1^2, \\ \ddot{y}_1 &= -k \sec[\Theta] \dot{x}_1 \dot{y}_1 - g.\end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichungen folgen aus den exakten Gleichungen, indem man bei den häufig vorkommenden Flachbahnen den Term \dot{y}^2 im Wurzelausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit vernachlässigt, dafür aber einen modifizierten *effektiven ballistischen Koeffizienten* $k_{eff} \rightarrow k \sec[\Theta]$ einführt, der den Luftwiderstand zu Beginn exakt und am Ende der Bewegung genähert beschreibt, aber um den Gipfelpunkt der Bahn leicht überschätzt. Die Flugbahnen sollten also alle etwas zu kurz ausfallen. Es ist nun interessant, diese sehr gute approximative Lösung einerseits mit der exakten numerischen Lösung der Bahnkurve, andererseits aber auch mit den naiven Lösungen der alternativen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= -k \dot{x}_2^2, \\ \ddot{y}_2 &= -k \dot{x}_2 \dot{y}_2 - g.\end{aligned}$$

zu vergleichen. Diese ergeben sich direkt ohne Korrekturterm durch Vernachlässigung des \dot{y}^2 Terms in der Wurzel von $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Für diese Approximation lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_2[t] &= \frac{v_0 \cos[\Theta]}{1 + k v_0 \cos[\Theta] t}, \\ \dot{y}_2[t] &= \frac{v_0 \sin[\Theta] - g t - \frac{1}{2} k g v_0 \cos[\Theta] t^2}{1 + k v_0 \cos[\Theta] t}.\end{aligned}\tag{4.79}$$

Durch Integration ergibt sich

$$x_2[t] = \frac{1}{k} \ln(1 + k v_0 \cos[\Theta] t), \quad (4.80)$$

$$y_2[t] = \frac{1}{k} \left(\tan[\Theta] + \frac{g \sec[\Theta]^2}{2 k v_0^2} \right) \ln(1 + k v_0 \cos[\Theta] t) - \frac{g \sec[\Theta]^2}{4 k^2 v_0^2} ((1 + k v_0 \cos[\Theta] t)^2 - 1). \quad (4.81)$$

Für die ballistische Kurve ergibt sich in dieser Approximation

$$y_2[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g \sec[\Theta]^2}{4 k^2 v_0^2} (\exp[2 k x] - 2 k x - 1). \quad (4.82)$$

Durch Vergleich mit einer numerischen Integration der exakten Gleichungen lässt sich die Güte der zwei Approximationen relativ leicht prüfen. Mit den Skalierungen

$$\{k x, k y\} = \{\xi, \eta\}; \quad \tau = \sqrt{g k t}; \quad (4.83)$$

und dem Parameter

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g} \quad (4.84)$$

wurden so für vier unterschiedliche Elevationen mit $\nu = 25$ Simulationen durchgeführt. Die Abbildungen (4.7,4.8) zeigen die sehr gute analytische Approximation der ballistischen Kurve durch die Funktion $(x_1[t], y_1[t])$ (rote Punkte). Der Verlauf von $(x_2[t], y_2[t])$ (blaue Punkte) ist deutlich schlechter. Beide Approximationen werden schlechter, wenn der Elevationswinkeln größer als 25 Grad ist. Dagegen spielt die Größe des Parameters ν kaum eine Rolle.

Zu Ende des 18. Jahrhunderts war diese relativ einfache *asymptotische* Theorie von J.H. LAMBERT für die ballistische Kurve so gut wie unbekannt. Einerseits liebt man in der Enzyklopädie des Christian Freyherrn von WOLFF (1679 - 1754) sehr kritisches über die Wurfparabel: *Neue Ausgabe aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften*, Marburg, 1797, Kapitel Anfangsgründe der Artillerie (redigiert von J.T. MAYER, Seite 757):

*Diese Lehren von der parabolischen Bahn der Geschützku-
geln würden bey der Anwendung ihre vollkommene Richtigkeit*

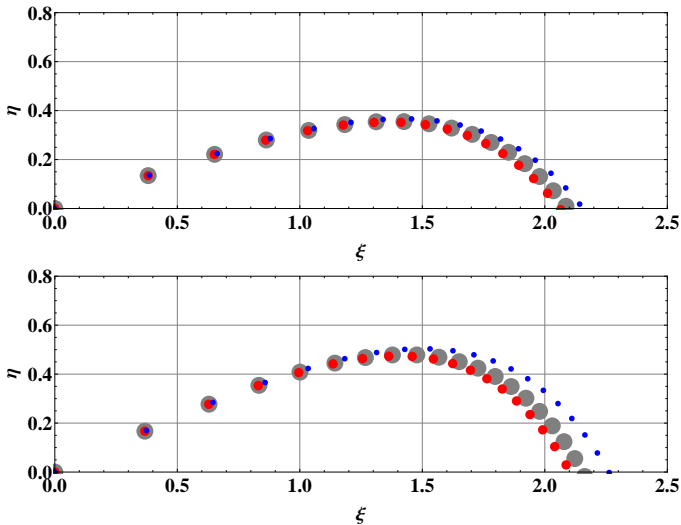


Fig. 4.7: Vergleich einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.120) (graue Scheiben) mit den analytischen Formel (4.76, 4.77) (rote Scheiben) und (4.80, 4.81) (blaue Scheiben) im Falle $k v_0^2/g = 25.0$ (Starke Luftreibung). Die Längeneinheit sind $(\xi, \eta) = k(x, y)$. In der oberen Graphik ist der Elevationswinkel 20° , in der unteren 25° . Die Zeitschritte sind $\Delta\tau = 0.1$.

haben, wenn keine Widerstand der Luft in Betrachtung zu ziehen wäre. Allein dieser verursacht, daß die obigen Lehren in der Ausübung sehr große Einschränkung leiden. Nur in einem luftleeren Raume würden die Bahnen der geworfenen Körper vollständig parabolisch seyn., aber in der Luft selbst weichen sie desto mehr von einer Parabel ab, je größer die Geschwindigkeit der geworfenen Körper, und folglich der Widerstand der Luft ist. Daher obige Theorie einer großen Verbesserung bedarf, wenn sie in der Ausübung zutreffen soll. Bey dem Werffen der Kanonenkugeln kann sie fast gar nicht angewendet werden, weil diese nämlich gewöhnlich eine große Geschwindigkeit haben. Eher läßt sie sich beym Werffen der Bomben anwenden, welche gewöhnlich keine sehr große Geschwindigkeit haben, und man begnügt sich daher bey jenen

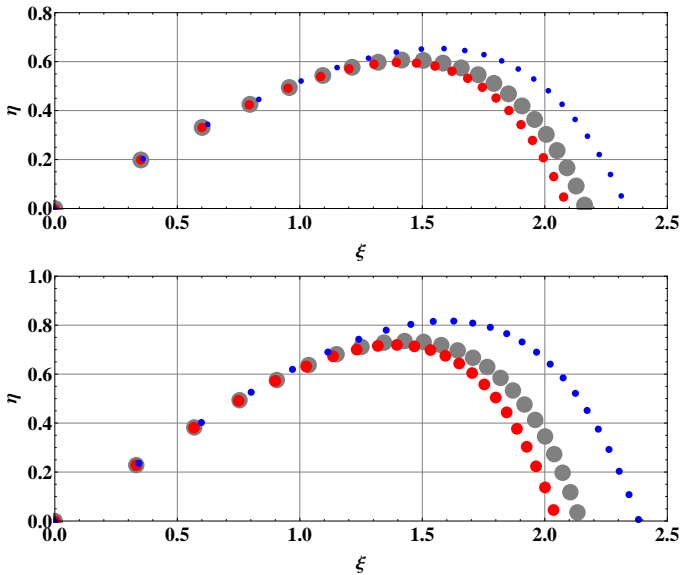


Fig. 4.8: Vergleich einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.120) (graue Scheiben) mit der genäherten analytischen Formel (4.76), (4.77) (rote Scheiben) und (4.80, 4.81) (blaue Scheiben) im Falle $k v_0^2/g = 25.0$ (Starke Luftreibung). Die Längeneinheit sind $(\xi, \eta) = k(x, y)$. In der oberen Graphik ist der Elevationswinkel 30, in der unteren 35 Grad. Die Zeitschritte sind $\Delta\tau = 0.1$.

mit der parabolischen Theorie, so lange man keine bessere für die Ausübung hat. Denn wenn gleich die größten Mathematiker sich damit beschäftigt haben, [...] so fehlt diesen Bemühungen doch noch gar vieles zur wirklichen Ausübung. Man kann indessen hierüber vorzüglich die oben angeführten Schriften von Robins, Euler, d'Árcy, Tempelhof nachlesen...

Ein weiteres Zitat gibt uns 1811 der Major C.F. SEYDELL in seinem Buch über den Gebrauch des kleinen Gewehres auf Seite 233 ([43]):

Das Gesetz, nach welchem die Bahn der Kugel etwa zu bestimmen seyn möchte, kann hier nicht vorgetragen werden, indem es zu den schwierigsten mathematischen Problemen gehört,

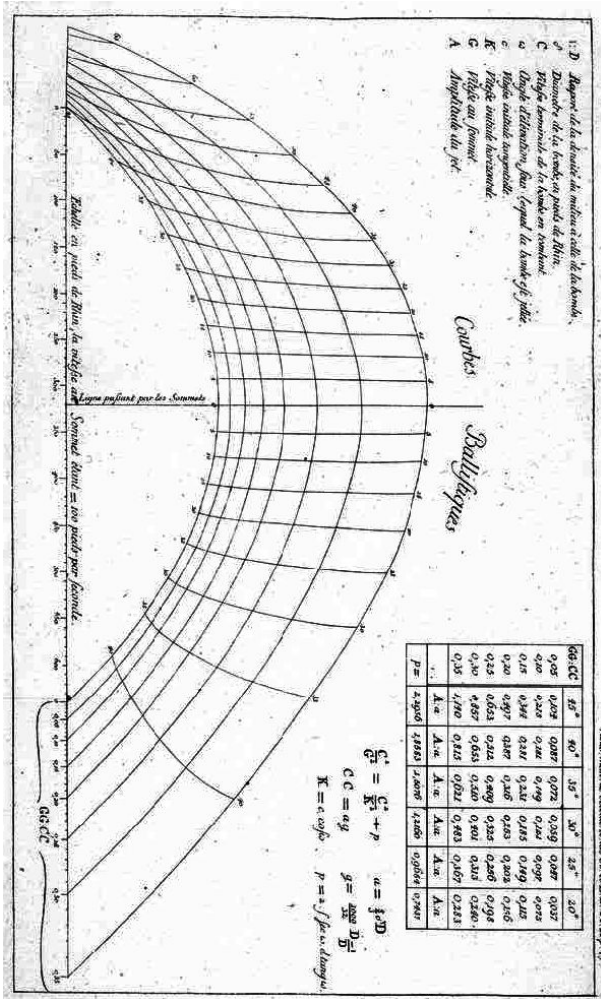


Fig. 4.9: Die „Echelle Ballistique“ von J.H. Lambert aus dem Jahre 1774. Sie war wohl eine Art Rechenschieber (Nomogramm) zur schnellen Berechnung von Geschossbahnen. In einer Hilfstabelle werden Werte des exakten analytischen Hodographen für numerische Umrechnungen angegeben.

und nach allen bisherigen Versuchen großer Mathematiker noch nicht zu allgemeiner Zufriedenheit aufgelöst worden ist.

Schade, daß für diesen Gegenstand auch im Praktischen so wenig geleistet worden ist! Außerdem, was in dem 3ten Bande des Handbuchs des Herrn General von Scharnhorst über diesen Gegenstand vorkommt, ist mir kein Werk bekannt, worin man aus Versuchen etwas Bestimmtes über die Bahn der Kugel angegeben hätte.

Und sucht man weiter in einer alten Bibliothek, so liest man bei G. VON SCHARNHORST (1755 - 1813): *Über die Wirkung des Feurgewehrs*. Für die Königlich preussischen Kriegs - Schulen, Berlin 1813, in Paragraph 12:

Man siehet hieraus, daß die parabolische Theorie auf alle Distanzen und bei allen Ladungen, welche bei den gewöhnlichen Mörsern in einer Belagerung vorkommen, sich anwenden lässt; und da die Anwendung der übrigen Theorien weidläufige Berechnungen erfordert und keine größere Genauigkeit leistet, so kann man sie völlig entbehren.

Erst der französische General ISIDORE DIDION beschreibt in seiner *Traité de ballistique* von 1848 und in der Zweitausgabe 1860 die ballistische Kurve sehr konsequent nicht mehr als Parabel, sondern durch die asymptotische Darstellung (4.78) . Man hatte nun erkannt, dass beim Annähern an die Schallgeschwindigkeit der Luftwiderstand *nicht genau* nach dem quadratischen Gesetz verläuft und eine asymptotische Theorie zur genäherten Beschreibung von ballistischen Flachbahnen völlig ausreichend ist.

Zunächst kann die Flugzeit T der „Kanonenkugel“ bei einem horizontalen Gelände abgeschätzt werden. Mit (4.76) ergibt sich für die Flugzeit bei vorgegebener Wurfweite W

$$T = \frac{1}{k v_0} \left(e^{k W \sec[\Theta]} - 1 \right) \quad (4.85)$$

Diese Gleichung war auch schon J.H. LAMBERT bekannt. Um mit Hilfe der asymptotischen Lambertschen Formel (4.78) die für *praktische Anwendung* wichtige Wurfweite (Schussweite) in einem horizontalen Gelände bei

Flachbahnen *abzuschätzen*, muss man die nichttriviale Wurzel W oder für die Rohrerhöhung den Winkel Θ der transzendenten Gleichung

$$0 = \left(\tan[\Theta] + \frac{g \sec[\Theta]}{2 k v_0^2} \right) W - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} (\exp [2 k \sec[\Theta] W] - 1). \quad (4.86)$$

bestimmen. Die Auflösung nach W gelingt relativ einfach durch Einführung einer neuen transzendenten Funktion, die in der Literatur als *Produktlogarithmus* oder *Lambertsche $\mathbf{W}[z]$ Funktion* bezeichnet wird.⁶ Diese Funktion erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{W}[z] e^{\mathbf{W}[z]} = z \quad (4.87)$$

und spielt in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Die Funktion besitzt im Intervall $z \in (-1/e, 0)$ zwei Äste, die mit $\mathbf{W}_0[z]$ und $\mathbf{W}_{-1}[z]$ bezeichnet werden. Für das ballistische Problem benötigen wir den zweiten Funktionsast. Mit den Hilfsvariablen

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + 2 \frac{k v_0^2}{g} \sin[\Theta] \\ X &= 2 k \sec[\Theta] W \end{aligned} \quad (4.88)$$

lautet die transzendente Gleichung (4.86)

$$X = \ln[1 + \beta X]. \quad (4.89)$$

Die Lösung dieser transzendenten Bedingung ist

$$X = -\mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta}. \quad (4.90)$$

Durch Einsetzen der Wurfweite W in (4.85) und Umformung ergibt sich so

$$T = \frac{1}{k v_0} \left(\sqrt{-\beta \mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} \right)} - 1 \right) \quad (4.91)$$

⁶Hierzu muss bemerkt werden, dass J.H. Lambert selber nie diese nach Ihm benannte $\mathbf{W}[z]$ Funktion auf das ballistische Problem angewendet hat.

Θ°	$\mu = 0.1$	$\mu = 1.0$	$\mu = 10.0$
5	0.87991	0.15604	0.01717
10	1.23594	0.28073	0.03343
15	1.44232	0.38005	0.04838
20	1.57045	0.45779	0.06160
25	1.64604	0.51648	0.07278
30	1.68109	0.55786	0.08166
35	1.68205	0.58318	0.08804
40	1.65276	0.59333	0.09179
45	1.59563	0.58901	0.09284
50	1.51223	0.57077	0.09118

Tab. 4.1: Die dimensionslos skalierte fünfstellige Wurfweite kW als Funktion des Elevationswinkels Θ und dreier Parameterwerte $\mu \equiv g/(k v_0^2)$. Die Zahlen sind in der siebten Stelle nicht gerundet und wurden durch genaue numerische Integration der Differentialgleichung (4.117) gewonnen.

Damit sind wesentliche dynamischen Größen der ballistischen Kurve in dieser Näherung bekannt. Die obige Formel für die Wurfweite W ist zwar exakt, aber nur im Sinne der *Lambertschen* Approximation erster Ordnung für flache Elevationswinkel $\Theta < 25^\circ$.

Mit dieser asymptotischen Formel ist ein praktisches Problem von L. EULER aus dem Jahre 1745 gelöst. In der Tabelle (4.1) sind einige Wurfweiten mit drei unterschiedlichen Parametern $\mu = g/(k v_0^2)$ als Standard mit hoher *akademischer* Genauigkeit durch numerische Integration berechnet worden. An diesen Zahlenwerten muss sich jede genäherte analytische Formel messen lassen. Durch die Unsicherheiten im ballistischen Koeffizienten $k(\mathcal{M})$ bleiben die Ergebnisse natürlich rein „*akademisch*“.

Die Wurfweitenformel in dem 1781 zunächst unter Verschluss gehaltenem Buch *Le Bombadier Prussien* von G.F. TEMPELHOF sind allerdings noch komplizierter als die Obige und in der Praxis wohl nie verwendet worden. Ein interessanter Zeitzeuge zu diesem Problemkreis war der Astronom F. X. VON ZACH (1754-1832), Direktor der Sternwarte auf dem Seeberg bei Gotha. Anonym rezensierte er eine neuere ballistische Untersuchung des Mathematikers J.F. HENNERT aus Utrecht. Unter der Rubrik *Kriegswissenschaft* liest man in der *Allgemeine Literatur - Zeitung* von 1796:([59])

„Die vierte Abhandlung handelt von der Wurfweite der Bomben. Seit Newton und Euler haben die Geometer nicht aufgehört, sich mit dieser ballistischen Aufgabe zu beschäftigen. Die Arbeiten eines Bezour, Borda, Legendre sind bekannt; allein nach der vollständigen Ernte, die der berühmte General v. Tempelhof auf diesem Felde gehalten hat, bleibt nicht mehr viel zur Nachlese übrig. Die Auflösung, die uns dieser gelehrte Mann in seinem „Bombardier prussien“ von dieser Aufgabe gegeben hat, ist ganz neu, und hängt mit keiner der bekanntgemachten zusammen.

So glänzend aber auch alle diese Untersuchungen sind, so finden sich doch hin und wieder in der Ausführung eigene Schwierigkeiten, und sie stimmen nicht immer mit den Erfahrungen und den angestellten Versuchen überein. Unser Vf. (HENNERT), der in tiefen mathematischen Kenntnissen niemanden nachsteht, hat sich daher auch an dieses Problem gewagt, und er gibt davon zwei sehr kurze Auflösungen, die in der wirklichen Ausübung beim Bombenwurf genau genug scheinen. Was die Bewegung der Kanonenkugel betrifft, so ist ihm seine Untersuchung nur bis zu einer Elevation, die nicht über 20 Grade geht, geglückt. Der Fall trifft wohl auch selten, daß man Kanonen über 30 Grade hochrichtet; auch können die Schüsse bei einer solchen Erhöhung nicht genau beobachtet werden.

Um seine Leser nicht auf die Elementarwerke über diesen Gegenstand zu verweisen, so wiederholt der gelehrte Vf. hier kürzlich die ersten Anfangsgründe der Ballistik in einem widerstehenden Mittel, der Luft, und setzt alsdann seine Untersuchungen weiter fort: Die Grenzen einer Rezension erlauben uns nicht, den Vf. hierin weiter zu verfolgen, allein auf des Eigentümliche der Auflösung müssen wir den Leser aufmerksam machen. Dahin gehört vorzüglich die §9. angegebene Approximationsmethode. Die Geometer, die bisher durch eine einzige Kurve, oder durch ihre einzige Gleichung, die Bewegung der Körper in einem widerstehenden Medio ausdrücken wollten, haben sich von der Wahrheit zu weit entfernt. Unser Vf. betrachtet den aufsteigenden Zweig (Branches) dieser krummen

Linie ganz getrennt; er zeigt, wie man den aufsteigenden Zweig der Kurve im widerstehenden Medio durch eine Annäherung die Parabel finden könne, und beweist nachher, daß der absteigende Zweig dieser Kurve dem aufsteigenden nicht ähnlich sei, und gibt für diesen Zweig eine zweite Annäherung durch die Parabel.

So weit ein Ausschnitt der Rezension. Die von HENNERT benutzte Approximation war übrigens keineswegs besser als die von LAMBERT. Trotzdem zeigt der obige Artikel in einer Literaturzeitung, wie populär das ballistische Problem gegen Ende des 18. Jahrhunderts noch war.

4.6 Numerische Integration

Da das ballistische Problem selbst im engeren Sinne ein schwieriges analytisches Problem darstellt, können die entsprechenden Differentialgleichungen natürlich recht einfach *numerisch* integriert werden. Zu diesem Zwecke schreiben wir die beiden Bewegungsgleichungen explizit

$$\begin{aligned}\ddot{x} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} + g &= 0\end{aligned}\quad (4.92)$$

oder mit

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}\quad (4.93)$$

einfacher

$$\begin{aligned}\dot{v}_x + k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x &= 0, \\ \dot{v}_y + k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y + g &= 0.\end{aligned}\quad (4.94)$$

Die naheliegende dimensionslose Skalierung besteht darin, als dimensionslose Zeiteinheit

$$\tau = \sqrt{k/g} t\quad (4.95)$$

einzuführen. Der Geschwindigkeitsvektor wird dann mit der Grenzggeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ gemäß

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\xi; \quad v_y = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\eta\quad (4.96)$$

skaliert. Auf diese Weise ergeben sich die gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} v'_\xi(\tau) + \sqrt{v_\xi(\tau)^2 + v_\eta(\tau)^2} v_\xi(\tau) &= 0, \\ v'_\eta(\tau) + \sqrt{v_\xi(\tau)^2 + v_\eta(\tau)^2} v_\eta(\tau) + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Führt man noch den Parameter

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g} \quad (4.98)$$

ein, welcher das Verhältnis der Bremsbeschleunigung der Luftreibung am Abgangsort zur Erdbeschleunigung darstellt, können die obigen Gleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$v_\xi(0) = \sqrt{\nu} \cos[\Theta], \quad v_\eta(0) = \sqrt{\nu} \sin[\Theta]. \quad (4.99)$$

numerisch gelöst werden. Will man auch die Bahnkurve ableiten, so müssen noch zusätzlich die Gleichungen

$$v_\xi - \nu \xi' = 0, \quad v_\eta - \nu \eta' = 0 \quad (4.100)$$

integriert werden. Bei dieser Skalierung ist zu bedenken, dass die physikalischen Koordinaten nun durch die Skalierung

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi, \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta \quad (4.101)$$

gegeben sind.

Auf diese Weise ist es relativ leicht möglich, zu demonstrieren, dass die Relation des Hodographen der ballistischen Kurve

$$\mathbf{C}_H = \frac{1}{v_\xi^2} + \frac{v_\eta}{v_\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{v_\eta}{v_\xi}\right)^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{v_\eta}{v_\xi}\right) \quad (4.102)$$

ein *Integral* der Bewegung ist. Auch die *Evolute* – das heißt die Ortslinie der Mittelpunkte der Krümmungskreise der ballistischen Kurve – können numerisch nach den Formeln

$$\begin{aligned} \xi_E &= \xi - \frac{v_\eta(v_\xi^2 + v_\eta^2)}{v_\xi v'_\eta - v'_\xi v_\eta} \\ \eta_E &= \eta + \frac{v_\xi(v_\xi^2 + v_\eta^2)}{v_\xi v'_\eta - v'_\xi v_\eta} \end{aligned} \quad (4.103)$$

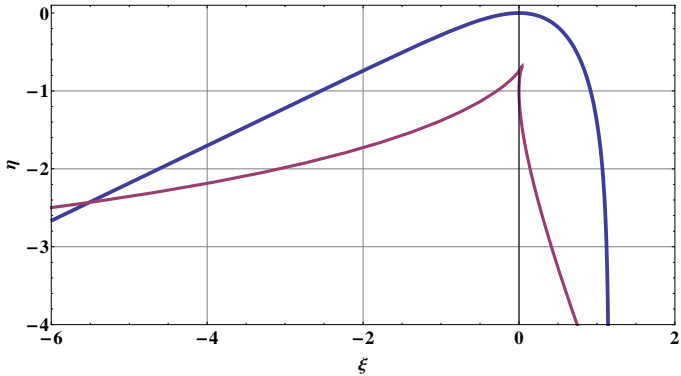


Fig. 4.10: Die Evolute (lila; Ortskurve der Berührungskreis - Mittelpunkte) der ballistischen **Normalkurve** (blau), bei der die Geschwindigkeit am Scheitelpunkt gleich der Grenzgeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ ist. Man sieht hier, dass der Punkt maximaler Krümmung nicht im Gipfelpunkt der Bahn liegt. Die alte Impetushypothese („Trägheits - Hypothese“) des Mittelalters ist keine sehr gute Approximation der Wurfbahn gewesen - aber im Prinzip asymptotisch richtig.

berechnet werden. In der Figur (4.10) ist eine ballistische **Normalkurve** mit $\mu_H = 1$ und ihre zugehörige Evolute graphisch dargestellt. Ganz grob kann man immer noch die alte Impetushypothese des spätantiken Gelehrten J. PHILOPONOS ($\sim 490 - \sim 575$) aus Alexandria erkennen: Zwei Geraden als Asymptoten und - als spätere Verbesserung - zwischen den beiden ein fast kreisförmiger Übergang. Das hatte I. NEWTON wohl gegen Ende des 17. Jahrhunderts veranlasst, die ballistische Kurve als eine *Hyperbel* aufzufassen.

Fast überflüssig noch zu bemerken, daß mit der komplexen Größe ($i^2 = -1$)

$$\mathbf{v} = v_\xi + i v_\eta \quad (4.104)$$

die obigen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\boxed{\mathbf{v}' + |\mathbf{v}| \mathbf{v} + i = 0} \quad (4.105)$$

Angle de Pro- jection.	Portées moyen- nes.	Result de la I. methode	Erreurs	Result de la II. methode	Erreurs
degrés	Toises				
20	414	402,6	+11,4	388	+26,2
30	499	504	-5	486	+13
40	568	547,5	+20,5	542	+26
43	524	547	-23	531	-9
45	515	544	-29	529	-14
50	497	529	-32	523	-26
60	446,5	426,5	+20	437	+9,5
70	331	338	-7	320	+11
75	270	265	+5	248	+22
			-39,6		+58,7

Fig. 4.11: Schussweiten von Kanonenkugeln, wie sie 1771 an der Artillerieschule a la Fère in Frankreich gemessen wurden (1 Toise = 1.949 m). Bei der verwendeten Kanone handelt es sich wahrscheinlich um einen 12 Pfünder. Hennert wertet 1796 mit zwei unterschiedlichen Näherungsformeln diese Daten aus ([59]).

geschrieben werden können, die mit der Anfangsbedingung

$$v(0) = \frac{v_0}{\sqrt{g/k}} e^{\zeta \Theta} \equiv \sqrt{v} e^{\zeta \Theta} \quad (4.106)$$

gelöst werden muss.

4.7 Historische Zahlenbeispiele

Die Berechnung von Wurfweiten war gegen Ende des 18. Jahrhunderts ein aktuelles Forschungsproblem.⁷ Als Beispiel sei hier die Tabelle (4.11) und die rechnerische Auswertung (4.12) zur Schussweite einer französischen Kanone aus dem Jahre 1771 vorgelegt. Wahrscheinlich handelte es sich dabei um eine Vorläuferversion der *Canon de 12 Gribeauval* der französischen Feldartillerie. JEAN-BAPTISTE VAQUETTE DE GRIBEAUVAL (1715 - 1789) war Begründer eines einheitlichen Systems von Geschützen, welches auf älteren Konzepten von JUSTIN AMEDEVÉ ETHAN DE MUSTÈVE von

⁷ Angeblich konnte der französische Mathematiker P.S. Laplace 1789 durch Berechnung von Artillerieschussbahnen seinen Kopf in der Revolution retten. Über sein Rechenverfahren ist aber nichts bekannt

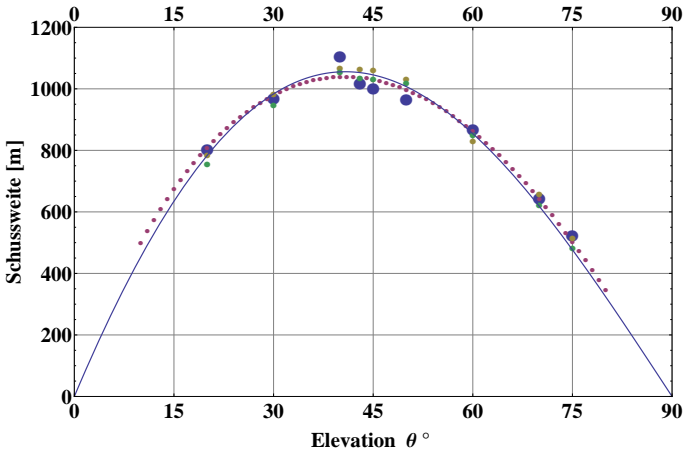


Fig. 4.12: Auswertung der Schussweiten einer wahrscheinlich 12-pfündigen französischen Artilleriekanone des Gribeauval-Systems von 1771, wie sie in der Tabelle (4.11) dargestellt sind. Die blauen Punkte sind die originalen Messdaten, rosaroten Punkte stellen den „best-fit“ der Wurfweiten dar, abgeleitet aus einer numerischen Integration der ballistischen Kurve, die blaue durchgezogene Linie ist die beste Lambert-Approximation und die grünen und orangen Punkte repräsentieren die theoretischen Ergebnisse von HENNERT aus dem Jahre 1799.

1765 aufbauten. GRIBEAUVAL ist auch bekannt für die Konstruktion der Gribeauval - Lafette, die in den napoleonischen Kriegen eine große Rolle spielte.

Die beste Anpassung an die alten historischen Datenpunkte liefert überraschend die numerische Integration der ballistischen Kurve mit den Parametern

$$v_0 \approx \mathbf{133.5} \text{ m/s}, \quad \sqrt{g/k} \approx \mathbf{127.3} \text{ m/s} \quad (4.107)$$

Die Qualität des Fits wird durch die Streuung $\sigma = \mathbf{27.9}$ m ausgedrückt. Für die Lambert - Approximation gilt dagegen $v_0 = \mathbf{120}$ m/s und $\sqrt{g/k} \approx \mathbf{176}$ m/s. Die Streuung beträgt hier $\sigma = \mathbf{34.8}$ m. Die exakte numerische Integration bevorzugt gegenüber der analytischen Approximation eine etwas höhere Anfangsgeschwindigkeit, dafür aber eine deutlich niedrigere Endgeschwindigkeit. Alle Geschwindigkeiten liegen aber im *subsonischen* Bereich. Bemerkenswert ist allemal, daß trotz sehr roher Wurfdaten aus

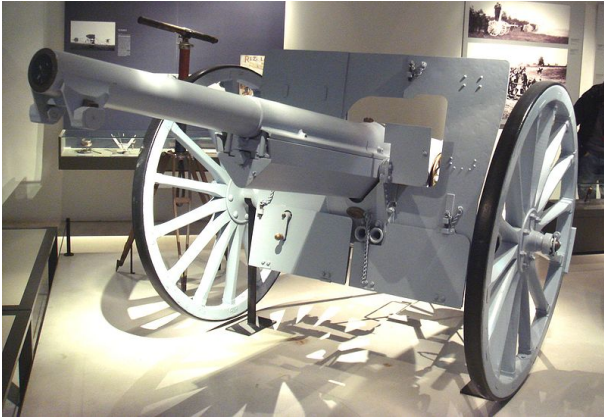


Fig. 4.13: Die Canon de 75 modèle 1897 war ein leichtes französisches Feldgeschütz gegen Ende des 19. Jahrhunderts, welches durch die Kombination verschiedener neuer Funktionen die Artillerie revolutionierte. Verwendung einteiliger Patronenmunition, Nordenfelt - Schnellfeuerverschluss, Wiederspannabzug und eine Lafette mit Sporn. Der Brems- und Vorholmechanismus der 75er war ein hydropneumatisches System. Mündungsgeschwindigkeit: $v_0 = 530$ [m/s] (Schrapnell) und $v_0 = 580$ [m/s] (Sprenggranate). Reichweite: 6800 – 11200[m]. (Quelle: wikimedia commons, PHGCOM, Musee de l'Armee, Paris)

dem Jahre 1771 die Signatur einer ballistischen Kure sehr deutlich zu Tage tritt. Die theoretischen „Fits“ der Ergebnisse nach HENNERT aus dem Jahre 1799 sind da schon etwas schlechter (grüne und orange Punkte). Für den ersten Fit gilt die Streu-Qualität $\sigma = 38.1$ m, für den zweiten $\sigma = 36.4$ m, also etwas besser. Die Hauptursache der Residuen dürfte einerseits bei der Anfangsgeschwindigkeit v_0 liegen, die abhängig von Pulvermenge, chemischen Pulverqualität, Geschossmasse und Rohrlänge ist, andererseits in einer Abdrift der Kanonenkugeln durch induzierte Rotation (*Magnuseffekt*) oder Windscherung.

Doch wie schon weiter oben durch das Zitat von G. VON SCHARNHORST belegt, benutzte man in den meisten Fällen einfach die parabolische Theorie, also für die Schussweite W und die Visierhöhung Θ im ebenen Gelände die Formeln (siehe 3.3)

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\Theta); \quad \sin(2\Theta) = \frac{gW}{v_0^2}. \quad (4.108)$$

Doch diese Formeln sind natürlich für Kanonenkugeln bei höheren Abschussgeschwindigkeiten unzureichend. Etwa 40 Jahre nach der Arbeit von HENNERT erhielt zu Beginn des Jahres 1842 der Direktor der Berliner Sternwarte, J. ENCKE (1791 - 1865), ein ehemaliger Artillerieleutnant der Befreiungskriege, vom Preußischen Generalstab ein Schreiben, in dem er als Gutachter für eine Versuchsreihe zur Schussweite von Geschützen Stellung beziehen sollte. In einem Brief vom 24. Mai 1842 an den Mathematiker C.F. GAUSS schreibt er unter anderem ([19]):

...Vor einigen Monaten erhielt ich von dem Chef der Artillerie eine Aufforderung, mich über die Art zu äußern, wie die Versuchsergebnisse der Artillerie zu behandeln seien, um sowohl einesteils Schusstafeln zu erhalten, welche auch die möglichen Abweichungen geben, anderenteils bei künftigen Versuchen eine Leitung zu haben und die Theorie zu vervollkommen. Es war dabei ausdrücklich bemerkt, dass man wünsche, ich solle von der bisherigen ballistischen Theorie wo möglich keinen Gebrauch machen, da sie sich ungenügend erwiesen. Als ein Beispiel waren folgende Zahlen gegeben, welche, wie ich später erfuhr, zu einem 50 Pf. Mörser, wo die Bombe etwa $8\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser hatte und das Geschoss etwa 6 Kaliber lang war, gehörte.

Ob das Geschoss jetzt eine Kugel war oder schon mehr ein *Langgeschoss*, geht aus den Angaben nicht klar hervor. ENCKE notiert jetzt eine Tabelle für die mittlere Schussweite und deren Streuung für 3 verschiedene Pulverladungen und 5 verschiedenen Elevationswinkeln. Die Entfernungen waren noch in *Schritten* angegeben. Ich nehme hier an, daß 1 *Schritt* = 0.75 m ist. Für jeden Winkel wurden 15 Versuche gemacht, so dass insgesamt 5 mal 15 mal 3 gleich 225 Weitenmessungen durchgeführt wurden. Bei den Versuchen wurde offenbar genau auf die Lage des Schwerpunktes der Kanonenkugeln geachtet – die wohl genau mittig sein musste. J. ENCKE schreibt: *Man bestimmt jetzt die Lage des Schwerpunktes, indem man die Kugeln auf Quecksilber schwimmen lässt.* Und etwas später: *Mir sind Versuche mitgeteilt, wo unter ähnlichen Verhältnissen die Schussweite bei Schwerpunkt unten 838.0 Schritt betrug, bei Schwerpunkt oben aber 1362.1 Schritt.* Dieser Effekt ist natürlich auf den *Magnuseffekt* bei schnell rotierenden Kugeln zurückzuführen, den schon B. ROBINS kannte, aber ENCKE nicht erwähnt. Der ehemalige Artillerieleutnant der Befrei-

\mathcal{L}	[l]	1°	5°	10°	15°	20°
2	x_W	91.2	290.9	510.2	707.6	864.0
2	σ_W	4.5	14.7	14.5	21.1	23.5
5	x_W	201.7	754.2	1303.1	1729.9	2212.0
5	σ_W	14.8	22.7	34.3	26.5	41.4
8	x_W	358.0	1026.8	1716.8	2319.7	2832.4
8	σ_W	22.1	19.7	30.9	45.9	38.1

Tab. 4.2: Die Schusstafel des Preußischen Generalstabes von 1842, wie sie ENCKE mitgeteilt wurde. Die erste Spalte enthält die Menge der Pulverladung (die letzten beiden Werte von 8 Pfund waren nicht notiert und wurden hier aus der energetischen Proportion $v_0 \propto \sqrt{m_{\text{Pulver}}}$ abgeschätzt), die zweite markiert die Schussweiten und die Standardabweichung in der Längeneinheit [l] (1 Schritt = 0.75 [m]), die dritte bis siebente Spalte die entsprechenden Werte für die fünf verschiedenen Elevationswinkel. Bei den Streuwerten ist zu bedenken, dass erst ab 1860 drallstabilisierte Geschosse (spiralförmig gezogene Kanonenrohre) verwendet wurden.

ungskriege und Direktor der Berliner Sternwarte, J. ENCKE, machte in seinem Brief an C.F. GAUSS von 1842 dann über die Schusstabelle die interessante Bemerkung:

Der Versuch, die bisher bekannten ballistischen Formeln mit diesen Zahlen in Übereinstimmung zu bringen, ist mir nicht geglückt. Wenn man die Konstante des Widerstandes und die Anfangsgeschwindigkeit aus irgend zwei Werten bestimmt, so weichen die übrigen viel zu stark ab.

Hier drängt sich die Frage auf: Welche ballistische Formel hat ENCKE herangezogen und warum benutzt er nicht die Methode der kleinsten Quadrate auf ALLE Werte der Tabelle, genau wie er es als Himmelsmechaniker bei den Örtern von Kometen an der Himmelskugel immer anwendet? Der Brief gibt hierüber keine Auskunft. In den Figuren (4.14, 4.15, 4.16) habe ich diese Rechnung nachgeholt und man sieht eine relativ gute Übereinstimmung mit der ballistischen Formel (4.90) – außer bei dem unrealistischen Elevationswinkel von 1 Grad. Die Lambert-Approximation scheint für Elevationen kleiner 20 Grad völlig ausreichend zu sein, was auch durch eine numerische Integration für alle drei Fälle gezeigt werden kann. Merkwürdig ist nur, daß die Grenzgeschwindigkeit bei (4.14) etwas niedriger als bei den anderen fast übereinstimmenden Versuchs-

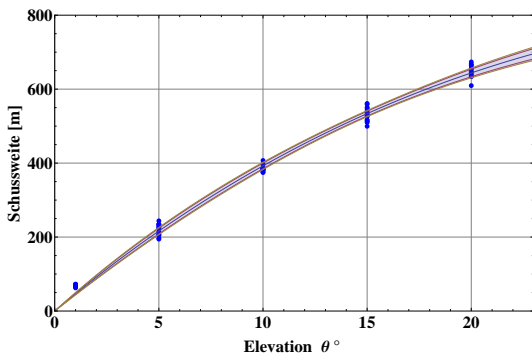


Fig. 4.14: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für 2 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 115 \pm 2$ [m/s] und $v_\infty = 125 \pm 5$ [m/s].

werten liegt. Wie das zu erklären ist, bleibt unklar. Zumindest scheint die Pulvermenge und die Anfangsgeschwindigkeit durch die energetische Beziehung

$$v_0^2 \sim m_{\text{Pulver}} \quad (4.109)$$

verknüpft zu sein, wie man es bei identischen Kugelmassen erwartet. Alle Geschwindigkeiten lagen bei diesen Versuchen unter der Schallgeschwindigkeit - waren also **subsonisch**.

Erst die Erfindung des **Ballistit** im Jahre 1887 durch ALFRED NOBEL ermöglichte es, *supersonische* Abschussgeschwindigkeiten bei Geschützen zu erreichen (siehe Fig. 4.13). **Ballistit** ist eine Weiterentwicklung der *Sprenggelatine* und ist ein energiereiches rauchschwaches Pulver, welches das Schwarzpulver (starke Rauchentwicklung) ersetzen konnte. Die Abbrenngeschwindigkeit des *Ballistit* ist extrem schnell, aber doch langsam genug, um im Geschützlauf keinen zu hohen Druck entstehen zu lassen.

Interessant ist noch die Antwort von C.F. GAUSS vom 15. August 1842 auf die damaligen Probleme ([19]): *Für Ihre Mitteilung der Artillerie Versuche bin ich ihnen sehr dankbar. BESSELS Aburteilung ist unstrittig zu schroff. Es gibt ohne Zweifel viele Fälle, wo man Beobachtungszahlen, auch ohne sie mit einer Theorie bemeistert zu haben, mit Nutzen einer Interpolation unterwerfen kann, in so fern man von der wirklichen Zuverlässigkeit aller jener Beobachtungszahlen eine völlige Überzeugung hat.*

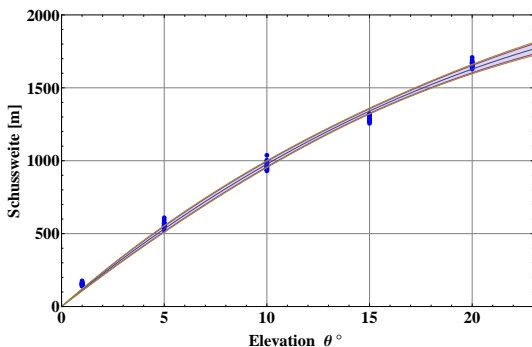


Fig. 4.15: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für 5 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 180 \pm 2$ [m/s] und $v_\infty = 211 \pm 10$ [m/s]. Bei 15 Grad Elevation sieht man den von C.F. GAUSS bezweifelte Wert. Ob hier ungewöhnliche Windgeschwindigkeiten oder eine starke Rotation der Mörserkugel (Magnuseffekt) eine Rolle gespielt hat, bleibt unklar.

Von der anderen Seite ist kaum zu leugnen, dass gerade dieser Überzeugung zumahl bei etwas verwickelten Gegenständen die volle Lebendigkeit fehlen kann, wenn man nicht ihren Zusammenhang unter sich mit einer Einsicht in ihre Theorie durchdringt...

GAUSS drückt dann einigen Zweifel bezüglich bestimmter Daten aus und bemerkt, dass man eigentlich sämtliche Versuchsbedingungen kennen müßte. Er schlägt zudem vor, die Bahn der Kanonenkugel durch mehrere schicklich aufgestellte *Theodoliten* trigonometrisch zu vermessen. Diese von GAUSS geforderte Vermessung wird heutzutage durch eine teure **MSP** - *Multi Sensor Plattform* erledigt.⁸

In dem historischen Heimatbuch *Meppen in alten Ansichten* von H. HEEREN und D. STOCKMANN wird unter anderem über den Besuch von Kaiser Wilhelm II in Meppen erinnert, der den Krupp'schen Schießplatz

⁸Bei der Firma **Rheinmetall Defence** heißt es hierzu: Die Multi Sensor Plattform **MSP** ist eine mobile, hoch präzise 3D Tracking-Messeinrichtung für das Registrieren und Analysieren von ballistischen Flugbahnen und nicht ballistischen Flügen mit den Genauigkeiten, die für einen Theodoliten im Feldeinsatz typisch sind. Die Messresultate in Realzeit erreichen eine Winkelauflösung in Azimut und Elevation von 0,6 Bogensekunden...

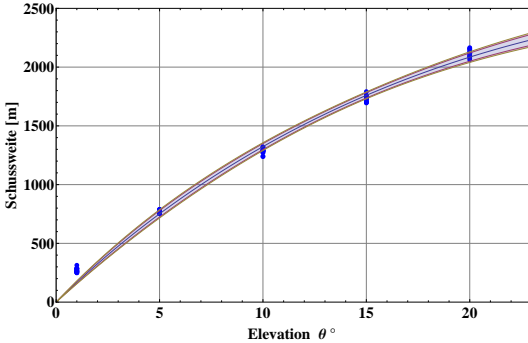


Fig. 4.16: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für wahrscheinlich 8 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 220 \pm 3$ [m/s] und $v_\infty = 194 \pm 7$ [m/s]. Eine Methode der numerischen Integration liefert praktisch die gleichen Werte.

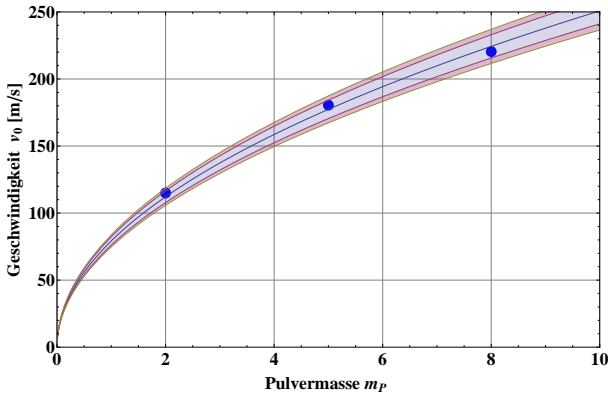


Fig. 4.17: Die Abhängigkeit der Abschussgeschwindigkeit der Kanonenkugel von der verwendeten Pulvermasse. Die energetische Beziehung (4.109) scheint recht gut erfüllt zu sein.

1892 besuchte⁹. Es heißt dort:

Am 28. April 1892 traf der Kaiser mit großem Gefolge in Meppen ein, wo das Schießen sofort begann: Zunächst wurde

⁹Seit 1987 Wehrtechnische Dienststelle 91 (WTD91)



Fig. 4.18: Der Besuch von Kaiser Wilhelm II am 28. April 1892 auf dem Schießplatz bei Meppen. Zu sehen sind zwei Mantelringkanonen für die Marine des ausgehenden 19. Jahrhunderts. (Quelle: BAAINBw, Aus der Geschichte der WTD 91)

aus leichten Kanonen, dann aber aus ganz schweren Schnellfeuerschiffsgeschützen auf Scheiben geschossen und zwar auf eine Entfernung bis zu 16 Kilometern. Nachmittags begann das Schießen mit schweren Schiffsgeschützen. Der Kaiser äußerte zu Krupp¹⁰ seine große Befriedigung. Bei seiner Abfahrt wurde ein Salut von 35 Schüssen abgegeben.

C. CRANZ bezieht sich in seinem Lehrbuch von 1910, Seite 102, auf dieses Ereignis und gibt mit vorgegebenen Anfangswerten eines speziellen Geschützes die Eckdaten der ballistischen Kurve an. Wir wollen hier diese Rechnung wiederholen und dann Vergleiche anstellen. Anfangsgeschwindigkeit und Elevation sind

$$v_0 = 640 \text{ m/s}; \quad \Theta = 44^\circ. \quad (4.110)$$

Die Art des verwendeten Luftwiderstandsgesetzes erfährt man nicht, nur

¹⁰FRIEDRICH ALFRED KRUPP (1854-1902)

das die Grenzggeschwindigkeit bei

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \mathbf{580 \text{ m/s}} \quad (4.111)$$

liegen soll. C. CRANZ errechnet ohne Angabe eines Verfahrens die Eckdaten

Horizontale Schussweite	19066 m
Flugzeit (T)	68.8 s
Aufprallgeschwindigkeit	380.4 m/s
Spitzer Aufprallwinkel	58° 21'
Scheitelabzisse	10840 m
Scheitelordinate (H)	6150 m
Vertikale Asymptote	29300 m

Mit der Näherung $T = \sqrt{8H/g}$ ergibt sich mit $g = \mathbf{9.81 \text{ m/s}^2}$ und der angegebenen Scheitelhöhe H die Flugzeit zu $T = \mathbf{70.8 \text{ s}}$ - also in ausreichender Übereinstimmung. Doch die Ergebnisse lassen sich mit einem rein quadratischen Widerstandsgesetz *nicht exakt reproduzieren*; zumindest dann nicht, wenn man als Grenzggeschwindigkeit **580 m/s** und *keine Abnahme der Luftdichte mit der Höhe* annimmt. Lässt man den Exponenten n des Widerstandsgesetzes v^n und die Grenzggeschwindigkeit v_{∞} als freie Parameter, so lassen sich die horizontale Schussweite und die Scheitelabzisse recht gut durch die Größen

$$n \sim \mathbf{2.2} \text{ und } v_{\infty} \sim \mathbf{469 \text{ m/s}} \quad (4.112)$$

darstellen. Hieraus kann man vorsichtig schließen, daß C. CRANZ die obigen Bahndaten mit dem quadratischen Widerstandsgesetz $n = 2$ berechnet hat. Der beste Fit ergibt sich dann für

$$v_{\infty} \sim \mathbf{474 \text{ m/s}}. \quad (4.113)$$

Durch numerische Integration als auch durch die Integraldarstellung ergeben sich dann übereinstimmend die folgenden Bahndaten:

Horizontale Schussweite	19062 m
-------------------------	----------------

Flugzeit (T)	70.8 s
Aufprallgeschwindigkeit	338.9 m/s
Spitzer Aufprallwinkel	61° 3'
Scheitelabzisse	10924 m
Scheitelordinate (H)	6226 m
Vertikale Asymptote	27961 m

Wie man sieht, stimmen die exakten Werte mit denen von CRANZ aus dem Jahre 1910 mehr oder weniger gut überein. Mit der Näherung $T = \sqrt{8H/g}$ ergibt sich mit der bekannten Scheitelhöhe hier die Flugzeit zu $T = 71.3s$, also in guter Übereinstimmung mit der numerischen Integration. Um 1900 war eben die Berechnung einer ballistischen Flugbahn mit numerischen Hilfstafeln keine sehr leichte Aufgabe.

4.8 Funktional-Approximationen

Um die ballistische Kurve nicht durch ein Polynom, sondern durch eine Entwicklung nach bestimmten Funktionen zu approximieren, werden wir im Folgenden zwei Methoden skizzieren.

4.8.1 Die Gerade als erste Näherung

Betrachten wir zunächst die verschiedenen *fundamentalen Längeneinheiten* des ballistischen Problems. Diese sind

$$\frac{v_0^2}{g}; \quad \frac{1}{k}; \quad \frac{v_0}{\sqrt{k g}}. \quad (4.114)$$

Wir benutzen jetzt die zweite Skalierung und definieren bis auf einen Faktor 2 wie J.H. LAMBERT 1766 eine Länge L gemäß

$$k = \frac{1}{L} \quad (4.115)$$

und haben die dimensionslosen Skalierungen

$$x = L \xi; \quad y = L \eta; \quad \eta = k y; \quad \xi = k x. \quad (4.116)$$

Damit lautet die Differentialgleichung (4.46 dritter Ordnung

$$\boxed{\eta'''(\xi) = 2 \sqrt{1 + \eta'(\xi)^2} \eta''(\xi).} \quad (4.117)$$

Die Anfangsbedingungen sind jetzt

$$\eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = \tan[\Theta]; \quad \eta''(0) = -\mu \sec[\Theta]^2, \quad (4.118)$$

wobei μ durch

$$\mu = \frac{gL}{v_0^2} = \frac{g}{k v_0^2} = \left(\frac{v_\infty}{v_0}\right)^2 \equiv \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{v_0}\right)^2 \quad (4.119)$$

gegeben ist. Der Parameter stellt somit das Verhältnisquadrat von Grenzfallgeschwindigkeit zur Abgangsgeschwindigkeit dar. Aus diesem System kann man die beiden wichtigsten *semikonvergenten* Reihenentwicklungen der ballistischen Kurve *im engeren Sinne* nach *L. Euler* (1745) und *J.H. Lambert* (1766) ableiten.

In einem *Memoire* und einem Buch zwischen den Jahren 1765 - 1767 ging J.H. LAMBERT das „ballistische Problem“ neu an und erlangte für die ballistische Kurve im engeren Sinne eine sehr gute analytische Approximation, die besser als die Reihenapproximation von L. EULER war. Um das Ergebnis von J.H. LAMBERT möglichst elegant zu reproduzieren, geht man am besten von der Differentialgleichung (4.117)

$$\eta'''(\xi) = 2 \sqrt{1 + \eta'(\xi)^2} \eta''(\xi) \quad (4.120)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = \tan[\Theta]; \quad \eta''(0) = -\mu \sec[\Theta]^2. \quad (4.121)$$

aus. Zur Lösung machen wir mit dem Entwicklungsparameter μ (4.119) einen Störungsansatz einer gradlinigen Bahn¹¹

$$\eta(\xi) = \tan[\Theta] \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \eta_k(\xi) \quad (4.122)$$

¹¹Diesen Ansatz hat J.H.Lambert so nicht gemacht

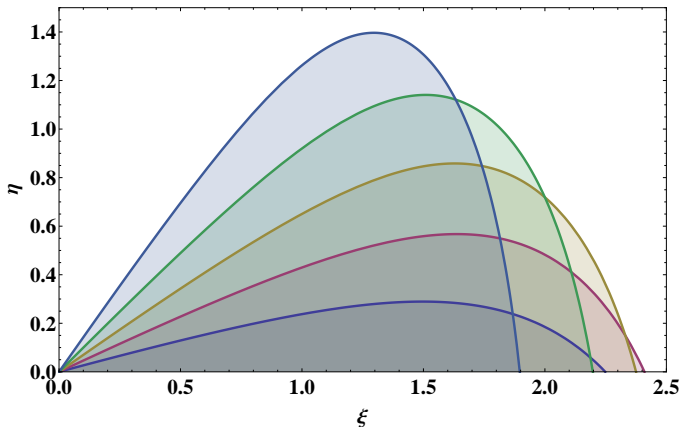


Fig. 4.19: Fünf verschiedene ballistische Kurven aus einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.117) für $\mu = 0.025$ und den Elevationswinkeln von 15° , 25° , 35° , 45° und 55° . Deutlich ist die Abweichung von der „Wurfparabel“ zu erkennen. Maximale Schussweite bei etwa 25° .

einschließlich der Anfangsbedingungen für $k = 1$

$$\eta_1(0) = 0; \quad \eta_1'(0) = 0; \quad \eta_1''(0) = -\sec[\Theta]^2 \quad (4.123)$$

und für alle anderen $k \geq 2$

$$\eta_k(0) = 0; \quad \eta_k'(0) = 0; \quad \eta_k''(0) = 0. \quad (4.124)$$

Diese Entwicklung entspricht so einer Funktions - Iteration, wobei in „nullter Lösung“ die gradlinige Bahn mit unendlich hoher Geschwindigkeit ($\mu = 0$) durchflogen wird.

Einsetzen des obigen Ansatzes in die Differentialgleichung (4.120) führt zu der Rekursion

$$\begin{aligned} \eta_1'''(\xi) - 2 \sec[\Theta] \eta_1''(\xi) &= 0, \\ \eta_2'''(\xi) - 2 \sec[\Theta] \eta_2''(\xi) &= 2 \sin[\Theta] \eta_1'(\xi) \eta_1''(\xi), \\ \dots &= \dots \end{aligned} \quad (4.125)$$

Die höheren Rekursionen werden sehr schnell algebraisch unzumutbar kompliziert. Wir beschränken uns hier also auf die **erste Näherung**, zumal auch die obige asymptotische Entwicklung *semikonvergent* ist. Für die

Funktion $\eta_1(\xi)$ erhält man mit den entsprechenden Anfangsbedingungen

$$\eta_1(\xi) = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \xi \sec[\Theta] - e^{2 \xi \sec[\Theta]} \right] \quad (4.126)$$

Damit ergibt sich in erster **asymptotischer** Ordnung im Parameter $\nu = (k v_0^2)/g$ für die analytische Darstellung der ballistischen Kurve in dimensionslosen Koordinaten wieder der Ausdruck

$$\eta(\xi) = \tan[\Theta] \xi + \frac{1}{4\nu} \left[1 + 2 \xi \sec[\Theta] - e^{2 \xi \sec[\Theta]} \right]. \quad (4.127)$$

Dies ist aber schon die wohlbekannte Lambertsche Approximation.

Es war wohl auch J.H. LAMBERT, der als Erster bemerkte, dass die ballistische Kurve wesentlich genauer vom Gipfelpunkt (Scheitelpunkt) aus berechnet und dargestellt werden kann. Denn bei der Kurvenapproximation (4.127) zeigte sich, dass im absteigenden Ast die Kurve gegenüber dem wahren Verlauf etwas zu stark abbiegt und so systematisch eine etwas zu kurze Wurfweite anzeigt. Auch die nächst höhere Iteration ändert daran nicht viel. LAMBERT legte nun den Koordinatenursprung nicht an den Abschussort mit einem bestimmten Elevationswinkel Θ , sondern in den Gipfelpunkt. Hier ist sicherlich eine bessere Konvergenz zu erwarten. Aufgrund des Hodographen (4.25) ist es zudem möglich, jede ballistische Kurve durch einen einzigen Parameter μ_H gemäß

$$\mu_H = \frac{g}{k v_H^2} \quad (4.128)$$

zu klassifizieren, wobei wieder g die Erdbeschleunigung, k der als konstant angenommen Luftwiderstandsbeiwert und v_H die horizontale Scheitelgeschwindigkeit bezeichnet. Der Elevationswinkel Θ und die Abschussgeschwindigkeit v_0 oder μ (4.119) am Abschussort sind hier keine primären Parameter mehr.

Es gilt mit (4.25) einfach

$$\frac{g}{k v_0^2 \cos[\Theta]^2} + \frac{\sin[\Theta]}{\cos[\Theta]^2} + \operatorname{arcsinh}(\tan[\Theta]) = \frac{g}{k v_H^2}. \quad (4.129)$$

oder

$$\boxed{\mu_H = (\mu + \sin[\Theta]) \sec[\Theta]^2 + \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right) \right)}. \quad (4.130)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung konnte J.H. LAMBERT seine **echelle ballistique** berechnen, denn eine Vielzahl unterschiedlicher Parameterkombinationen von μ und Θ am Abschussort konnte jetzt auf einen **einzigen Parameter** μ_H zurückgeführt werden.

Zur eigentlichen iterativen Berechnung der Scheitelpunktform benutzen wir wieder die Differentialgleichung (4.120)

$$\eta'''(\xi) = 2 \sqrt{1 + \eta'(\xi)^2} \eta''(\xi), \quad (4.131)$$

jetzt aber mit den Anfangsbedingungen

$$\eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = 0; \quad \eta''(0) = -\mu_H. \quad (4.132)$$

Zur Lösung machen wir wieder mit dem Entwicklungsparameter μ_H den Ansatz

$$\eta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_H^{2k+1} \eta_{2k+1}(\xi) \quad (4.133)$$

einschließlich der Anfangsbedingungen für $k = 0$

$$\eta_1(0) = 0; \quad \eta'_1(0) = 0; \quad \eta''_1(0) = -1 \quad (4.134)$$

und für $k > 1$

$$\eta_k(0) = 0; \quad \eta'_k(0) = 0; \quad \eta''_k(0) = 0. \quad (4.135)$$

Auch diese Reihe hat nur *semikonvergenten* Charakter. Die sukzessive Iteration liefert die Funktionenfolge

$$\eta_1(\xi) = \frac{1}{4} (1 + 2\xi - e^{2\xi}) \quad (4.136)$$

und

$$\eta_3(\xi) = \frac{1}{576} (-17 - 12\xi + (9 - 36\xi) e^{2\xi} + 9 e^{4\xi} - e^{6\xi})$$

sowie

$$\eta_5(\xi) = \frac{1}{460800} \left(3031 - 6e^{10\xi} + 125e^{8\xi} + 1560\xi + 300(12\xi - 7) e^{4\xi} - 50(5 + 12\xi) e^{6\xi} - 400(2 + 3\xi(3\xi - 5)) e^{2\xi} \right)$$

Die höheren Funktionen werden immer komplizierter. Numerische Integrationen zeigen aber deutlich, dass man sich noch deutlicher als im früheren Fall (4.127) auf die erste Approximation $\eta_1(\xi)$ beschränken kann.

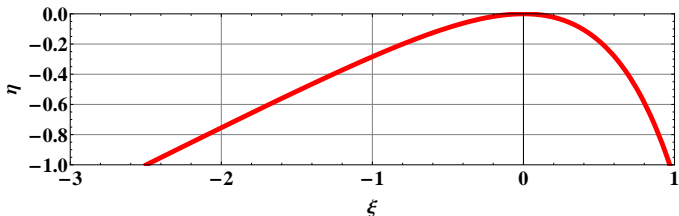


Fig. 4.20: Die ballistische Normalkurve $\eta_1(\xi)$ oder $\eta(\xi)$ für $\mu_H = 1$ bei quadratischem Luftwiderstand (4.136). Durch Streckung oder Stauchung mit dem Faktor μ_H ungleich eins lässt sich jeder Elevationswinkel oder jede Anfangsgeschwindigkeit in den dimensionslosen Koordinaten (ξ, η) visualisieren. Dies ist das Prinzip der **echelle ballistique** von J.H. LAMBERT 1766. Die Ordinate wurde hier auf den Wertebereich $\eta \in \{-1, 0\}$ beschränkt.

Die analytische Darstellung der ballistischen Kurve in Scheitelpunktform lautet also recht genau

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \mu_H \eta_1(\xi) \\ &\equiv \frac{1}{4} \mu_H (1 + 2\xi - e^{2\xi}), \end{aligned} \tag{4.137}$$

wobei hier durch die Wahl des Koordinatensystems die vertikale Koordinate $\eta(\xi)$ rein negativ ist. Die Funktion $\eta_1(\xi)$ kann man so die **universelle ballistische Kurve** bei quadratischem Luftwiderstand nennen. Durch den Parameter μ_H wird diese nach unten gerichtete Kurve gestaucht oder gestreckt, je nachdem wie der Elevationswinkel und die Abschussgeschwindigkeit sich verhalten.

4.8.2 Die Parabel als erste Näherung

Anstatt einer Geraden benutzen wir nun die Wurfparabel als erste Näherung der ballistischen Kurve. Hier sollte das Problem der Divergenz der Wurzelfunktion im absteigenden Ast der ballistischen Kurve nicht mehr auftreten. Wie werden die Wurfweite, die Scheitelhöhe und die Flugzeit durch den Parameter k korrigiert? Bei welchem Elevationswinkel erreicht man maximale Wurfweite?

Um diese Frage im Grenzfall $b \rightarrow 0$ zu beantworten, betrachten wir zunächst die asymptotischen Ausdrücke der Formel (4.90) im Grenzfall

$\nu \equiv k v_0^2/g \rightarrow 0$ (verschwindend kleiner Luftreibung). Im Falle $\nu \rightarrow 0$ ergeben sich mit (4.88) die Entwicklungen

$$\frac{1}{2} \frac{\cos[\Theta]}{\beta} = \frac{1}{2} \cos[\Theta] - \nu \sin[\Theta] \cos[\Theta] + O(\nu^2) \quad (4.138)$$

und

$$-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} = -\frac{1}{e} + 2\nu^2 \frac{\sin[\Theta]^2}{e} - O(\nu^3) \quad (4.139)$$

Für die Lambertsche Funktion im unteren Ast gilt nach Definition für $z \rightarrow 0$ die asymptotische Entwicklung

$$\mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{1}{e} (1-z) \right) = -1 - \sqrt{2z} + \dots \quad (4.140)$$

Mit alledem ergibt sich so im Limes $\nu \rightarrow 0$ für die Wurfweite die Formel

$$\xi_w = \nu \sin[2\Theta] - O(\nu^2). \quad (4.141)$$

Dies entspricht aber der parabolischen Theorie der ballistischen Kurve nach *Galilei - Torricelli*. Bei maximaler Wurfweite muss der Elevationswinkel

$$\Theta_{max} = \frac{\pi}{4} \quad \{\nu \rightarrow 0\} \quad (4.142)$$

betragen.

Im allgemeinen Fall des Parameters $\nu = k v_0^2/g$ muss die asymptotische Formel (4.90) für die Wurfweite nach Θ differenziert und Null gesetzt werden. Die nichttriviale Wurzel für den extremalen Winkel Θ_m ergibt sich nach einiger Umrechnung mit (4.87) zu

$$\boxed{1 + \frac{2\nu}{\sin[\Theta_m]} = \exp \left(\frac{2\nu}{(1 + 2\nu \sin[\Theta_m]) \sin[\Theta_m]} \right)}. \quad (4.143)$$

Die Lösung dieser transzendenten Gleichung liefert den extremalen Abwurfwinkel in der EULER - LAMBERTSCHEN Näherung, aber jetzt für den ganzen Wertebereich (siehe Fig. (4.21)). Denn asymptotisch gilt mit der obigen Relation wie in (4.55)

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \nu + \dots \quad (\nu \rightarrow 0) \quad (4.144)$$

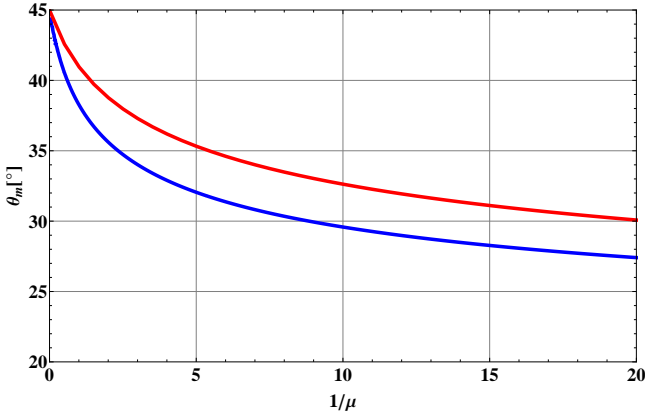


Fig. 4.21: Der optimale Elevationswinkel Θ_m als Funktion von $1/\mu = kv_0^2/g$ für maximale Wurfweite im ebenen Gelände, wie er sich aus der transzendenten Gleichung (4.143) ergibt (blaue Kurve), welche auf der **Lambertschen Approximation** beruht. Zum Vergleich ist auch die exakte Abhängigkeit dargestellt, wie sie sich aus einer numerischen Integration der ballistischen Differentialgleichung ergibt (rote Kurve). Diese exakte Abhängigkeit wird weiter unten durch die asymptotisch exakte Formel (4.167) gut approximiert.

Allerdings sind die so erhaltenen extremalen Elevationswinkel etwas zu niedrig, wenn man sie mit den exakten Werten vergleicht, wie sie sich aus einer numerischen Integration ergeben (siehe rote Kurve in Fig. (4.21)). Damit zeigt das alte Problem von TARTAGLIA aus dem Jahre 1537 unerwartete mathematische Schwierigkeiten, wenn man den Luftwiderstand berücksichtigen will. Wie schon bei der Reihe (4.55) von EULER aus dem Jahre 1745 erwähnt, lautet die korrekte asymptotische Entwicklung im Limes $\nu \rightarrow 0$

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{c}_1 \nu + \dots \quad (4.145)$$

in der die Zahl \mathbf{c}_1 nicht aus einer Polynomdarstellung, sondern nur mit einer speziellen Störungstheorie berechnet werden kann. Wir werden sehen, daß diese Zahl $\mathbf{c}_1 = (6 - \sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2}))/64$ sein muss (siehe 4.161).

Für unsere Untersuchungen ist es günstiger, die Fundamentalgleichung (4.46) anstatt mit (4.116) mit der alternativen dimensionslosen Skalierung

rungen

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi; \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta; \quad (4.146)$$

in die Form

$$\eta'''[\xi] = 2\nu \sqrt{1 + \eta'[\xi]^2} \eta''[\xi]. \quad (4.147)$$

zu transformieren. Die Anfangsbedingungen sind

$$\eta[0] = 0; \quad \eta'[0] = \tan[\Theta]; \quad \eta''[0] = -\sec[\Theta]^2, \quad (4.148)$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\nu = \frac{1}{\mu} \equiv \frac{k v_0^2}{g}. \quad (4.149)$$

Um die Gleichung im Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ zu lösen, machen wir den *Ansatz*

$$\eta[\xi] = \eta_0[\xi] + \nu \eta_1[\xi] + \nu^2 \eta_2[\xi] + \dots \quad (4.150)$$

und versuchen, die einzelnen Funktionen sukzessiv zu berechnen. Die Lösung ohne Luftwiderstand ($\nu = 0$) ist nämlich die Wurfparabel

$$\eta_0[\xi] = \tan[\Theta] \xi - \frac{1}{2} \sec[\Theta]^2 \xi^2. \quad (4.151)$$

Um die Funktion $\eta_1[\xi]$ zu bestimmen, wird der Ansatz (4.150) in die obige Differentialgleichung eingesetzt und bis zur ersten Ordnung in ν entwickelt. Für $\eta_1[\xi]$ ergibt sich auf diese Weise die Differentialgleichung

$$\eta_1'''[\xi] + 2 \sec[\Theta]^2 \sqrt{1 + (\tan[\Theta] - \xi \sec[\Theta]^2)^2} = 0, \quad (4.152)$$

welche mit der Anfangsbedingung $\eta_1[0] = \eta_1'[0] = \eta_1''[0] = 0$ gelöst werden muss. Striche bedeuten hier Ableitungen nach der Variablen ξ . Die Gleichung lässt sich exakt integrieren, doch die analytische Lösung füllt über eine Seite. Im Hinblick auf die EULER'sche Lösung ist es aber interessanter, die Korrekturen zur Wurfweite W , zur Gipfelhöhe H und zur Flugdauer T einer Kanonenkugel in erster oder auch zweiter Ordnung in ν zu kennen. Im ebenen Gelände muss zunächst für die Wurfweite

$$\eta_0[\xi_w] + \nu \eta_1[\xi_w] = 0 \quad (4.153)$$

gelten. Mit dem Ansatz

$$\xi_w = \sin[2\Theta] - c_{1w}[\Theta] \nu + \dots \quad (4.154)$$

folgt mit Hilfe von Computeralgebra zunächst der Ausdruck

$$c_{1w}[\Theta] = -\cot[\Theta] \eta_1[\sin[2\Theta]]. \quad (4.155)$$

Ausgerechnet ergibt sich

$$c_{1w}[\Theta] = \frac{1}{16} \left(9 \cos[\Theta] - 5 \cos[3\Theta] + 2 \cos[\Theta]^2 (3 - 5 \cos[2\Theta]) \cot[\Theta] \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right] \right] \right). \quad (4.156)$$

In physikalischen Koordinaten berechnet sich also die Wurfweite im ebenen Gelände zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left\{ \sin[2\Theta] - c_{1w}[\Theta] \frac{k v_0^2}{g} + O(k^2) \right\} \quad (4.157)$$

Im Gegensatz zur Polynomentwicklung (4.54) von EULER ist (4.157) *exakt* im Sinne der ersten Ordnung ν . Welcher Autor in der Geschichte zur ballistischen Kurve die exakte asymptotische Entwicklung (4.157) zum erstenmal mit der Winkelfunktion (4.156) aufgestellt hat, ist mir nicht bekannt. Im Lehrbuch von C. CRANZ ist sie zumindest nicht zu finden.

Nun bereitet es auch keine großen Schwierigkeiten, die *maximale* Wurfweite x_{wm} und den dafür *optimalen* Winkel Θ_m in erster Ordnung ν abzuschätzen. Mit (4.157) folgt die maximale Wurfweite W mit dem Ansatz

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} - c_{1\Theta} \cdot \nu + O(\nu^2) \quad (4.158)$$

zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left(1 - \frac{1}{16} (7\sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \right), \quad (4.159)$$

und

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{32} (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \quad (4.160)$$

Alternativ können wir auch für den extremalen Winkel

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64}(6 - \sqrt{2}\ln[1 + \sqrt{2}]) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \quad (4.161)$$

schreiben. Diese Relation kann nun direkt mit derjenigen von EULER (4.55) verglichen werden. Bei EULER steht als Vorfaktor von ν die Zahl $1/6$, doch nach der exakten Funktionalmethode muss der Vorfaktor

$$\frac{1}{64}(6 - \sqrt{2}\ln[1 + \sqrt{2}]) = \mathbf{0.07427421124\dots} \quad (4.162)$$

sein. Dies konnte auch durch numerische Simulationen bestätigt werden. Der wirkliche Zahlenfaktor beträgt also weniger als die Hälfte des Wertes von EULER aus dem Jahre 1745. Alternativ gilt natürlich auch

$$\boxed{\tan[\Theta_m] = 1 - \frac{1}{16}(3\sqrt{2} - \ln[1 + \sqrt{2}]) \frac{k v_0^2}{g} + \dots} \quad (4.163)$$

Die obigen Formeln sind natürlich nur für kleine Parameter ν brauchbar. Realistisch sind aber Werte von 1 bis 10. In diesem Fall gilt aber ein sehr genaues Skalierungsgesetz. Mit einem zunächst freien „Fitparameter“ α können wir nämlich für die Wurfweite sehr genau

$$W \sim \frac{v_0^2}{g} \left(1 + \frac{1}{16}(7\sqrt{2} + 3\ln[1 + \sqrt{2}]) \alpha \nu \right)^{-1/\alpha} \quad (4.164)$$

setzen, mit $\alpha \sim \mathbf{1.395}$. Numerisch gilt also für die maximale Schussweite bei nicht zu großen $\nu \equiv k v_0^2/g$ - Werten

$$\boxed{W \sim \frac{v_0^2}{g} \left(1 + 1.094 \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-0.717}} \quad (4.165)$$

Eine ähnliche Formel gilt auch für den optimalen Elevationswinkel Θ_m . Hier hat man sehr genau

$$\sin[\Theta_m] \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{32}(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) \alpha \nu \right)^{-1/\alpha}, \quad (4.166)$$

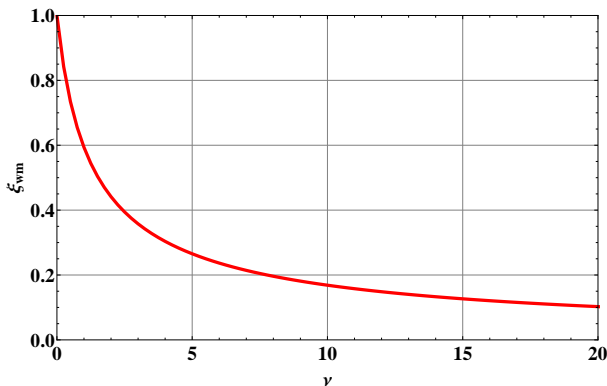


Fig. 4.22: Die maximale Wurfweite in Einheiten von v_0^2/g als Funktion des Parameters $\nu = k v_0^2/g$. Die durch numerische Integration gewonnenen Werte unterscheiden sich praktisch nicht von der semianalytischen Formel (4.165).

jetzt aber mit $\alpha \sim 8.481$. Numerisch gilt dann analog

$$\sin[\Theta_m] \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + 0.891 \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-0.118}, \quad (4.167)$$

Die beiden Formeln (4.165) und (4.167) lösen das entscheidende Problem der Artillerie des 18. und 19. Jahrhunderts: Ist der ballistische Koeffizient k einer Kanonenkugel bekannt, so liefert (4.165) bei bekannter Entfernung die *minimal notwendige* Geschwindigkeit v_0 oder die entsprechende *minimal notwendige Pulvermasse* m_P , um das entfernte Ziel zu erreichen¹². Hauptproblem war wohl einerseits die Rotation der Kanonenkugel (Magnuseffekt; gezogene Rohre gab es erst ab etwa 1860) und die *Qualität* des Pulvers - nicht immer lieferte gleiche Pulvermasse m_P auch gleiche Abschussgeschwindigkeiten v_0 (siehe [59]). War das $v_0(m_P)$ dann bekannt, könnte man mit (4.167) den erforderlichen Elevationswinkel Θ_m des Rohres berechnen. Im Prinzip entspricht dies dem Vorgehen

¹²Im 18. Jahrhundert wurde in etwa $v_0 \approx \sqrt{m_P} \log(a/b)$ gerechnet, wobei in a/b die Rohrlänge (Kaliber) einging. Siehe Struensee: Anfangsgründe der Artillerie, Seite 313, 1760 ([48])

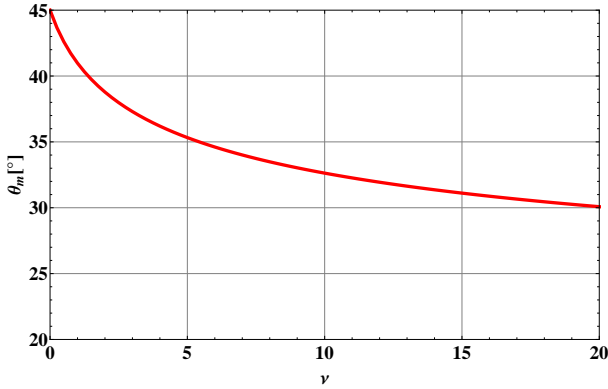


Fig. 4.23: Der optimale Abschusswinkel Θ_m für maximale Wurfweite als Funktion des Parameters $\nu = k v_0^2/g$. Die durch numerische Integration gewonnenen Werte unterscheiden sich praktisch nicht von der semianalytischen Formel (4.167).

von vorgefertigten Schusstafeln. Die Formeln (4.165) und (4.167) waren allerdings in dieser Form im 18. wie im 19. Jahrhundert nicht bekannt.

Doch zurück zur ballistischen Kurve. In ähnlicher Weise lässt sich auch die Gipfelhöhe und deren Position in der Bahn bis zur ersten Ordnung in ν berechnen. Mit dem Ansatz

$$\xi_H = \frac{1}{2} \sin[2\Theta] - c_{1H}[\Theta] \nu + \dots \quad (4.168)$$

folgt wiederum mit Hilfe von Computeralgebra zunächst der Ausdruck

$$c_{1H}[\Theta] = \cos^2[\Theta] \eta'_1 \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right]. \quad (4.169)$$

oder explizit

$$x_H = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin[2\Theta] - \frac{4}{3} \nu \cos[\Theta] (1 - \cos[\Theta])^3 + \dots \right\}. \quad (4.170)$$

Die eigentliche Gipfelhöhe $y_H \equiv H$ der Bahn (Vertex) ergibt sich rein formal zu

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin^2[\Theta] + 2\nu \eta_1 \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right] + O(\nu^2) \right\}. \quad (4.171)$$

Auch die in erster Ordnung ν korrigierte Flugzeit T kann durch die Funktion η_1 und ihre Ableitung ausgedrückt werden. Auf eine explizite Darstellung verzichten wir hier, bemerken aber noch, daß für beliebige Elevationswinkel $0 < \Theta < \pi/2$ zwischen der Gipfelhöhe und der Flugzeit die Relation

$$H = \frac{1}{8} g T^2 \{1 + O[\nu]^2\} \quad (4.172)$$

gilt. Denn der Zahlenfaktor proportional ν verschwindet gemäß

$$8 \eta_1 \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right] - 4 \eta_1 [\sin[2\Theta]] + \sin[2\Theta] \eta_1' [\sin[2\Theta]] = 0. \quad (4.173)$$

Den Korrekturfaktor proportional ν^2 könnte man analog durch eine wesentlich aufwendigere Rechnung ableiten.

Als kurz vor Ende des Ersten Weltkrieges von der Firma Krupp Geschütze mit überlangem Rohr gebaut wurden, um Reichweiten von über 100 km zu erlangen, stellte man – entgegen den Ergebnissen von TARTAGLIA und EULER – fest, dass der maximale Schusswinkel bei über 50 Grad lag. Bei Abgangsgeschwindigkeiten von über 1000 m/s war wohl die klassische ballistische Theorie nicht mehr ausreichend. Der Hauptgrund war schnell gefunden: Man hatte die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe gänzlich unterschätzt.

Um dieses Ergebnis zu verstehen, müssen wir in der Schlüsselgleichung (4.46) die Höhenabhängigkeit des ballistischen Koeffizienten berücksichtigen. Bei Annahme einer einfachen barometrischen Höhenformel mit der Skala H_S für den Dichteverlauf erhalten wir die erweiterte Modellgleichung

$$y'''[x] = 2 k e^{-y[x]/H_S} \sqrt{1 + y'[x]^2} y''[x], \quad (4.174)$$

die wieder mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = \tan[\Theta]; \quad y''(0) = -\frac{g}{v_0^2} \sec[\Theta]^2 \quad (4.175)$$

gelöst werden muss. Wir skalieren aber zunächst die Gleichung in der Form

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi; \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta \quad (4.176)$$

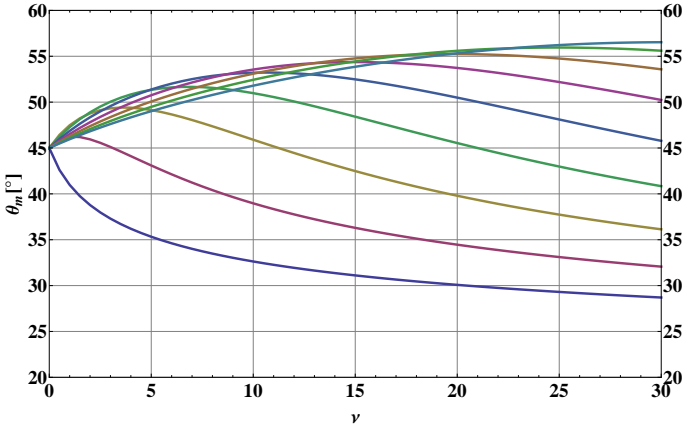


Fig. 4.24: Der extreme Elevationswinkel für maximale Wurfweite als Funktion der Parameter $\nu = k v_0^2/g$ und $\beta = v_0^2/(g H_S)$. Die untere Kurve entspricht $\beta = 0$ (konstante Luftdichte mit der Höhe). Die weiteren Kurven entsprechen dann $\beta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Deutlich ist zu sehen, daß der Winkel für maximale Schussweite in bestimmten Sonderfällen über 45 Grad liegen kann.

Mit dieser Skalierung lautet die Differentialgleichung der ballistischen Kurve

$$\eta'''[\xi] = 2\nu e^{-\beta \eta[\xi]} \sqrt{1 + \eta'[\xi]^2} \eta''[\xi], \quad (4.177)$$

mit den vereinfachten Anfangsbedingungen

$$\eta(0) = 0; \quad \eta'(0) = \tan[\Theta]; \quad \eta''(0) = -\sec[\Theta]^2. \quad (4.178)$$

Die beiden entscheidenden Parameter des Problems sind jetzt

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g}; \quad \beta = \frac{v_0^2}{g H_S}. \quad (4.179)$$

Während ν wieder den am Boden gültigen ballistischen Parameter darstellt, bestimmt der neue dimensionslose Parameter β den Einfluss der mit der Höhe η stark abnehmenden Luftdichte. In der Abbildung (4.24) sind für den Parameter β von $\beta = 0$ bis $\beta = 40$ in Schritten von 5 die verwickelten Zusammenhänge für den extremalen Abschusswinkel Θ_m

als Funktion von ν dargestellt. Die Werte können nur durch eine *numerische Integration* der obigen Differentialgleichung gewonnen werden. Der funktionelle Zusammenhang für $\beta = 0$ gleicht natürlich der schon früher berechneten Funktion in Figur (4.23).

4.9 Asymptotische Zeitreihen

Bei Reihenentwicklungen nach der Zeit kann man entweder an analytische Approximationen für kleine Zeiten $t \rightarrow 0$ nach dem Abwurf oder an „globale“ asymptotische Entwicklungen für $t \rightarrow \infty$ denken. Die erste Art dieser Entwicklung ist sicherlich eng an die *Störungstheorie* für kleine $\nu \equiv k v_0^2/g$ gebunden. Zur besseren Veranschaulichung werden wir zunächst einen Spezialfall der ballistischen Kurve exakt lösen, nämlich für den Elevationswinkel $\Theta = -\pi/2$.

Im Falle $\Theta = -\pi/2$ wird eine Kanonenkugel „senkrecht“ nach unten abgeschossen. Die entsprechende Differentialgleichung für die Geschwindigkeitskomponente $v[t] \equiv y'[t]$ lautet dann

$$v'[t] - k v[t]^2 + g = 0 \quad (4.180)$$

mit der Anfangsbedingung $v[0] = -v_0$ (negatives Vorzeichen, weil nach „unten“ geschossen wird). Die Gleichung lässt sich exakt integrieren und man erhält

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \tanh \left[\sqrt{k g} t + \operatorname{atanh} \left[\sqrt{\frac{k}{g}} v_0 \right] \right]. \quad (4.181)$$

Anhand dieser Lösung sieht man sofort, dass im Falle $t \rightarrow \infty$ die Grenzgeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ erreicht wird. Zweckmäßig ist die obige Lösung nur für $v_0 < \sqrt{g/k}$, in welchem Falle die Funktion $\operatorname{atanh}[z]$ reelle Werte liefert. Für den allgemeinen Fall ist es günstiger, die Formel durch eine Transformation in die Gestalt

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \frac{v_0 \cosh[\sqrt{k g} t] + \sqrt{\frac{g}{k}} \sinh[\sqrt{k g} t]}{v_0 \sinh[\sqrt{k g} t] + \sqrt{\frac{g}{k}} \cosh[\sqrt{k g} t]} \quad (4.182)$$

zu bringen. Diese Formel kann leichter für alle Geschwindigkeitsverhältnisse ausgewertet werden.

Für kleine Zeiten t kann man die obige Formel in eine Taylorreihe nach k entwickeln. Dies entspricht einer „Störungstheorie“ nach dem Parameter k . Man erhält sofort

$$v[t] = -v_0 - g t + k \left(v_0^2 t + v_0 g t^2 + \frac{1}{3} g t^3 \right) + \dots \quad (4.183)$$

Diese Entwicklung beschreibt sehr schön, wie die Fallbewegung durch den Luftwiderstand in den ersten „Sekunden“ modifiziert oder abgebremst wird. Sie zeigt aber auch, dass im Falle $k v_0^2 = g$, bei der eine gleichförmige Fallbewegung mit der Geschwindigkeit v_0 einsetzt, diese nur „in erster Näherung“ für kleine Zeiten beschrieben wird.

Diesen Nachteil sollte eine *asymptotische Entwicklung* für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ nicht aufweisen. Eine asymptotische Formel ergibt sich sofort aus (4.182) in der Form

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 + 2 \frac{\sqrt{\nu} - 1}{(\sqrt{\nu} + 1) e^{2\sqrt{kgt}} - (\sqrt{\nu} - 1)} \right) \quad (4.184)$$

oder entwickelt

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\nu} - 1}{\sqrt{\nu} + 1} \right)^n e^{-2n\sqrt{kgt}} \right). \quad (4.185)$$

Bemerkenswert ist aber hier, dass diese Funktionsreihe für *alle Zeiten* t gültig und konvergent ist. Durch Integration erhält man die Weg-Zeitfunktionsreihe

$$y[t] = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\nu}} \right) - \sqrt{\frac{g}{k}} t + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\nu} - 1}{\sqrt{\nu} + 1} \right)^n \frac{e^{-2n\sqrt{kgt}}}{n} \quad (4.186)$$

für einen Senkrechtschuß **nach unten**.

Diese Ergebnisse legen es nahe, auch für die allgemeine ballistische Bewegung eine Reihenentwicklung nach der Zeitfunktion $e^{-\sqrt{kgt}}$ zu versuchen. Dazu führen wir also anstatt der Realzeit t eine Pseudozeit - Variable ζ gemäß der Gleichung

$$\zeta = e^{-\sqrt{kgt}} \equiv e^{-\tau} \quad (4.187)$$

ein. $\zeta = 1$ bedeutet dann den Startpunkt, $\zeta = 0$ den unendlich fernen Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$. Außerdem gilt

$$-\sqrt{bg} dt = \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (4.188)$$

Die gekoppelten Bewegungsgleichungen des Geschwindigkeitsvektors lauten dann

$$\zeta \frac{dv_x}{d\zeta} - \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x = 0, \quad (4.189)$$

$$\zeta \frac{dv_y}{d\zeta} - \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y - \sqrt{\frac{g}{k}} = 0. \quad (4.190)$$

da die asymptotische Geschwindigkeit der ballistischen Flugbahn $\sqrt{g/k}$ ist, erhält man mit der Skalierung

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\xi; \quad v_y = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\eta, \quad (4.191)$$

die dimensionslosen gekoppelten Gleichungen

$$\zeta \frac{dv_\xi}{d\zeta} - \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2} v_\xi = 0, \quad (4.192)$$

$$\zeta \frac{dv_\eta}{d\zeta} - \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2} v_\eta - 1 = 0. \quad (4.193)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen nach ζ kann man in der asymptotischen Form

$$v_\xi = A \zeta + \frac{1}{8} A [A^2 - 8B + 2A^2 \ln(\zeta)] \zeta^3 + \frac{1}{256} A [3A^4 - 16A^2 B + 256k^2 + 4(A^4 - 32A^2 B) \ln(\zeta) + 16A^4 \ln(\zeta)^2] \zeta^5 + \dots \quad (4.194)$$

und

$$v_\eta = -1 + 2 \left[B - \frac{1}{2} A^2 \ln(\zeta) \right] \zeta^2 - 2 \left[B - \frac{1}{4} A^2 \ln(\zeta) \right]^2 \zeta^4 + \left[2 \left(B - \frac{1}{4} A^2 \ln(\zeta) \right)^3 - \frac{1}{512} A^4 (A^2 - 24B + 6A^2 \ln(\zeta)) \right] \zeta^6 - \dots \quad (4.195)$$

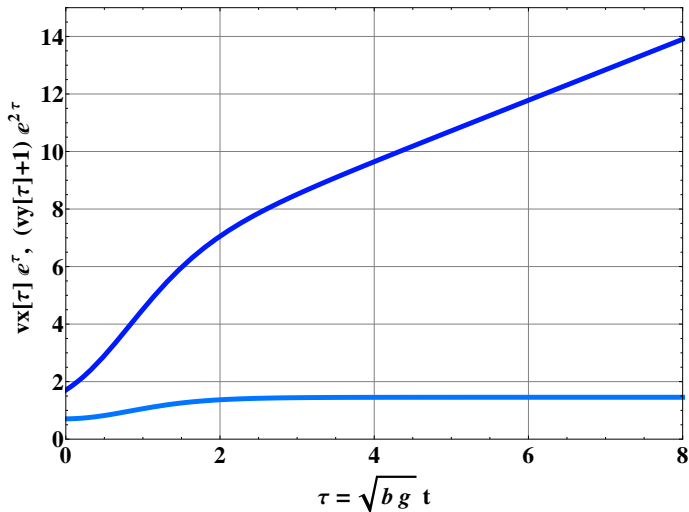


Fig. 4.25: Das asymptotische Verhalten des Geschwindigkeitsvektors bei einer ballistischen Kurve im Falle $\nu = 1$ und $\Theta = 35^\circ$, normiert auf die Grenzgeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$. Die untere horizontale hellblaue Gerade zeigt, dass sehr nahe $v_x[t]$ sich wie $\exp(-\sqrt{k}gt)$ verhält, während die obere dunkelblaue Gerade die Proportionalität $v_y[t] + \sqrt{g/k} \propto +t \exp(-2\sqrt{k}gt)$ aufweist. Diese Entdeckung war für den Autor Grund genug, eine asymptotische Theorie der ballistischen Kurve nach den Potenzen der Zeitfunktionen $\exp(-\sqrt{k}gt)$ zu entwickeln.

schreiben. Die Größen A und k sind zwei *asymptotische* Integrationskonstanten der gekoppelten Differentialgleichungen (4.192) und (4.193). Sie hängen mit dem Hodographen der ballistischen Kurve (4.102) durch die bemerkenswerte Beziehung

$$\mathbf{C}_H = -\frac{1}{2} + \frac{4B}{A^2} + \ln\left(\frac{A}{2}\right) \quad (4.196)$$

zusammen. Der Wert der Konstanten \mathbf{C}_H wird ja bekanntlich durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Wegen $\zeta = e^{-\tau}$ lassen sich aus den Reihenentwicklungen sofort folgende asymptotische Beziehungen ableiten

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau v_\xi = A, \quad (4.197)$$

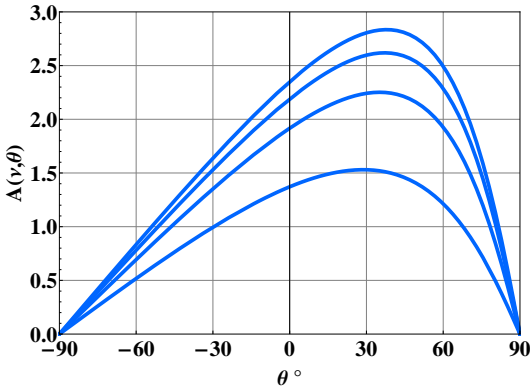


Fig. 4.26: Der asymptotische Koeffizient $A(\nu, \Theta)$ als Funktion des Elevationswinkels Θ für die Parameterwerte $\nu = 1, 4, 9, 16$. Werte durch numerische Integration des Pfadintegrals abgeleitet.

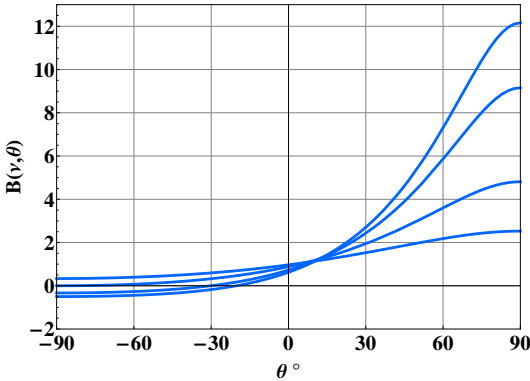


Fig. 4.27: Der asymptotische Koeffizient $B(\nu, \Theta)$ als Funktion des Elevationswinkels Θ für die Parameterwerte $\nu = 1/4, 1, 4, 9$. Werte auch hier durch numerische Integration abgeleitet.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{2\tau} (v_\eta(\tau) + 1) = 2B + \frac{1}{2} A^2 \tau. \quad (4.198)$$

Die Gültigkeit dieser Relationen konnte durch numerische Integration sehr schön bestätigt werden (siehe Fig. 4.25). Die Darstellung der Konstanten A und k bereitet aber für den allgemeinen Fall Schwierigkeiten. Im

Spezialfall $\Theta = -\pi/2$ ergibt sich aber wie oben

$$B = \frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}}; \quad A = 0. \quad \{\Theta = -\pi/2\} \quad (4.199)$$

Wir bemerken noch, daß

$$\frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}} = e^{-2 \operatorname{atanh}(\sqrt{\nu})} \quad (4.200)$$

gilt. Diese Relation wird dann interessant, wenn wir den asymptotischen Fall für den Senkrechtschuß $\Theta = +\pi/2$ betrachten. In diesem Fall setzt sich der Zeitablauf aus der Aufstiegszeit T_1 und der dann folgenden Zeit im freien Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit Null zusammen. Wir werden später noch zeigen, daß für die Aufstiegszeit zum Gipfelpunkt die Formel

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan(\sqrt{\nu}) \quad (4.201)$$

gilt (siehe (4.209)). Wir benutzen nun die Formel (4.185), setzen in ihr $\nu = 0$, machen dann aber die Zeittransformation $t \rightarrow t - T_1$. In der asymptotischen Formel ergeben sich dann für die Konstanten A und k im Spezialfall des Senkrechtsschusses zu

$$B = e^{2 \arctan(\sqrt{\nu})}; \quad A = 0. \quad \{\Theta = +\pi/2\} \quad (4.202)$$

Dabei gilt mit der imaginären Einheit $i^2 = -1$ die bemerkenswerte mathematische Identität

$$\left(\frac{1 - i\sqrt{\nu}}{1 + i\sqrt{\nu}} \right)^i = e^{2 \arctan(\sqrt{\nu})}. \quad (4.203)$$

Dieser Ausdruck für den Parameter k gilt nur asymptotisch in der Zeit, also nur für $t > T_1$.

Für beliebige Zwischenwinkel Θ ist es möglich, eine Darstellung durch ein *Pfadintegral im Geschwindigkeitsraum* zu gewinnen. Dazu erinnern wir uns an die exakte Formel (4.17) und vergleichen sie mit (4.197). Dann muss gelten

$$A(\nu, \Theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\nu} \cos[\Theta] \exp\left(\sqrt{kgt} - ks[t]\right) \quad (4.204)$$

oder

$$A(\nu, \Theta) = \sqrt{\nu} \cos[\Theta] \exp \left(\int_0^\infty (1 - |\mathbf{v}(\tau)|) d\tau \right). \quad (4.205)$$

Der Parameter $B(\nu, \Theta)$ kann dann mit dem Hodographen ebenfalls als *Pfadintegral* dargestellt werden. In den Figuren (4.26) und (4.27) sind diese asymptotischen Parameter als Funktion des Elevationswinkels für einige Werte von ν bildlich dargestellt.

4.10 Der senkrechte Schuss

Die Theorie des Senkrechtsschusses hat schon L. EULER in seinem Werk über Artillerie von 1745 behandelt. Die Kanonenkugel wird dabei senkrecht – wie eine Rakete – entlang des gravitativen Lotes in die Luft abgeschossen. Das Ganze geschieht natürlich nur aus wissenschaftlichem Interesse. Für diesen Fall vereinfachen sich die Differentialgleichungen erheblich und man kann mit den elementaren analytischen Funktionen die raum - zeitliche Bewegung exakt integrieren. JOHANN BERNOULLI hat offensichtlich solche *ballistischen* Experimente in Petersburg um 1735 durchgeführt und beobachtet, daß seine Kanonenkugel nach $T = 34$ Sekunden dicht am Abschussort wieder aufschlug. Macht man diesen Senkrechtschuß heute mit einem G3 Sturmgewehr, so schlägt die Patrone nach etwa $T = 47$ Sekunden wieder auf¹³.

Die Bewegungsgleichungen müssen nun in zwei Abschnitte aufgeteilt werden: Den *aufsteigenden* Ast und den *absteigenden* Ast. Die beiden unterschiedlichen Differentialgleichungen lauten jetzt

$$\dot{v} = -k v^2 - g \quad \text{aufsteigender Ast} \quad (4.206)$$

$$\dot{v} = +k v^2 - g \quad \text{absteigender Ast} \quad (4.207)$$

Im ersten Fall wirken Luftreibung und Schwerebeschleunigung in die gleiche Richtung, im zweiten Fall in entgegengesetzte Richtungen.

¹³Die zurückkommende Patrone in einem solchen Senkrechtschuß hat dabei eine Geschwindigkeit von etwa 150m/s.

Aufsteigender Ast: Mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ lautet die Lösung der Gleichung (4.206)

$$v[t] = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] - \sqrt{gk} t \right] \quad (4.208)$$

Die Zeitdauer T_1 bis zum Gipfelpunkt ist dann durch $v(T_1) \equiv 0$ oder

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] \quad (4.209)$$

gegeben. Für die Höhe $h[t]$ folgt dann unmittelbar durch Integration und $h(0) = 0$

$$h[t] = \frac{1}{k} \ln \left[\frac{\cos \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] - \sqrt{gk} t \right]}{\cos \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] \right]} \right] \quad (4.210)$$

Die Höhe $H \equiv h(T_1)$ des Gipfelpunktes ergibt sich zu

$$H = -\frac{1}{k} \ln \left[\cos \left[\sqrt{gk} T_1 \right] \right] \quad (4.211)$$

oder durch Umkehrung die wichtige Beziehung

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arccos \left[e^{-kH} \right].} \quad (4.212)$$

Setzt man andererseits in (4.211) für T_1 die Formel (4.209) ein, so folgt wiederum mit $\mu = g/(k v_0^2)$ die *exakte* Formel für die Gipfelhöhe

$$H = \frac{1}{2k} \ln \left[1 + \frac{k v_0^2}{g} \right]. \quad (4.213)$$

Eine ganz andere Formel gilt jetzt aber für den Rückfall auf die Erdoberfläche.

Absteigender Ast: Definiert man die nach „unten“ gerichtete Geschwindigkeit negativ, so ergibt eine erste Integration von (4.207) mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ die Lösung

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \tanh \left[\sqrt{gk} t \right] \quad (4.214)$$

Eine weitere Integration ergibt mit der Anfangsbedingung $h(0) = H$ die Fallhöhe als Funktion der Zeit zu

$$h[t] = H - \frac{1}{k} \ln \left[\cosh \left[\sqrt{gk} t \right] \right]. \quad (4.215)$$

Nach der Fallzeit T_2 schlägt die Kanonenkugel wieder auf dem Boden auf, wobei gilt

$$H = \frac{1}{k} \ln \left[\cosh \left[\sqrt{gk} T_2 \right] \right] \quad (4.216)$$

oder durch Umkehrung

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arccosh} \left[e^{kH} \right]. \quad (4.217)$$

Die Formeln für T_1 und T_2 hängen durch die Transformation $b \rightarrow -b$ miteinander zusammen. Dies kann man auch aus den entsprechenden Differentialgleichungen sehen. Es hätte also eigentlich genügt, nur den aufsteigenden Ast zu betrachten. Dies hat auch schon L. EULER 1745 gesehen und ausgenutzt.

Die gesamte Flugzeit $T = T_1 + T_2$ beträgt somit

$$T = \frac{1}{\sqrt{gk}} \left(\arccos \left[e^{-kH} \right] + \operatorname{arccosh} \left[e^{kH} \right] \right). \quad (4.218)$$

Bei ballistischen Versuchen zu Beginn des 18. Jahrhunderts konnte man diese Flugzeit eines Senkrechtsschusses recht genau messen, im Gegensatz zur Gipfelhöhe der Kugel. So nahm der erst 20jährige L. EULER an Versuchen teil, die 1727 in Sankt Petersburg unter Leitung von General GUNTHER und dem damals 27jährigen D. BERNOULLI durchgeführt wurden. Ergebnisse dieser Versuche veröffentlichte D. BERNOULLI dann

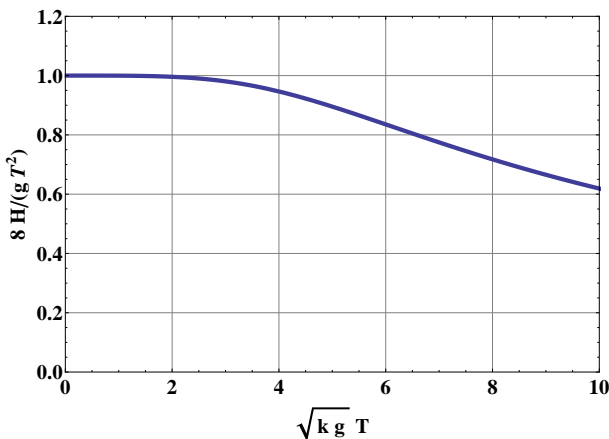


Fig. 4.28: Die erreichte Gipfelhöhe H und die Flugzeit T beim Senkrechtschuß erfüllt trotz des Luftwiderstands sehr gut die klassische Beziehung $H = gT^2/8$. Berechnet wurde der Kurvenverlauf mit der Formel (4.218).

in seiner *Hydrodynamica* 1748. Die damalige Flugzeit der verwendeten kleinen Kanonenkugeln war etwa $T \sim 34$ Sekunden. Es liegt daher der Gedanke nahe, die obige Beziehung nach der Größe H umzukehren. Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man mit der dimensionslosen Zahl

$$\lambda = \frac{1}{8} k g T^2$$

die interessante Reihe

$$H = \frac{1}{8} g T^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\lambda^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \frac{67 \lambda^6}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13} + \frac{1567 \lambda^8}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 17} - \dots \right) \quad (4.219)$$

die in ähnlicher Form zum erstenmal L. EULER 1745 für ein modifiziertes Widerstandsgesetz aufgeschrieben hat. Wie man sieht, gilt trotz Luftwiderstand recht genau zwischen der Gipfelhöhe und der Flugzeit die aus der parabolischen Theorie bekannte Beziehung $8H = gT^2$. Alle diese

Dinge waren auch in den *preußischen Artillerieschulen* gegen Ende des 19. Jahrhunderts bekannt: So schreibt W. HEYDENREICH in seinem Buch von 1898 in Abteilung II, Seite 76 ([22]):

Bemerkenswert ist, daß die Formel $H = gT^2/8$ auch mit großer Annäherung für die Flugbahn im luftgefüllten Raum gilt, so daß man nach Einführung des Zahlenwertes von $g = 9.81$, sobald die Flugzeit T (in Sekunden) gemessen ist, man in $H = 1.2T^2$ die annähernde Steighöhe des Geschosses erhält.

Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, nehmen wir für die Patrone eines G3 - Gewehres bei einem Senkrechtschuß eine Flugzeit von $T_F = 47[s]$ an. Mit $g = 9.81 [m/s^2]$ ergibt sich so zunächst nach (4.219) für die Steighöhe *ohne Korrekturterm*

$$H \approx 2709 \text{ m} \quad (4.220)$$

Um die Korrektur durch den Luftwiderstand zu berechnen, muss die inverse Länge k abgeschätzt werden. Für sie gilt nach (4.48) die Formel

$$k \approx c_w(\mathcal{M}) \frac{\pi D^2 \varrho_{Luft}}{8 m_{Pat}}, \quad (4.221)$$

Mit $c_w \approx 0.15$, $D = 0.00762 [m]$, $\varrho_{Luft} = 1.21 [kg/m^3]$ und $m_{Pat} = 0.0106 [kg]$ ergibt sich so

$$k = 3.90 \cdot 10^{-4} [m^{-1}], \quad \sqrt{g/k} = 158 [m/s]. \quad (4.222)$$

Damit folgt $\lambda \approx 1$ und mit Korrekturterm nach (4.219) für die korrigierte Steighöhe

$$H \approx 2651 \text{ m} \quad (4.223)$$

Die erreichte Gipfelhöhe wird also gegenüber (4.220) um **58m** nach unten korrigiert. Durch Radarmessungen wird diese Höhe auch bestätigt, obwohl die Patrone sich etwa 2 Sekunden im *supersonischen Bereich* aufhält. Der Unterschied zur klassischen parabolischen Theorie bezüglich Steighöhe und Flugzeit ist also tatsächlich gering. Zum Abschluss sollen noch zwei Formeln für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Aufprallgeschwindigkeit v_f angegeben werden. Sie folgen leicht aus den obigen

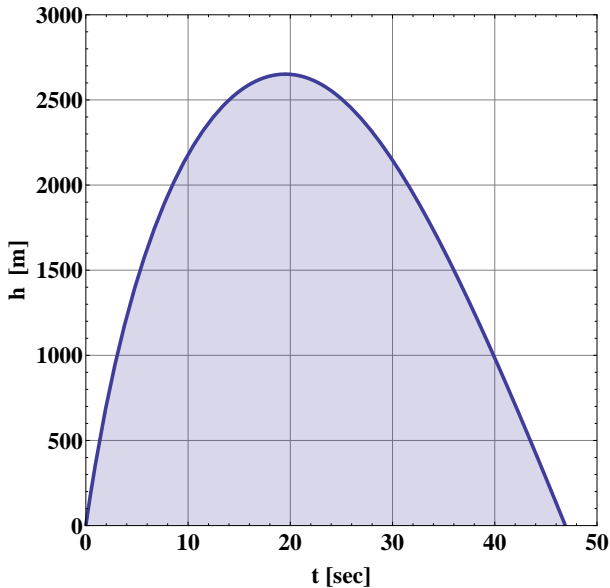


Fig. 4.29: Die erreichte Höhe einer 7.62 mm Patrone beim Senkrechtschuß eines G3 Gewehres als Funktion der Zeit. Nach etwa 19.5 sec wird die Gipfelhöhe von etwa 2600 Metern erreicht. Dieser Punkt stellt eine Art Singularität dar, da die Formeln für das Weg - Zeit Gesetz vor und nach dem Gipfelpunkt unterschiedlich sind.

Gleichungen und lauten

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{e^{2kH} - 1} \\
 v_f &= \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-2kH}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.224}$$

Mit den obigen Daten ergibt sich $kH \approx 1.04$ und so

$$v_0 \approx 417 \text{ m/s}, \quad v_f \approx 148 \text{ m/s}.
 \tag{4.225}$$

Die wahre Abschussgeschwindigkeit dürfte aber wesentlich höher sein, denn sie liegt im *supersonischen* Bereich, wo der c_w Wert mindestens dreimal höher ist wie im *subsonischen* Bereich. Man kann von **700m/s**

und mehr ausgehen. Siehe auch Figur (4.29). Auch hier erkennt man eine gewisse „Symmetriebrechung“ zwischen dem aufsteigenden und dem absteigenden Ast.

Bevor wir im nächsten Kapitel den freien Fall aus großer Höhe genauer betrachten, können wir zunächst die Formel (4.219) für die Flugzeit und die Gipfelhöhe eines Senkrechtsschusses unter Berücksichtigung der abnehmenden Luftdichte mit der Höhe präzisieren. Wir betrachten hierzu die gegenüber (4.207) erweiterte Bewegungsgleichung für den freien Fall aus großer Höhe

$$\dot{v} = +k \exp[-\beta y] v^2 - g \quad \text{Absteigen} \quad (4.226)$$

Der Parameter $\beta = 1/H_K$ beschreibt die inverse *Skalenhöhe* der Dichteabnahme der Atmosphäre mit der Höhe y .

Dazu lösen wir mit einer Potenzreihe nach der Zeit die Gleichung (4.230) mit einer angenommenen Abschussgeschwindigkeit v_0 , leiten aus dem Verschwinden der Geschwindigkeit am Gipfelpunkt eine Bedingung zwischen Aufstiegszeit T_1 und Abschussgeschwindigkeit v_0 her, lösen diese Beziehung durch eine Reihe nach $v_0(T_1)$ auf und setzen diese in die $H(v_0, T_1)$ Reihe ein. Durch eine weitere Umkehrung erhalten wir so eine verallgemeinerte Beziehung $T_1(H)$ zwischen der Aufstiegszeit T_1 und der Gipfelhöhe H unter Einbeziehung einer abnehmenden Luftdichte. Durch die Transformation $b \rightarrow -b$ wird dann auch $T_2(H)$ bekannt. Mit $T = T_1 + T_2$ ergibt sich so durch Umkehrung für die Gipfelhöhe $H[t]$ die Reihe

$$H = \frac{1}{8} g T^2 - \frac{k^2 g^3}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5} T^6 + \frac{k^2 g^4 \beta}{2^{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} T^8 + \frac{k^2 g^5 (42 k^2 - 55 \beta^2)}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} T^{10} - \dots \quad (4.227)$$

Die erste Korrektur der Formel (4.219) durch die barometrische Skalenhöhe lautet also

$$\Delta H[t] = \frac{k^2 g^4 \beta}{430080} T^8 - \dots \quad (4.228)$$

Für den Senkrechtschuß eines G3 Gewehres erhält man mit den Daten des vorhergehenden Abschnittes die kleine Korrektur

$$\Delta H \approx 10 \text{ m} \quad (4.229)$$

Bei einer Gipfelhöhe von über 2500m kann diese kleine Höhenkorrektur nach oben sicherlich vernachlässigt werden.

4.11 Senkrechter Schuss in große Höhen

Im vorherigen Kapitel wurde die Bewegung beim senkrechten Schuss unter der Voraussetzung *konstanter Luftdichte* betrachtet. Dies ist bei einer Gipfelhöhe von maximal 2000 Metern noch eine gute Näherung, wird aber bei sehr großen Höhen mehr und mehr unrealistisch. In etwa 5500 Metern Höhe hat sich die Luftdichte im Mittel schon halbiert. Dieser Effekt darf also nicht mehr vernachlässigt werden. So konnte im Zweiten Weltkrieg die **8.8cm - FlaK41** Flugabwehrkanone bei einer Mündungsgeschwindigkeit von $v_0 = 820 - 1000\text{m/s}$ eine maximale Schusshöhe von etwa $H = 10400\text{m}$ erreichen. Wichtig war hier die Berechnung der Flugzeit für eine gemessene Höhe, um daraus den Vorhalt der Kanone und die Einstellung des Zeitzünders abzuleiten.

Die gegenüber (4.206) und (4.207) erweiterten Gleichungen einer senkrechten Aufwärts - oder Abwärtsbewegung mit abnehmenden Luftdichte lauten für eine isotherme Standardatmosphäre ($v = dy/dt$)

$$\dot{v} = -k \exp[-y/H_S] v^2 - g \quad (\text{Aufsteigen}) \quad (4.230)$$

$$\dot{v} = +k \exp[-y/H_S] v^2 - g \quad (\text{Absteigen}) \quad (4.231)$$

Beim Aufstieg ist hier v positiv, beim Abstieg ist v negativ. Der ballistische Koeffizient k hängt normalerweise von der *Machzahl* und der *Reynoldszahl* ab. Im folgenden werden wir ihn als Konstante ansehen, was im *hypersonischen Bereich* keine schlechte Annahme ist. Die Luftdichte folgt in unserem Modell einer einfachen *isothermen barometrischen Höhenformel nach Laplace* mit der Skalenhöhe H_S . Ein typischer Wert für die Skalenhöhe der Erdatmosphäre ist $H_S \approx 8000[m]$. Die Gravitationsbeschleunigung g soll in unserem idealisierten Modell konstant sein. Wendet man die Transformation

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} \equiv v(y) \frac{dv}{dy} \quad (4.232)$$

an, so lautet die Gleichung für die Aufstiegsgeschwindigkeit beim idealisierten Senkrechtschuß als Funktion der Höhe

$$v(y) \frac{dv}{dy} + k \exp[-y/H_S] v(y)^2 + g = 0. \quad (4.233)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ lautet

$$v(y) = v_0 \exp \left[k H_S (e^{-y/H_S} - 1) \right] \times \sqrt{1 - 2 \frac{g H_S}{v_0^2} e^{2k H_S} (\mathbf{Ei}[-2k H_S] - \mathbf{Ei}[-2k H_S e^{-y/H_S}])} \quad (4.234)$$

Die Funktion $\mathbf{Ei}[x]$ ist durch den *Cauchy - Hauptwert* des Integrals

$$\mathbf{Ei}[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (4.235)$$

definiert. Die so gewonnene Formel ist physikalisch interessant, weil sie in zwei Faktoren zerfällt. Der erste Faktor ist rein aerodynamischer Natur, der zweite Ausdruck ist gemischt aerodynamisch - gravitativer Natur. Mit Hilfe des aerodynamischen Faktors kann man leicht eine *untere Grenze* für die Flugzeit T_F bis zur Höhe H berechnen. Die allgemeine Reihe lautet bis zur dritten Ordnung in H

$$T_F = \frac{H}{v_0} + \frac{g + k v_0^2}{2 v_0^3} H^2 + \frac{3 g^2 H_S + 4 k g H_S v_0^2 + k (k H_S - 1) v_0^4}{6 H_S v_0^5} H^3 + \dots \quad (4.236)$$

Hier sieht man die Zusammensetzung der beiden Effekte recht einfach. Der kubische Korrektionssterm H^3 wird im Fall $k H_S \sim 1$ relativ klein.

4.12 Der freie Fall aus großer Höhe

Während allgemeine Situationen nur noch numerisch gerechnet werden können, lässt sich der Spezialfall des senkrechten *freien Falles aus großer Höhe* (z.B. *Stratosphäre*) ebenfalls relativ einfach analytisch berechnen. Zwei Fragen sind hier besonders interessant:

- a). In welcher Höhe erreicht der fallende Körper maximale Geschwindigkeit?
- b.) In welcher Höhe ist die Abbremsung durch die Luft maximal?

Diese Fragen sollen hier kurz diskutiert werden.

Für den freien Fall aus **sehr großer Höhe**¹⁴ senkrecht zum Boden ist jetzt die Gleichung (4.231) relevant. Wendet man wieder die obige Transformation der abhängigen Variablen an, so lautet die Bewegungsgleichung für den freien Fall

$$v(y) \frac{dv}{dy} - k \exp(-y/H_S) v(y)^2 + g = 0. \quad (4.237)$$

Hier wird die Fallgeschwindigkeit nicht mehr als Funktion der Zeit, sondern als Funktion der Höhe y aufgefasst. Diese Hauptgleichung läßt sich wieder exakt lösen und führt mit der Anfangsbedingung $v(H) = -v_0$ zu der Darstellung

$$\begin{aligned} v(y)^2 = v_0^2 \exp \left[2k H_S (e^{-H/H_S} - e^{-y/H_S}) \right] \\ + 2g H_S \exp \left[-2k H_S e^{-y/H_S} \right] \times \\ \left(\mathbf{Ei} \left[-2k H_S e^{-\frac{y}{H_S}} \right] - \mathbf{Ei} \left[-2k H_S e^{-\frac{H}{H_S}} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.238)$$

Der erste Summand entspricht wieder einer rein aerodynamischen Abbremsung. Dieser Teil beschreibt zum Beispiel das senkrechte Eintauchen eines Meteors (Boliden) in die Erdatmosphäre, bei der die Gravitation nur eine sekundäre Rolle spielt. Im nächsten Kapitel wird dies näher untersucht. Wir setzen hier also $v_0 = 0$ und erhalten vereinfacht

$$\begin{aligned} v(y) = -\sqrt{2g H_S} \exp \left[-k H_S e^{-y/H_S} \right] \times \\ \sqrt{\mathbf{Ei} \left[-2k H_S e^{-\frac{y}{H_S}} \right] - \mathbf{Ei} \left[-2k H_S e^{-\frac{H}{H_S}} \right]} \end{aligned} \quad (4.239)$$

Mit der so gewonnenen Formel lassen sich die zwei zu Beginn gestellten Fragen vollständig beantworten.

Maximale Fallgeschwindigkeit: Die maximale Geschwindigkeit wird zu dem Zeitpunkt erreicht, wenn die effektive Beschleunigung \dot{v} null wird. Dies führt mit (4.231) zu der Bedingung

$$k \exp \left(-\frac{y_m}{H_S} \right) v(y_m)^2 = g \quad (4.240)$$

¹⁴Angeregt wurde diese Untersuchung durch das Projekt *RED BULL STRATOS* vom 14.10.2012

Mit Hilfe der bekannten Geschwindigkeit (4.239) als Funktion der Höhe ergibt eine eine erste Abschätzung für die kritische Höhe

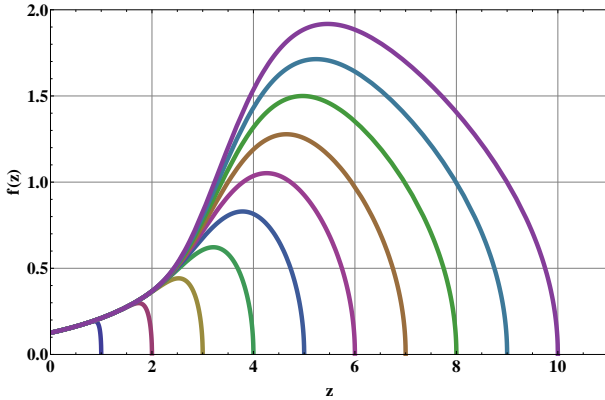


Fig. 4.30: Der Verlauf der Fallgeschwindigkeit in Einheiten von $\sqrt{2gH_S}$ als Funktion der Höhe $z = H/H_S$ für 10 anfängliche Fallhöhen H in Einheiten von H_S . Die Kennzahl $\alpha = 2kH_S$ hat hier den Wert 64.

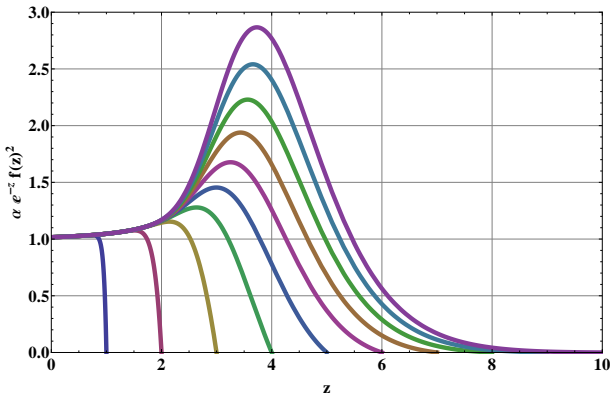


Fig. 4.31: Der Verlauf der Bremsbeschleunigung in Einheiten von g als Funktion der Höhe $z = H/H_S$ für 10 anfängliche Fallhöhen H_0 in Einheiten von H_S . Die Kennzahl $\alpha = 2kH_S$ hat hier wieder den Wert 64.

$$y_m \approx H - H_S \mathbf{W}_0 \left(\frac{e^{H/H_S}}{2 k H_S} \right) \quad (4.241)$$

und als obere Grenze für die maximale Fallgeschwindigkeit

$$v_{max} \approx \sqrt{2 g H_S \mathbf{W}_0 \left(\frac{e^{H/H_S}}{2 k H_S} \right)} \quad (4.242)$$

$\mathbf{W}_0[z]$ bezeichnet wieder die Lambertsche W - Funktion im oberen Zweig. Ob diese Geschwindigkeit oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt, hängt von der lokalen Temperatur in der entsprechenden Höhe ab.

Höhe maximaler Abbremsung: Wenn der fallende Körper die Maximalgeschwindigkeit erreicht hat, wird er durch den Luftwiderstand genau mit der Erdbeschleunigung g abgebremst. Doch dies ist nicht der Punkt maximaler Abbremsung. Erst etwas tiefer in der immer dichter werdenden Atmosphäre erfährt der Körper maximale Abbremsung. Man erhält das überraschende Resultat, dass im Grenzfall sehr großer Fallhöhen dieser Punkt maximaler Abbremsung durch die asymptotische Formel

$$y_a = H_S \ln(2 k H_S) - \frac{\exp(1)}{\mathbf{Ei}(1) - \mathbf{Ei}(2 k H_S e^{-H/H_S})} + \dots \quad \{H \rightarrow \infty\} \quad (4.243)$$

gegeben ist. Genügend genau gilt dann für die Höhe H_a maximaler Bremsbeschleunigung

$$\boxed{H_a = H_S \ln(2 k H_S) - \dots} \quad (4.244)$$

Diese Beziehung wurde so zum erstenmal von J.H. ALLEN (1910-1977) und A. EGGERS 1953 veröffentlicht („Blunt-Body“ („Stumpfer Körper“); [1]). Die Stärke dieser Abbremsung ergibt sich dann zu ($z_0 \rightarrow \infty$)

$$\frac{dv}{dt}_{max} = g e^{-1} \left(\mathbf{Ei}(1) - \mathbf{Ei}(2 k H_S e^{-H/H_S}) \right), \quad (4.245)$$

wo g wieder die Erdbeschleunigung bedeutet. Mit der für kleine $x > 0$ gültigen Entwicklung (γ ist die Eulersche Konstante)

$$\mathbf{Ei}[x] = \gamma + \ln[x] + x + O(x^2) \quad (4.246)$$

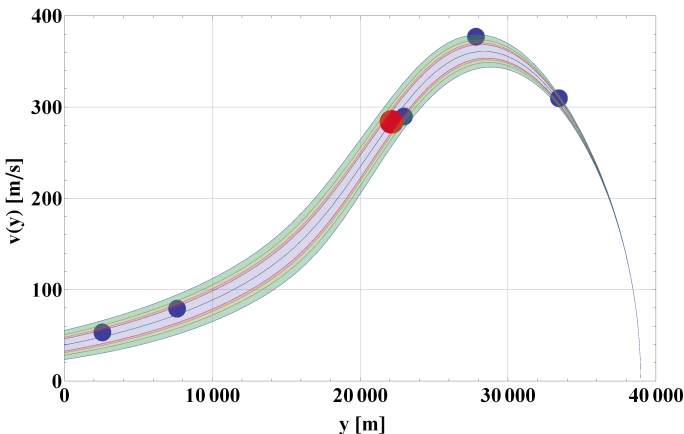


Fig. 4.32: Die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Höhe beim Fallschirmsprung von F. BAUMGARTNER im Red Bull Stratos Projekt in Roswell, New Mexico, am 14.10.2012. Die fünf veröffentlichten Datenpunkte des Rekordsprunges mit den entsprechenden Zeiten lassen sich recht gut an die theoretische Funktion (4.239, 4.238) anpassen. Der rote Punkt bezeichnet die Höhe maximaler Luftbremsung, bei der beim freien Fall von Baumgartner auch die „flat - spin“ Instabilität einsetzte. Die farbigen Bereiche kennzeichnen die 60, 70, 80 und 90 % Vertrauensbereiche der Kurvenanpassung.

lässt sich die Formel genügend genau durch

$$a_{max} \approx \frac{g H}{e H_S} \quad (4.247)$$

darstellen. Diese Formel ergibt sich auch einfacher exakt aus der Grundgleichung (4.237), wenn man dort von vornherein die Erdbeschleunigung g vernachlässigt hätte und den Körper mit der Geschwindigkeit v_0 auf die Atmosphäre prallen lässt. Dies soll im nächsten Kapitel näher untersucht werden. Die so gewonnenen Formeln wollen wir an den konkreten Daten des Rekordsprunges von F. Baumgartner aus fast 40 km Höhe testen. Das Red Bull Stratos Team hat leider nur fünf Datenpunkte der Fallkurve veröffentlicht, die in folgender Tabelle (4.3) zusammengefasst sind: Mit der Erdbeschleunigung $g = 9.8065 \text{ m/s}^2$ ergeben sich die wahrscheinlichsten Parameter zu

$$v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}} = 39 \pm 7 \text{ [m/s]}$$

t[s]	H[m]	v[m/s]	v_{model} [m/s]	t_{model} [s]
0	38969.4	0.0	0.0	0.0
34	33446.0	309.7	306.7	34.2
50	27833.0	377.1	360.4	50.5
64	22966.7	289.7	301.8	64.9
180	7619.3	79.2	72.7	179.6
260	2567.0	53.2	48.4	265.5

Tab. 4.3: Die bekannten Eckdaten des freien Falles von F. Baumgartner im Red Bull Stratos Team aus etwa 40km Höhe vom 14.10.2012. Zum Vergleich zeigen die beiden letzten Spalten die Best-Fit Daten des Modelles.

$$H_S = 6390 \pm 530 [m]$$

Obwohl die Varianz dieser Parameter recht groß ist, stellt die erhaltene Kurve die Datenpunkte relativ gut dar (siehe 4.32). Rechnet man mit der wahrscheinlichsten Funktion die Zeiten nach der Formel

$$T_F = \int_0^H \frac{dy}{v[y]}$$

aus, so ergeben sich anstatt der Zeiten in der Tabelle die Zahlen 0, 34.2, 50.5, 64.9, 179.6 und 265.5 [s]. Auch die Zeitmarken stimmen relativ genau mit den offiziellen Angaben überein. Das quadratische Luftwiderstandsgesetz und/oder die exponentielle Abnahme der Luftdichte mit der Höhe scheinen in dem betrachteten Bereich genügend genau erfüllt zu sein. Die kleinen Abweichungen der Daten von der theoretischen Kurve deuten allerdings auf plötzliche unstetige Dichtesprünge der Luftdichte in der Stratosphäre hin. Eine andere Möglichkeit ist natürlich die Abhängigkeit des Parameters k von der *Machzahl* und der *Reynoldszahl*, die sich in diesen Höhen auch sprunghaft ändern kann.

Die stärkste Luftabbremmung geschah nach dem Modell in einer Höhe von etwa **22121[m]** ($t = 67$ [s]) und betrug **1.64g**. Man spürt hier somit das **1.6** - fache seines Eigengewichtes. Kurz vor diesem kritischen Punkt setzte dann die „**flat spin**“ Instabilität ein, die wohl durch den *transsonischen Punkt* ausgelöst wurde und etwa 13[s] dauerte und bei $t = 77$ [s] durch Handbewegungen von F. BAUMGARTNER wieder abgedämpft werden konnte (siehe (4.32)). Am 24. Oktober 2014 machte ALAN

EUSTACEER im Alter von 57 Jahren mit einem Fallschirm einen Stratosphärensprung aus 41.419 Metern Höhe und stellte so den Höhenrekord von F. BAUMGARTNER ein.

Abschließend noch die Fallzeiten für einen Körper (Menschen) mit der Grenzgeschwindigkeit $v_\infty = 50 \text{ m/s}$ und $H_S = 8000 \text{ m}$. Aus 10000 m Höhe erhält man so eine Fallzeit von etwa 153 s, aus 20000 m Höhe 234 s, aus 30000 m Höhe 279 s und schließlich aus 40000 m Höhe ungefähr 306 Sekunden.

4.13 Über die Flugbahn von Golfbällen

Die Wurfparabel ist eine gute Näherung bei kleinen Geschwindigkeiten und schweren Kugeln. Bei höheren Geschwindigkeiten oder größeren Bällen müssen wir aber die Luftreibung berücksichtigen. Wie wir in der Einleitung gesehen haben, war die Aufstellung des genauen Reibungsgesetzes ein langer historischer Prozess. Die Bewegung eines rotierenden Fußballes, Tennisballs oder Golfballes stellt ein besonderes Problem dar. Im Folgenden wollen wir zunächst die Flugbahn eines Fußballes betrachtet werden, dessen Luftwiderstand und Auftriebskraft bis zu Geschwindigkeiten von etwa **25m/s** in guter Näherung *linear mit der Geschwindigkeit* zunimmt. Aufgrund des *Bernoulli-Theorems* gilt für die Auftriebskraft als Druckdifferenz zwischen unterschiedlichen Seiten des rotierenden Balles auch bei höheren Geschwindigkeiten noch das lineare Widerstandsgesetz. Wir postulieren also unter Berücksichtigung des Magnuseffektes nach (2.1) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -f_D \dot{x} - f_L \dot{y} \\ \ddot{y} &= -f_D \dot{y} + f_L \dot{x} - g.\end{aligned}$$

Die als konstant angenommenen Parameter f_D (drag force) und f_L (lift force) stellen eine Art inverse Relaxationszeit dar. Zudem ist f_L hier direkt proportional der Winkelgeschwindigkeit ω des rotierenden Balles. Voraussetzung für die obigen Gleichungen ist, dass die Rotationsachse des Balles parallel zum Boden und senkrecht zur Schussrichtung liegt (also keine seitlich abweichend Bananenflanke). Der inverse Zeitparameter f_D ist immer positiv, während f_L je nach Rotationsrichtung des Balles positiv (**backspin**) oder negativ (**topspin**; slice) sein kann. Durch Einführung

der komplexen Zahlen

$$\mathbf{z} = x + iy, \quad \mathbf{f} = f_D - iy_L \quad (4.248)$$

lassen sich die obigen Gleichungen in die einzige Gleichung

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{f} \dot{\mathbf{z}} + iy g = 0 \quad (4.249)$$

vereinigen. Ihre Lösung mit der Anfangsbedingung $\mathbf{z}[0] = 0$ und $\mathbf{z}'[0] = e^{i\Theta}$ lautet ($i^2 = -1$)

$$\mathbf{z} = \frac{v_0}{\mathbf{f}} e^{i\Theta} (1 - e^{-\mathbf{f}t}) - \frac{iy g}{\mathbf{f}^2} (e^{-\mathbf{f}t} + \mathbf{f}t - 1). \quad (4.250)$$

Die Formel besteht aus zwei Teilen: Der erste Teil proportional v_0 beschreibt eine spiralförmige Bewegung in den Fixpunkt (Pol) $v_0 e^{i\Theta}/\mathbf{f}$ hinein, der zweite Teil proportional g ist eine schlangenförmige Abwärtsbewegung mit der asymptotisch konstanten Geschwindigkeitsrichtung $-iy g/\mathbf{f}$. Der erste Teil proportional v_0 entspricht einer Bewegung längst einer logarithmischen Spirale. Um dies einzusehen, betrachten wir die Bewegung relativ zum Pol. Es gilt bei $g = 0$ für diese Relativbewegung

$$\delta \mathbf{z} = -\frac{v_0}{\mathbf{f}} e^{i\Theta - \mathbf{f}t}.$$

Diese Relativbewegung stellt eine logarithmische Spirale mit dem Steigungswinkel $\tan[\varphi] = f_D/f_L$ dar. Mit der idealisierten Lösung (4.250) lassen sich so schon wichtige Eigenschaften von ballistischen Flugbahnen eines Balles mit einem **backspin** ($\Im[\mathbf{f}] < 0$) studieren und verstehen.

Für die Beschreibung der Flugbahn eines Fußballes reichen diese Gleichungen aus, nicht aber für die wesentlich schnelleren **Golfbälle** mit *backspin*. Hier müssen wir zumindest für den direkten Luftwiderstand ein quadratisches Widerstandsgesetz ansetzen. Historisch ist interessant, dass der Schottische Physiker und begeisterte Golfspieler P.G. TAIT (1831-1901) diesen Ansatz gemacht hat ([50],[51]). Für den Luftwiderstand setzte er nach Rücksprache mit dem irischen Mathematiker und Physiker G.G.STOKES (1819-1903) ein mit der Geschwindigkeit quadratisches, für den Auftrieb durch den *backspin* wieder ein mit der Geschwindigkeit lineares Gesetz (Magnus Effekt) an. Wir wollen dieser Annahme hier folgen und setzen als fundamentale Bewegungsgleichung für den rotierenden

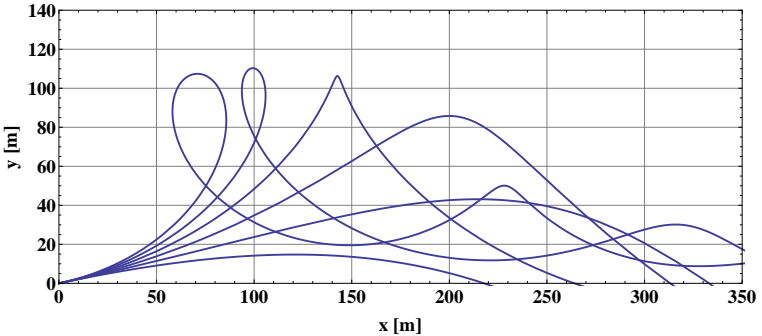


Fig. 4.33: Die möglichen Flugbahnen eines Balles mit linearem Widerstands- und Auftriebsgesetz, berechnet mit (4.250). Die Parameter sind hier $v_0 = 60\text{m/s}$, $\Theta = 12^\circ$, $\mathbf{f} = 0.1(1 - \imath j)$, wobei j von 1 bis 6 genommen wurde.

Golfball mit *backspin*

$$\ddot{x} = -k v \dot{x} - f \dot{y}, \quad (4.251)$$

$$\ddot{y} = -k v \dot{y} + f \dot{x} - g \quad (4.252)$$

an, indem $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ ist, k und f eine reziproke Länge für den Luftwiderstand sowie eine der Rotationsfrequenz ω des Golfballes proportionale Frequenzkonstante darstellen. Die eigentlichen Details eines Golfballes soll hier nicht weiter erörtert werden. Zu erwähnen wäre nur, dass die heutigen Bälle an ihrer Oberfläche etwa 300-450 sehr kleine Einbuchtungen (sogenannte **dimples**) aufweisen, welche den Luftwiderstand gegenüber einer glatten Kugel deutlich verringern. Dies wurde schon 1897 in einem Patent festgelegt.

Mit $\mathbf{z} = x + \imath y$ lassen sich nun die beiden gekoppelten Gleichungen wieder als

$$\ddot{\mathbf{z}} + (k |\dot{\mathbf{z}}| - \imath f) \dot{\mathbf{z}} + \imath g = 0 \quad (4.253)$$

schreiben. Eine geschlossene analytische Integration ist aber jetzt nicht mehr möglich. Man kann diese Gleichung aber als Grundlage für eine numerische Integration benutzen. Multipliziert man wieder die erste Gleichung mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} und addiert beide, so folgt die erste Grundgleichung

$$v \dot{v} + k v^3 + g \dot{y} = 0. \quad (4.254)$$

Berücksichtigen wir wieder die elementaren Beziehungen

$$\dot{x} = v \cos[\theta]; \quad \dot{y} = v \sin[\theta]; \quad dx = \cos[\theta] ds; \quad dy = \sin[\theta] ds, \quad (4.255)$$

so gilt analog wie in der klassischen Ballistik

$$\dot{v} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.256)$$

oder mit (4.255)

$$v \frac{dv}{ds} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.257)$$

Da die Auftriebskraft in unserem Modell immer senkrecht zur Flugrichtung wirkt, ist das Ergebnis für die Geschwindigkeitsveränderung verständlich.

Wird weiterhin die erste Gleichung von (4.251) mit \dot{y} , die zweite mit \dot{x} multipliziert und dann die zweite von der ersten subtrahiert, so gilt zunächst

$$\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x} = -f v^2 + g \dot{x} \quad (4.258)$$

und wegen (4.255) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} = f v - g \cos[\theta]. \quad (4.259)$$

Die beiden Gleichungen (4.257) und (4.259) sind unsere Modellgleichungen für die ballistische Kurve eines Golfballes mit **backspin**. Beide Gleichungen lassen sich wiederum einfach interpretieren. Die Gleichung (4.257) beschreibt die Kräftebilanz in tangentialer Richtung der Bahnkurve, die Gleichung (4.259) normal zur Kurve. Mit der Bogenlänge s und (4.255) gilt somit die wichtige Relation

$$v^2 \frac{d\theta}{ds} = f v - g \cos[\theta], \quad (4.260)$$

wobei $ds/d\theta$ bis auf das Vorzeichen den Krümmungsradius der Bahnkurve bezeichnet.

Wir wollen jetzt wieder eine einzige Differentialgleichung für $v[\theta]$ ableiten. Dazu schreiben wir (4.256) nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.261)$$

Eliminieren wir hier die Größe $d\theta/dt$ mit Hilfe von (4.259), so erhalten wir die fundamentale Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} = \frac{g \sin[\theta] + k v^2}{g \cos[\theta] - f v}.} \quad (4.262)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Geschwindigkeit v eines rotierenden Golfballes mit *backspin* als Funktion des Steigungswinkel θ seiner Flugbahn.

Eine exakte Integration der Gleichung (4.262) scheint nicht möglich und auch nicht sinnvoll zu sein. Ähnlich wie P.G.TAIT im Jahre 1891 können wir zunächst den Spezialfall $g \equiv 0$ betrachten. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung (4.262) auf

$$\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\theta} = -\frac{k}{f}.$$

Eine Integration liefert zunächst

$$\frac{1}{v} = \frac{k}{f} \theta + C.$$

Völlig unabhängig von der Integrationskonstanten C sieht man hier, dass für einen bestimmten Winkel θ die Geschwindigkeit v unendlich wird. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir hier $C = 0$ setzen und so den singulären Punkt nach $\theta = 0$ legen. Als Lösung erhalten wir so

$$v[\theta] = \frac{f/k}{\theta}. \quad (4.263)$$

Die Orientierung des Koordinatensystems wurde jetzt so festgelegt, dass für $\theta = 0$ die Geschwindigkeit unendlich ist. $f > 0$ (Auftrieb) gilt jetzt $\theta > 0$, für $f < 0$ (Abtrieb) gilt entsprechend $\theta < 0$. Setzen wir diese Lösung in (4.260) mit $g \equiv 0$ ein, so folgt die bemerkenswerte Relation

$$ds = \frac{1}{k} \frac{d\theta}{\theta}. \quad (4.264)$$

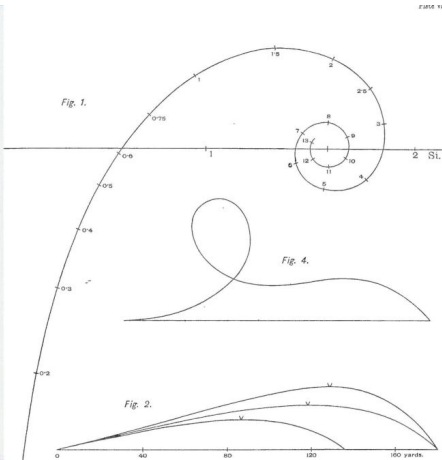


Fig. 4.34: Der schottische Physiker und Philosoph P.G. Tait (1831-1901) hat sich gegen Ende des 19ten Jahrhunderts intensiv mit der Flugbahn von Golfbällen mit backspin (Magnus-Effekt) beschäftigt. Auch Flugbahnen mit einer Schleife (looping) hat er numerisch untersucht, die aber theoretisch nur bei extrem schnellen Rückwärts-Rotationen des Golfballes auftreten würden. Neben der Spiralbahn im Falle $g=0$ zeigt Fig.4 auch eine Schleifenbahn, die TAIT aber nur graphisch abgeschätzt („geraten“) hat.

wobei nun die Größe f_L herausgefallen ist. Die eigentliche Differentialgleichung der spiralförmigen Bahn im Falle $g \equiv 0$ lautet mit (4.255) also

$$dx = \frac{1}{k} \frac{\cos[\theta]}{\theta} d\theta, \quad dy = \frac{1}{k} \frac{\sin[\theta]}{\theta} d\theta. \quad (4.265)$$

Dies war auch das Resultat von P.G. TAIT Ende des 19ten Jahrhunderts. Eine Quadratur ergibt zunächst die Darstellung

$$x[\theta] = \frac{1}{k} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos[\xi]}{\xi} d\xi, \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin[\xi]}{\xi} d\xi. \quad (4.266)$$

Das Integral für x divergiert aber in Richtung der Asymptoten für $\xi \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty$. Wir verschieben das Koordinatensystem in der x-Richtung aus dem Unendlichen in den Pol, indem wir schreiben

$$x[\theta] = -\frac{1}{k} \int_{\theta}^{\infty} \frac{\cos[\xi]}{\xi} d\xi, \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \int_{\theta}^{\infty} \frac{\sin[\xi]}{\xi} d\xi. \quad (4.267)$$

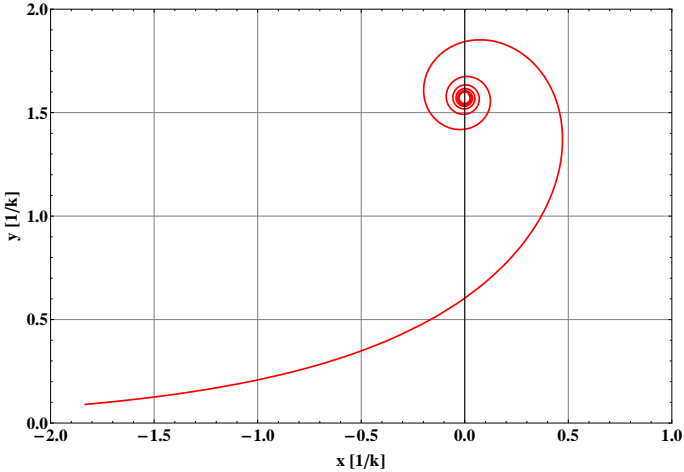


Fig. 4.35: Die Spiralbahn eines rotierenden Golfballes im Falle $g = 0$ (Tait-Spirale).

Mit dem Integralsinus und Integralcosinus erhalten wir so für die Spiralbahn endgültig

$$x[\theta] = \frac{1}{k} \mathbf{Ci}[\theta], \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \mathbf{Si}[\theta]. \quad (4.268)$$

Die Spirale hat universellen Charakter, denn weder der Auftriebsparameter f noch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 spielt für die Gestalt der Kurve eine Rolle.

Wir wollen am Schluss für flache Flugbahnen eines Golfballes eine genäherte analytische Darstellung dieser Bahnkurven ableiten. Aus (4.257) und (4.260) lässt sich die Erdbeschleunigung g eliminieren. Durch Einführung von $u = v \cos[\theta]$ erhält man so die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{du}{ds} + k u + f \sin[\theta] = 0.} \quad (4.269)$$

Die Gleichung (4.260) nimmt schließlich die Form

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{g \cos[\theta]^3}{u^2} + \frac{f \cos[\theta]}{u} \quad (4.270)$$

an. Aus beiden so modifizierten Gleichungen kann man eine erste Näherung für die Bahnkurve in cartesischen Koordinaten gewinnen. Genauer ist es aber, parallel dazu auch eine Taylor-Entwicklung der Bahnkurve zu berechnen, um die Parameter der erste Näherung aus der Störungsrechnung zu verbessern. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{G}[\xi] = e^{\xi} - \xi - 1 \quad (4.271)$$

erhält man so für die Bahn eines Golfballes mit *back spin* die Näherung

$$y \approx \tan[\Theta] x + \frac{f \sec[\Theta]}{k^2 v_0} \mathbf{G}[k \sec[\Theta] x] - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \mathbf{G}[2 k \sec[\Theta] x]. \quad (4.272)$$

Die Näherung von P.G. TAIT sieht genauso aus, nur ist bei Ihm $\sec[\Theta] \sim 1$ und $\tan[\Theta] \sim \Theta$. Der Abgangswinkel Θ wird im Golf als **Loft** bezeichnet. Ein Vergleich mit numerischen Integrationen zeigt, dass bis knapp über

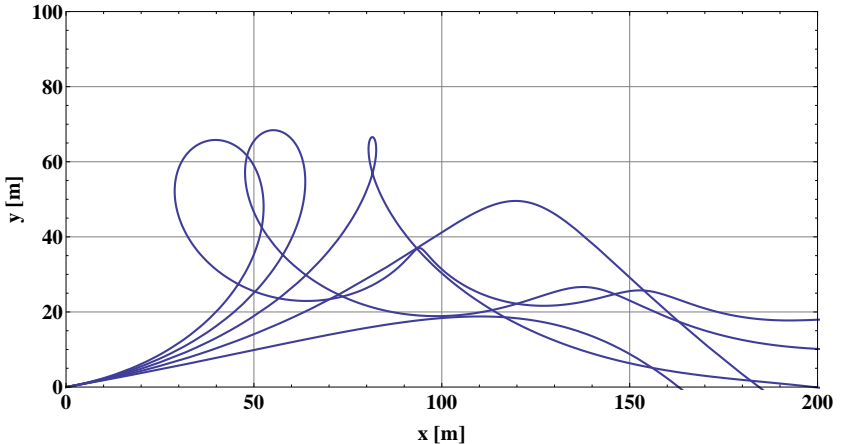


Fig. 4.36: Die Flugbahnen eines Golfballes, berechnet mit einer numerischen Integration von (4.251, 4.252). Die Parameter sind hier $v_0 = 80 \text{ m/s}$, $\Theta = 10^\circ$, $\mathbf{k} = 0.01 \text{ m}^{-1}$, $f = 0.2 * j$, wobei j von 1 bis 5 genommen wurde.

die **blow up** Grenze, bei der beim Abschlag Auftrieb und Gravitation ausgeglichen sind, die analytische Darstellung der Bahnkurve eine gute Approximation darstellt.

5 Hypersonische Ballistik

5.1 Die erweiterten Grundgleichungen

Tritt ein Meteor oder *Bolide* in die Erdatmosphäre ein, hat er mindestens die lokale Entweichgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, gegeben durch $\sqrt{2gR}$, wo R den Erdradius und g die Erdbeschleunigung bezeichnen. Auch in der Phase der bemannten Mondlandungen von 1968 - 1972 hatten zum erstenmal in der Geschichte der Astronautik die zurückkehrenden Apollo - Kapseln Geschwindigkeiten in dieser Größenordnung. In der Zeitepoche von L. EULER und J.H. LAMBERT wären diese Probleme reine Fiktion gewesen - ganz wie der Ritt von Münchhausen auf der Kanonenkugel. Ein besonderes ballistisches Problem stellt somit die Abbremsung dieser Flugkörper dar, die sich in einer Parabelbahn einem Planeten (Erde) nähern und schließlich in die oberen Atmosphärenschichten eindringen. Die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (4.1) und (4.2)

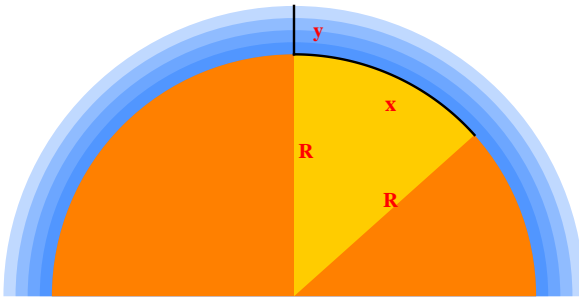


Fig. 5.1: Um auch Flugbahnen bei höheren Geschwindigkeiten zu beschreiben, muss man als nächstes die Erdkrümmung und die Zentrifugalbeschleunigung berücksichtigen. Die $x - y$ - Koordinaten werden hier also „lokale Polarkoordinaten“. Gültig ist diese Approximation vom Erdboden (Planeteboden; $y = 0$) bis vielleicht zur „Thermosphäre“ von etwa $y \approx 100 - 120\text{km}$ (Karman-Linie).

müssen jetzt für den Fall abnehmender Luftdichte und aufgrund sehr hoher Geschwindigkeiten auch durch einen Zentrifugalterm erweitert werden. Wir postulieren in nächster Näherung die Modellgleichungen

$$\ddot{x} = -k[y] v \dot{x}, \quad (5.1)$$

$$\ddot{y} = -k[y] v \dot{y} - g + \frac{\dot{x}^2}{R}, \quad (5.2)$$

in denen $k[y]$ den höhenabhängigen ballistischen Koeffizienten, g die wieder als konstant angenommene Gravitationsbeschleunigung und R den Erdradius (Mondradius) bezeichnen. Multiplizieren wir wieder (5.1) mit \dot{x} , (5.2) mit \dot{y} , so folgt mit (4.3) erweitert

$$\dot{v} + k[y] v^2 + \left(g - \frac{u^2}{R}\right) \sin[\theta] = 0, \quad (5.3)$$

in der wieder $u = v \cos[\theta]$ bedeutet. Des weiteren multiplizieren wir (5.1) mit \dot{y} , dann (5.2) mit \dot{x} und subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung, so erhalten wir wegen (4.5) in globaler Erweiterung von (4.9) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + \left(g - \frac{u^2}{R}\right) \cos[\theta] = 0. \quad (5.4)$$

Dies sind die globalen ballistischen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitsänderung und Winkeländerung einer Raumkapsel in der Nähe der Erde bei hohen Geschwindigkeiten.

Aufgrund von (5.1) können wir mit der Kettenregel auch

$$\dot{u} = \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -k[y] v u \quad (5.5)$$

schreiben. Elimination von $d\theta/dt$ durch (5.4) führt nach Substitution von v durch u zu der Differentialgleichung

$$\boxed{\left(g - \frac{u^2}{R}\right) \frac{du}{d\theta} = \frac{k[y] u^3}{\cos[\theta]^3}.} \quad (5.6)$$

für die Geschwindigkeitskomponente u als Funktion des Neigungswinkels θ .

Um in einem ersten Modell quantitativ zu verstehen, wie der *Hodograph* eines ballistischen Wiedereintritts in eine Planetenatmosphäre aussieht, müssen wir in der obigen Gleichung die Setzung $k[y] \rightarrow b = \textit{konstant}$ vornehmen. Unser Atmosphärenmodell gleicht so eher einem „Ozean“ konstanter Dichte. Außerdem skalieren wir die Geschwindigkeit mit der Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} in der Form

$$u = \sqrt{gR} \mathbf{U}[\theta] \quad (5.7)$$

und erhalten so

$$(1 - \mathbf{U}^2) \frac{d\mathbf{U}}{d\theta} = \frac{kR}{\cos^3[\theta]} \mathbf{U}^3 \quad (5.8)$$

Mit der Substitution

$$\sin[\theta] = \tanh[z]; \quad d\theta = \frac{dz}{\cosh[z]} \quad (5.9)$$

vereinfacht sich die Gleichung des Hodographen in das Differential

$$\boxed{(1 - \mathbf{U}^2) \frac{d\mathbf{U}}{dz} = kR \cosh^2[z] \mathbf{U}^3.} \quad (5.10)$$

Diese überraschend einfache Gleichung ist die Erweiterung der klassischen ballistischen Gleichung (4.23) durch den „Zentrifugalterm“ \dot{x}^2/R . Sie kann exakt integriert werden und definiert so den Hodographen von ballistischen Kurven bei hohen Geschwindigkeiten in einer Atmosphäre *konstanter Dichte*. Man erhält für die Integralkurven

$$\frac{1}{\mathbf{U}^2} + \ln |\mathbf{U}^2| + kR \left(z + \frac{1}{2} \sinh[2z] \right) = C. \quad (5.11)$$

Wegen $p = \sinh[z]$ ist dies die direkte Verallgemeinerung des Hodographen (4.24) für die klassische ballistische Kurve. Eine ausführliche Diskussion der Integralkurven behalten wir uns vor.

5.2 Das Allen - Eggers Modell

Zu Beginn der 1950er Jahre entstand in der Raketenballistik das Problem, wie Flugkörper aus dem All unbeschadet wieder zur Erde zurückkehren

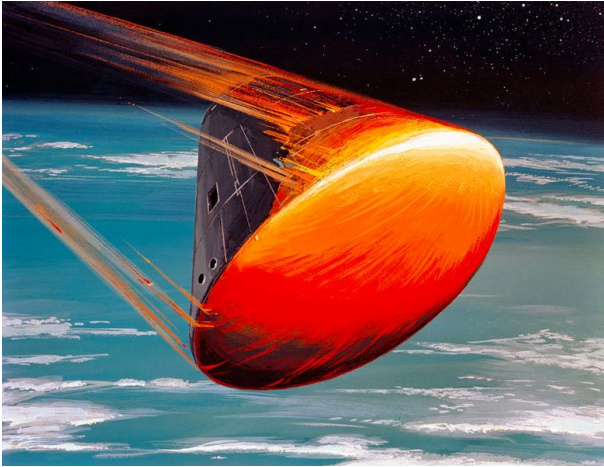


Fig. 5.2: *Künstlerische Darstellung von Apollo 8 beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre am 27. Dezember 1968. Die Abbremsung und die Flugbahn einer solchen Raumkapsel („Blunt Body“) stellt ein besonderes ballistisches Problem dar, welches ganz im Geiste von L. EULER oder J.H. LAMBERT einer näheren analytischen Betrachtung bedarf. (Bild: NASA image S68-55292)*

können, ohne das sie durch die *Reibungshitze* beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre zerstört werden (Teil des geheimen **ICBM** - Programmes). Eine fundamentale theoretische Arbeit zu diesem Problem wurde von H.J. ALLEN und A.J. EGGERS 1953 veröffentlicht ([1])¹. ALLEN und EGGERS gingen wahrscheinlich 1953 von der eindimensionalen Gleichungen (5.1) und (5.2) aus, vereinfachen sie aber an einer Stelle: Sie vernachlässigen für eine erste Approximation den gravitativen Term $g \sin[\Theta]$, der bei den hohen Kreisbahngeschwindigkeiten zunächst vernachlässigt werden darf. Die Flugbahn ist dann eine **Gerade** und das ballistische Problem wird *eindimensional*. Die Grundgleichung lautet dann für die Gesamtgeschwindigkeit

$$\frac{dv}{dt} + k e^{-y/H_s} v^2 = 0. \quad (5.12)$$

¹HARRY JULIAN (HARVEY) ALLEN (1910 - 1977), Luftfahrtingenieur und Direktor des *Nasa Ames Research Center* von 1965-1969. Bekannt für seine „*blunt-body theory*“ aus dem Jahre 1953, die aber erst 1957 veröffentlicht werden durfte. Die Theorie war grundlegend für das Design der Mercury -, Gemini - und Apollo - Kapseln.

oder nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} + k e^{-y/H_S} v^2 = 0. \quad (5.13)$$

Die Höhenkoordinaten ist hier y , wobei $y = 0$ die Planetenoberfläche bedeutet. Der ballistische Koeffizient k gilt für die Referenzhöhe $y = 0$, also für den Planetenboden. Da aufgrund der Kraftverhältnisse klar ist, daß in dieser Approximation die Bahn eine Gerade darstellt, substituieren wir in (5.13)

$$\frac{dy}{dt} = v \sin[\Theta]. \quad (5.14)$$

Θ ist hier der Neigungswinkel der „Wiedereinstiegsbahn“ in die Planetenatmosphäre, für den natürlich $\Theta < 0$ gelten muss. Setzt man dies in die Gleichung (5.13) ein, so erhält man

$$\sin[\Theta] \frac{dv}{dy} + k e^{-y/H_S} v = 0. \quad (5.15)$$

Eine ähnliche Gleichung haben auch ALLEN - EGGERS 1953 betrachtet. Hat der Körper in sehr großer Eintrittshöhe H_S (*Karman-Schicht* $\approx 100\text{km}$) die Geschwindigkeit v_0 , so lautet die Lösung der obigen Gleichung

$$v[y] = v_0 \exp \left[k H_S \left(e^{-y/H_S} - e^{-H_K/H_S} \right) \operatorname{cosec}[\Theta] \right] \quad (5.16)$$

Im Limes $H_K \rightarrow \infty$ gilt ganz einfach ($\Theta < 0$)

$$v[y] = v_0 \exp \left[\frac{k H_S e^{-y/H_S}}{\sin[\Theta]} \right]. \quad (5.17)$$

Für den Betrag der Bremsbeschleunigung erhält man so

$$a[y] = k v_0^2 \exp \left[2 k H_S e^{-y/H_S} \operatorname{cosec}[\Theta] - y/H_S \right]. \quad (5.18)$$

Diese Größe wird beim Eintauchen des Körpers in die Atmosphäre *maximal* in der Höhe ($\Theta < 0$)

$$y_a = -H_S \ln \left(-\frac{\sin[\Theta]}{2 k H_S} \right) \quad (5.19)$$

In dieser Höhe *maximaler Bremsung* beträgt die reduzierte Geschwindigkeit des Körpers

$$v_a = v_0 e^{-1/2} \approx \mathbf{0.61} v_0 \quad (5.20)$$

Der Maximalwert der Bremsbeschleunigung in der Höhe y_a beträgt dabei ($\Theta < 0$)

$$a_{max} = -\frac{v_0^2}{2e H_S} \sin[\Theta]. \quad (5.21)$$

Dies ist ein überraschendes Resultat des *Allen-Eggers* Modells: *Der Wert der maximalen Bremsbeschleunigung ist unabhängig vom ballistischen Parameter k .* Dies ist sehr bemerkenswert. Taucht zum Beispiel ein Körper mit der lokalen Entweichgeschwindigkeit $\sqrt{2gR}$ ($R =$ Erdradius) in die oberen Atmosphärenschichten ein, so kann man die maximale Bremsbeschleunigung mit der Formel ($\Theta < 0$)

$$a_{max} \approx -g \frac{R}{e H_S} \sin[\Theta] \quad (5.22)$$

grob nach „oben“ abschätzen. In Wirklichkeit wird der Körper bei diesen hohen Geschwindigkeiten und flachem Winkel keine gerade Bahn mehr haben, sondern nach Durchlaufen des „Perigäums“ noch einmal Aufsteigen und dann erst endgültig abbremsen und abstürzen. Dieser Vorgang bedarf aber einer umfangreicheren Untersuchung. Neben der Dynamik spielt aber auch noch die Energiedissipation bei der Abbremsung eine wichtige Rolle. Dieser Vorgang führt sofort zu einer *starken Erhitzung* des Körpers und kann ihn unter Umständen zerstören oder auflösen. Dies konnte man sehr schön beim Eintauchen eines „Riesenboliden“ am 15. Februar 2013 im Südrural bei der Millionenstadt *Tscheljabinsk* beobachten. Es gilt

$$\dot{\mathbf{E}} = -k m e^{-y/H_S} v[t]^3. \quad (5.23)$$

Durch Ersetzen von $v[t] \rightarrow v[y]$ folgt

$$\dot{\mathbf{E}} = -k m v_0^3 \exp \left[3 k H_S e^{-y/H_S} \operatorname{cosec}[\Theta] - y/H_S \right]. \quad (5.24)$$

Der Betrag dieser Energiedissipation wird gemäß dieser Beziehung maximal in der Höhe ($\Theta < 0$)

$$y_E = -H_S \ln \left(-\frac{\sin[\Theta]}{3 k H_S} \right) \quad (5.25)$$



Fig. 5.3: Das heftige Aufglühen und explosive Verdampfen des Riesenboliden am 15. Februar 2013 über dem Südsural, gefilmt mit einer Autokamera in Kamensk - Uralski, etwa 200 km nördlich von Tscheljabinsk. Ein etwa zehnfach an Masse größerer Superbolide war wahrscheinlich die Ursache für das Tunguska - Ereignis am 30. Juni 1908 in Sibirien in der Nähe des Flusses „Steinige Tunguska“ (Podkamennaja Tunguska) in der heutigen Region Krasnojarsk. (credit: Aleksandr Ivanov; wikimedia.commons)

Die Höhenregion maximaler Energiedissipation liegt immer oberhalb der Region maximaler Abbremsung, wie man durch Vergleich mit (5.19) feststellen kann. Die Eintrittsgeschwindigkeit ist dann erst auf den Wert

$$\mathbf{v}_E = v_0 e^{-1/3} \approx \mathbf{0.72} v_0 \quad (5.26)$$

gesunken. Letztendlich erklärt dieses Ergebnis, dass große Boliden (Meteore), die in die oberen Atmosphärenschichten eintauchen, zunächst *hell aufleuchten* und erst dann durch starke mechanische Beanspruchung (Abbremsung) zerbrechen. Die maximale Energiedissipation beträgt

$$\dot{\mathbf{E}}_{max} = \frac{m v_0^3}{3 e H_S} \sin[\Theta] \quad (5.27)$$

und ist wieder unabhängig vom ballistischen Koeffizienten k . Wir können die obige Formel benutzen, um die Energieleistung des *Tscheljabinsk - Boliden* abzuschätzen. Wir entnehmen aus der Literatur (Internet) die

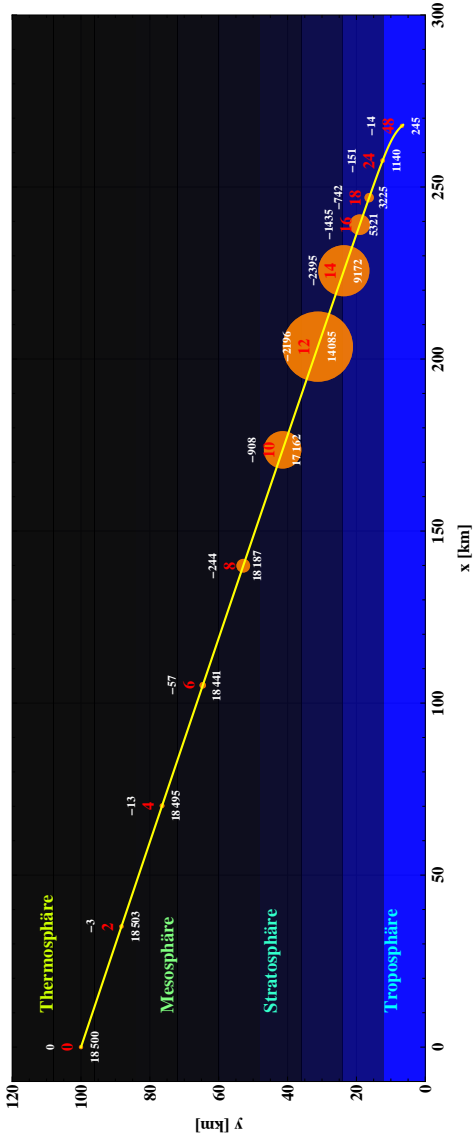


Fig. 5.4: Die Bahn des Riesensoliden am 15. Februar 2013 über dem Südpol - ein gefährliches Naturschauspiel der hypersonischen Ballistik. Die Skalen sind in Einheiten von Kilometern. Der Winkel Θ wird hier zu -18° und die maximale Energieleistung bei einer Höhe y_E von 30 km angenommen. In der Graphik bedeuten rote Zahlen Zeiten in Sekunden, die weißen Zahlen darüber die Bremsbeschleunigung in m/s^2 , darunter die Geschwindigkeit in m/s . Die Dicke der Kreisscheiben ist mit der Größe der Energiedissipation dE/dt skaliert (siehe 5.24). 20%-25% wird davon auch in Photonen - Strahlung umgesetzt. Angeblich haben Augenzeugen von leichten Hautreizungen berichtet (UV - Strahlung).

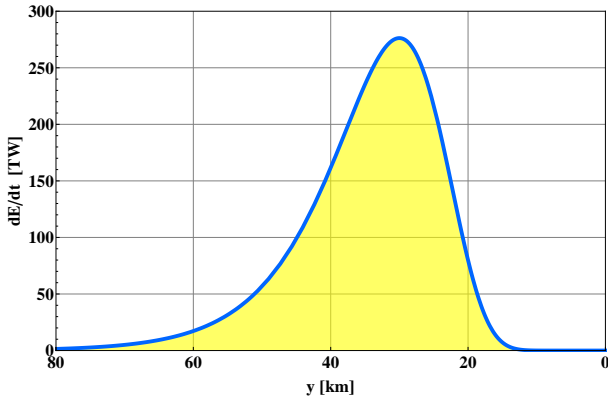


Fig. 5.5: Die Energieleistung des Riesenboliden am 15. Februar 2013 über dem Südrural in Einheiten von **Terra-Watt** als Funktion der Höhe y (siehe 5.24). Der effektive ballistische Koeffizient k_{eff} wurde aufgrund der Beobachtungen bestimmt, nach denen bei der Höhe $y \equiv 30$ km ein Maximum der Helligkeit festgestellt wurde.

Daten²

$$m \approx 10^7 \text{ kg}; \quad v_0 \approx 1.85 \cdot 10^4 \text{ m/s} \quad (5.28)$$

sowie

$$\Theta \approx -18^\circ; \quad H_s \approx 8 \cdot 10^3 \text{ m}. \quad (5.29)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich so zunächst der Wert

$$\mathbf{E}_{kin} \approx 1.62 \cdot 10^{15} \text{ [J]}. \quad (5.30)$$

Mit dem TNT-Äquivalent von $1 \text{ kg}_{TNT} = 4.184 \cdot 10^6 \text{ [J]}$ oder $1 \text{ [kT]} \equiv 4.184 \cdot 10^{12} \text{ [J]}$ entspricht dies dem Wert

$$\mathbf{E}_{kin} \approx 390 \text{ [kT]} \text{ (Kilotonnen TNT)} \quad (5.31)$$

Die maximale Energieproduktion (Energieleistung) des Riesenmeteoros betrug

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{E}}| &\approx 2.8 \cdot 10^{14} \text{ [W]} \\ &\approx 280 \text{ [TW]} \end{aligned} \quad (5.32)$$

²Der Riesenbolide von Tunguska soll zehnfache Masse, einen Winkel von etwa $\Theta \sim -45^\circ$ und eine Airburst - Höhe von zirka 8 km gehabt haben

Dies entspricht etwa dem 5-fachen der Leistung, welche die Erde als Wärme aus Erdmantel und Erdkern ständig abgibt. Oder es entspricht über dem 10-fachen, welches die gesamte technische Zivilisation permanent an Leistung benötigt.

Um den Verlauf in der Fig. (5.5) zu erhalten, muss der effektive ballistische Koeffizient k_{eff} im *hypersonischen Bereich* bekannt sein. Dies geschah mit der Formel (5.25) mit der Information, daß in einer Höhe von etwa 30 km die größte Helligkeit (Lichtblitz) und somit höchste Energieumwandlung stattfand. Die Abschätzung liefert

$$k_{eff} \approx 5.5 \cdot 10^{-4} [m^{-1}] \quad (5.33)$$

Mit der Abschätzung

$$k_{eff} \approx \frac{3}{4} c_w \frac{\varrho_L}{\varrho_{Ch}} \frac{1}{D_{eff}} \quad (5.34)$$

für kugelförmige Körper ergibt sich mit der Luftdichte $\varrho_L = 1.21 \text{ kg/m}^3$, mit der Dichte für Chondrite von $\varrho_{Ch} = 3300 \text{ kg/m}^3$ und $c_w(\mathcal{M}, \mathbf{Re}) \approx 2$ ein grober Durchmesser von etwa

$$D_{eff} \approx 1.0 \text{ m} \quad (5.35)$$

Der Bolide muss also während des *Airbursts* („Luftexplosion“) in 30 km Höhe schon in zahlreiche Brocken im Meterbereich zerfallen sein - damit die obigen dynamischen Formeln konsistent sind. Das durch die Hitze induzierte Zerplatzen des Körpers erhöht auch schlagartig den ballistischen Koeffizienten. Denn zerfällt der Bolide in N etwa gleich große Teile, so erhöht sich dieser Koeffizient für jedes Teilstück in

$$k_{eff} \sim k_0 N^{1/3}. \quad (5.36)$$

Es bleibt noch das Problem, den zeitlichen Verlauf des Wiedereintritts mit der Energieproduktion zu verknüpfen. Wegen (5.17) gilt

$$\dot{y}[t] = v_0 \sin[\Theta] \exp \left[\frac{k H_S e^{-y[t]/H_S}}{\sin[\Theta]} \right]. \quad (5.37)$$

Durch Integration und Eichung der Zeitskala bei $y = y_E$ zu $t(y_E) = 0$ ergibt sich

$$t[y] = \frac{H_S}{v_0 \sin[\Theta]} \left[\mathbf{Ei} \left(\frac{1}{3} \right) - \mathbf{Ei} \left(-\frac{k H_S e^{-y/H_S}}{\sin[\Theta]} \right) \right] \quad (5.38)$$

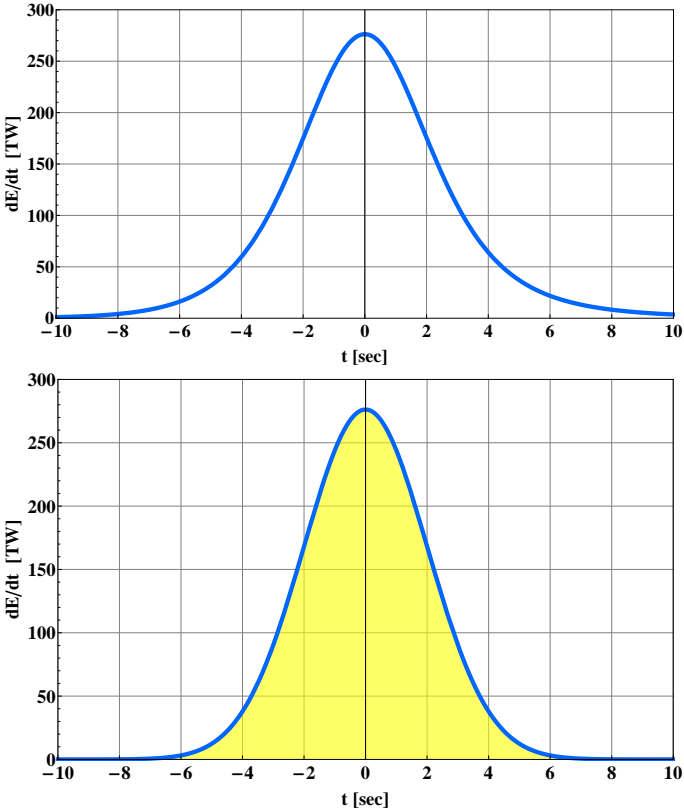


Fig. 5.6: Das obere Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Energiedissipation des Boliden von Tscheljabinsk um den „Airburst“ Zeitmoment $t = 0$. Berechnet mit den Formeln (5.24) und (5.38). Das untere Bild wurde mit der genäherten „Glockenkurve“ (5.39) berechnet.

Die Funktion $\mathbf{Ei}[z]$ bezeichnet wieder das Exponentialintegral. In der Umgebung von $y = y_E$ können wir durch eine Taylorentwicklung in den beiden Formeln (5.24) und (5.38) die Höhe y in erster Ordnung eliminieren und erhalten so in guter Näherung

$$\boxed{\frac{dE}{dt} \sim \frac{m v_0^3 \sin[\Theta]}{3 e H_S} \exp \left[-\frac{v_0^2 \sin[\Theta]^2}{2 e^{2/3} H_S^2} t^2 \right]} \quad (5.39)$$

Hier sieht man sehr schön, daß nicht nur das Maximum, sondern auch der zeitliche Verlauf um das Maximum der Energieleistung völlig unabhängig von dem ballistischen Koeffizienten k ist. Ein Vergleich der Figuren in (5.6) zeigt zudem, daß die Funktion (5.39) eine ausreichende zeitliche Beschreibung der Energieumwandlung liefert.

5.3 Ballistischer Wiedereintritt (Skip Reentry)

Die im vorhergehenden Kapitel diskutierten Formeln sind *teilweise* das Ergebnis des ALLEN - EGGERS Modelles von 1953. Die damaligen Rechnungen zum thermischen Verhalten haben wesentlich dazu beigetragen, den Raumkapseln *Mercury*, *Gemini* und *Apollo* in den 1960er Jahren das charakteristische „*blunt-body*“ („*Stumpfer Körper*“) - Aussehen zu geben, damit durch die Schockwelle die thermische Erhitzung zum Körper auf Abstand bleibt.

In den 1950er Jahren wurden sehr unterschiedliche Konzepten diskutiert, wie eine Raumkapsel aus einer Erdumlaufbahn wieder in die Erdatmosphäre eintauchen kann (**Reentry**), ohne zu verglühen. Neben einem *Gleitmechanismus* und einem *dip* und *skip* Flugbahnmanöver („*Eintauchen und Überspringen*“) war der rein *ballistische Wiedereintritt* das kostengünstigste Konzept. Um aber eine *realistische ballistische Eintrittsbahn* einer Raumkapsel in eine Planetenatmosphäre zu berechnen, reichen die vereinfachten Annahmen des ALLEN - EGGERS Modelles nicht mehr aus. Die hypersonische Bahn ist bei *sehr flachem Einstieg* in die Atmosphäre ($|\Theta| \approx 5^\circ$) gegenüber der Erdoberfläche keine Gerade mehr, sondern eine sehr flache Kurve mit einem *Wendepunkt* (*inflection point*). Zwei wichtige Fragen drängen sich hier auf: ([32])³

- Welche Bahnparameter führen zur Landung und nicht zurück in den Orbit?
- Welche maximalen Bremsbeschleunigungen treten bei einem optimal günstigen Wiedereintritt auf?
- Wenn der mögliche Eintrittskorridor sehr eng ist, Kann eine reine Bremsbeschleunigung eine sichere Landung garantieren oder muss

³Einen Überblick gibt das NASA-eBook „[Coming Home](#)“



Fig. 5.7: Die Apollo - Raumkapseln mussten beim Wiedereintauchen in die Erdatmosphäre mit über 10 km/s Geschwindigkeit einen sehr flachen Eintauchwinkel einhalten, der in 100 km Höhe nur etwa 5.5 bis 6.5 Grad Neigung zur Erdoberfläche hatte. (Bildquelle: NASA)

zusätzlich eine Auftriebskontrolle zur Verfügung stehen (drag; lift-off; lift down)

Eine detaillierte Antwort auf diese Fragen findet man durch *numerische Integration* der gekoppelten Differentialgleichungen (5.1, 5.2) finden. Die idealisierten dynamischen Gleichungen für eine Simulation folgen aus den beiden Gleichungen (5.1) und (5.2) mit einem höhenabhängigen Koeffizienten k in der Form

$$\ddot{x} = -k e^{-y/H_S} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \quad (5.40)$$

$$\ddot{y} = -k e^{-y/H_S} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - g + \frac{\dot{x}^2}{R}. \quad (5.41)$$

Die Länge H_S bedeutet hier die Skalenhöhe der Atmosphäre und beträgt in der Erdatmosphäre etwa 8 km. Die Wiedereintrittsgeschwindigkeit für einen *skip reentry* der Apollo - Kapseln Ende der 1960er Jahre lag in der Größenordnung der Entweichgeschwindigkeit des Planeten Erde. Für diesen Spezialfall kann man jetzt einfache analytische Formeln für die

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit finden. Ohne Luftreibung lauten die Bahnlösungen bei der Entweichgeschwindigkeit in unserem lokalen Modell

$$\dot{x} = \sqrt{2gR}; \quad \dot{y}[t] = gt \quad (5.42)$$

sowie für die Wegstrecke

$$x[t] = \sqrt{2gR}t; \quad y[t] = H_P + \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.43)$$

Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Perigäumspunkt der Parabelbahn, also der nächsten Annäherung an die Erdoberfläche. Die Bewegung entspricht der populären Vorstellung, dass ein Raumfahrzeug ohne genügende Abbremsung an der Erdatmosphäre *wie ein flach geworfener Stein an der Wasseroberfläche wieder abprallt*.

Mit den *ungleichen* Skalierungen

$$\begin{aligned} x[t] &= \sqrt{H_S R} X[\tau]; \\ y[t] &= H_S (Y[\tau] + \ln[k \sqrt{H_S R}]) \end{aligned} \quad (5.44)$$

und der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{H_S}} t \quad (5.45)$$

folgt für die horizontale Bewegungskomponente

$$X'' = -e^{-Y} \sqrt{X'^2 + \beta^2 Y'^2} X' \quad (5.46)$$

und für die vertikale Bewegungskomponente

$$Y'' = -e^{-Y} \sqrt{X'^2 + \beta^2 Y'^2} Y' - 1 + X'^2. \quad (5.47)$$

In diesen Gleichungen tritt nur noch als Parameter die für einen Planeten sehr kleine Kennzahl

$$\beta = \sqrt{\frac{H_S}{R}} \quad (5.48)$$

auf. Bei der Erde beträgt der Parameter β wegen $H_S \approx 8$ km und $R \approx 6371$ km etwa

$$\beta \approx \mathbf{0.03 - 0.04}.$$

Wir wollen deshalb die obigen Gleichungen weiter vereinfachen. Da die Reentry - Bahnen immer sehr flach zur Planetenatmosphäre sind, werden wir für unser numerisch - analytisches Modell den Term proportional β vernachlässigen. In dieser „*Flachbahnnäherung*“ gilt nun sehr einfach

$$\boxed{X'' + X'^2 e^{-Y} = 0.} \quad (5.49)$$

und entsprechend

$$\boxed{Y'' + X' Y' e^{-Y} + 1 - X'^2 = 0.} \quad (5.50)$$

Diese Parameter - freien gekoppelten Differentialgleichungen müssen und dürfen nun mit den asymptotischen Anfangsbedingungen einer nach oben geöffneten parabolischen Flugbahn und einer anvisierten minimalen Perigäumshöhe von H_P gelöst werden. In physikalischen Koordinaten sind die Anfangsbedingungen für die nach oben geöffnete Parabelbahn

$$\begin{aligned} x[0] &= 0, \\ y[0] &= H_0, \\ \dot{x}[0] &= \sqrt{2gR}, \\ \dot{y}[0] &= -\sqrt{2g(H_0 - H_P)}. \end{aligned}$$

In den dimensionslos skalierten Koordinaten und Zeitablauf lauten sie jetzt

$$\begin{aligned} X[0] &= 0, \\ Y[0] &= H_0/H_S - \ln[k \sqrt{H_S R}], \\ X'[0] &= \sqrt{2}, \\ Y'[0] &= -\sqrt{2(H_0/H_S - H_P/H_S)}. \end{aligned}$$

Es liegt hier der Gedanke nahe, eine universelle numerische Kennzahl C einzuführen und die kritische Perigäumshöhe, bei dem ein Sattelpunkt

der Bahn auftritt, dann durch die Formel

$$H_P = H_S \ln \left[\mathbf{C} k \sqrt{H_S R} \right] \quad (5.51)$$

oder durch Aufspaltung

$$H_P = \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln [\mathbf{C} k H_S] \quad (5.52)$$

auszudrücken. Der erste Anteil beschreibt eine von den ballistischen Eigenschaften der Raumkapsel unabhängige Höhe, die mit $H_S = 8$ km und $R = 6371$ km bei etwa 27 km liegt. Die Kennzahl \mathbf{C} klassifiziert dann die möglichen Anfangsbedingungen der Einstiegsbahnen. Es gilt alternativ

$$\begin{aligned} Y[0] &= H_0/H_S - \ln[k \sqrt{H_S R}] \\ Y'[0] &= -\sqrt{2(H_0/H_S - \ln[k \sqrt{H_S R}] - \ln[\mathbf{C}])}. \end{aligned}$$

Mit dem Parameter \mathbf{C} wird so die anvisierte Perigäumshöhe H_P dimensionslos parametrisiert. \mathbf{C} ist hier noch eine freie Zahl - die ballistische Abstiegsbahn muss noch keinen Sattelpunkt haben. Die Anfangshöhe H_0 skalieren wir in Einheiten von H_S

$$H_0 = H_S (n_0 + \ln[k \sqrt{H_S R}]) \quad (5.53)$$

wobei n_0 etwa 15 – 20 betragen sollte. Damit lauten die Anfangsbedingungen für $Y[\tau]$

$$\begin{aligned} Y[0] &= n_0, \\ Y'[0] &= -\sqrt{2(n_0 - \ln[\mathbf{C}])}. \end{aligned}$$

Die positive Größe n_0 muss für die numerische Integration so gewählt werden, daß $\exp[-n_0]$ in der Größenordnung der angestrebten Rechengenauigkeit liegt.

Frühere Abschätzungen für (5.52) lassen vermuten, daß die Abstiegsbahn einen Sattelpunkt hat, wenn $\mathbf{C} \approx 10$ ist. Diese kritische Kennzahl

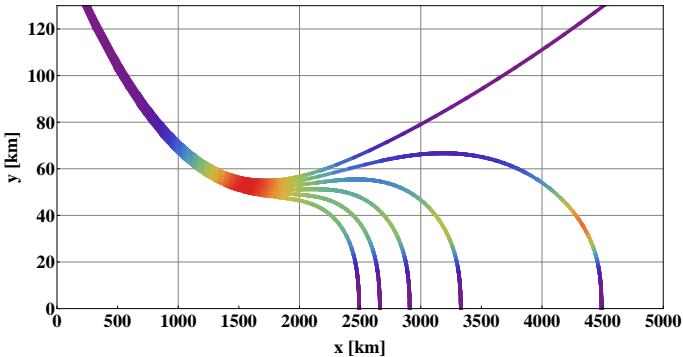


Fig. 5.8: Sechs parabolische Eintauchbahnen mit einer anvisierten Perigäumshöhe H_P von 51, 52, 53, 54, 55 und 56 km. Die Farbcodierung entspricht der Stärke der Energiedissipation und somit auch der thermischen Belastung der Raumkapsel, die proportional $k[y]v^3$ ist. Deutlich ist zu sehen, wie eng bei rein ballistischen Wiedereintrittsbahnen der erlaubte Flugkorridor ist, um sicher landen zu können. Aus diesem Grunde konnten die Apollokapseln in den 1960er und 1970er Jahren durch wechselnde Verlagerungen des Schwerpunktes (einfache 180 Grad - Drehung der Raumkapsel um die Symmetrieachse der Rotation) kleine aerodynamische Auftriebe oder Abtriebe erzeugen, um bei Nichteinhaltung des Korridors schnell Feinkorrekturen durchführen zu können.

C können wir jetzt genau numerisch berechnen. Die zwei Bedingungen für einen Sattelpunkt zu irgendeinem Zeitpunkt τ_s lauten

$$Y'[\tau_s] = 0; \quad X'[\tau_s] = 1. \quad (5.54)$$

Erst jetzt wird der freie Kurvenparameter **C** zu einer kritischen Kennzahl, welche mit (5.52) die Sattelpunkt - Passage bestimmt. Nach einer parametrischen numerischen Integration der beiden Bewegungsgleichungen lassen sich die Hilfsvariable τ_s und die wichtige Kennzahl **C** aus den zwei Bedingungen (5.54) bestimmen. Die kritische Kennzahl **C** für eine Wiedereintrittsbahn mit Sattelpunkt ist in diesem mathematischen Modell dann genähert

$$\mathbf{C}_{inflexion} = 10.6674 \dots \quad (5.55)$$

Diesen Wert in (5.52) eingesetzt führt zur anvisierten Perigäumshöhe H_P für eine Sattelpunktbahn. In der Figur (5.8) sind drei unterschiedliche ballistische Wiedereintrittsbahnen graphisch veranschaulicht. Die Parameter

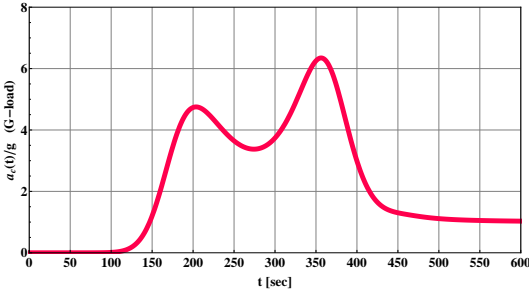


Fig. 5.9: Die Bremsbeschleunigung als Funktion der Zeit bei einer ballistischen Eintrittsbahn mit $H_P = 52$ km (obere Graphik). Die Werte sind in Einheiten der Erdbeschleunigung g (**G-loading**) angegeben. Bei diesem Typ von Bahnen treten zwei „Eintauchphasen“ auf. Etwa bei $t = 200$ ist der Punkt des Perigäums.

H[km]	Θ [°]	H[km]	Θ [°]
300	-11.20	300	-11.09
250	-10.05	250	-9.92
200	-8.72	200	-8.58
150	-7.14	150	-6.96
122	-6.07	122	-5.86
100	-5.06	100	-4.80

Tab. 5.1: Der Wiedereintrittswinkel bei einer Parabelbahn bis zur Höhe der Karman-Schicht als Funktion der Flughöhe für eine Perigäumshöhe H_P von 50 km (linke Tabelle) und 55 km (rechte Tabelle). Die NASA legt den offiziellen Eintrittswinkel in einer Höhe von 400000 Fuß (≈ 122 km) fest. Der entsprechende Wert ist hier fett gedruckt.

sind dabei $H_S = 8000$ m, $k = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Wie man sieht, kann schon eine Erhöhung der Perigäumshöhe um 1 km fatale Folgen haben. In Fig (5.9) ist zusätzlich die Bremsbeschleunigung für die Bahn mit dem Parameter $H_P = 52$ km dargestellt. Das Hauptcharakteristikum sind hier zwei Bremsphasen, welche eine Folge des doppelten Eintauchens in die oberen Atmosphärenschichten ist. Der mittlere Wert der Abbremsung (**G-load**) lässt sich dabei recht gut durch die Formel

$$\mathbf{a_c} \sim g k R \exp \left[-\frac{H_P}{H_S} \right] \quad (5.56)$$

abschätzen.

Der physikalische Vorgang des Eintauchens gleicht bis zu einem gewissen Grad dem Abprall eines platten Kieselsteines von der Wasseroberfläche, wenn der Winkel sehr flach ist. Das scheinbare „Abprallen“ eines ballistischen Flugkörpers von der Erdoberfläche heißt hier natürlich nur der fast ungestörte Weiterflug in einer Parabelbahn oder Ellipsenbahn, weil die Luftbremsung nicht stark genug war, den Körper vollständig in die Atmosphäre abtauchen zu lassen. Da für Zeiten $t < 0$ vor dem Eintauchen für die Höhe der Raumkapsel als Funktion der Zeit sehr einfach der Zusammenhang (5.43) gilt, folgt für den Tangens des Eintauchwinkels

$$\mathbf{P}[H]_{t \ll 0} = -\sqrt{\frac{H - H_P}{R}}. \quad (5.57)$$

Die Tabelle (5.1) zeigt typische Werte für den Eintauchwinkel $\tan[\Theta] = \mathbf{P}$ als Funktion der momentanen Höhe H über der Erdoberfläche, wenn die vorgegebene Perigäumshöhe H_P anvisiert wird.

5.4 Satellitenbahnen mit Luftreibung (Aerobraking)

Seit künstliche Satelliten um die Erde fliegen, gibt es das Problem, die Abbremsung von tieffliegenden Satelliten quantitativ abzuschätzen und so Aussagen über ihre Lebensdauer zu machen. Ausgedehnte Atmosphären von Planeten können durch ihre Bremswirkung entweder die exzentrische Bahn einer Sonde immer kreisförmiger machen und so deren ballistische Landung auf dem Planeten vorbereiten (Aerobraking) oder ihn verglühen lassen. Daher wollen wir etwas genauer untersuchen, wie sich der Luftwiderstand insbesondere auf die zeitliche Entwicklung der Ellipsenbahn von Erdsatelliten auswirkt.⁴

Wir modellieren die gestörte Keplerbewegung einer Planetensonde durch die Vektorgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} - k[r] v \dot{\mathbf{r}}, \quad (5.58)$$

⁴Historisch ist es sehr interessant, dass schon 1797 der preußische Offizier und Astronom J.P. VON ROHDE die Einwirkung von Luftwiderstand auf Keplerbahnen (Kometenbahnen) untersucht hat.([40])

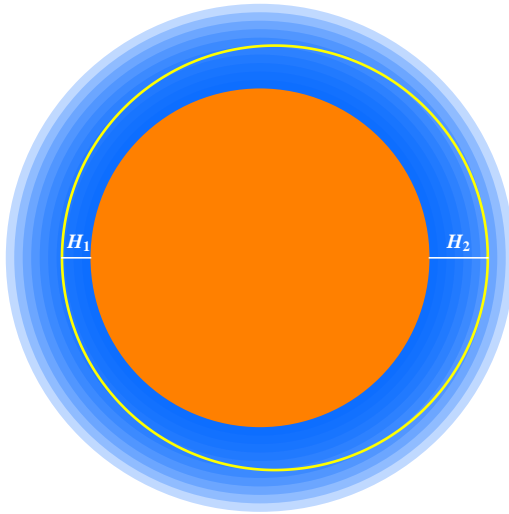


Fig. 5.10: Geometrische Kenngrößen bei der Abbremsung einer Satellitenbahn in den tieferen Atmosphärenschichten eines Planeten (Erde). H_1 bezeichnet die Perigäumshöhe, H_2 die Apogäumshöhe der Satellitenbahn über der Erdoberfläche.

wo G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten (Erde), \mathbf{r} der Ortsvektor der Sonde und $k[r]$ ein ballistischer Koeffizient bedeuten, der nur vom radialen Abstand r zum Planetenmittelpunkt abhängt. Die Geschwindigkeit der Sonde ist $v = |\dot{\mathbf{r}}|$. Skalare Multiplikation dieser Gleichung mit $\dot{\mathbf{r}}$ führt auf

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM}{r} \right) = -k[r] v^3. \quad (5.59)$$

Den Ausdruck in der Klammer können wir aber als die spezifische Gesamtenergie $-GM/(2a)$ der Keplerbewegung interpretieren, wobei a die momentane große Bahnhalbachse ist. Damit haben wir die erste Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{a} \right) = 2k[r] v^3. \quad (5.60)$$

Diese Gleichung hat auch schon VON ROHDE im Jahre 1797 erhalten. Sie besagt, dass die große Halbachse der Ellipse mit einer bestimmten Rate immer kleiner wird. Multiplizieren wir weiter von links die Gleichung (5.58) vektoriell mit \mathbf{r} , so erhalten wir nach einer kleiner Umrechnung

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -k[r] v (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (5.61)$$

Diese Gleichung besagt anschaulich, dass der spezifische Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ der Keplerbahn mit der zeitlichen Rate $k(r) v$ exponentiell zerfällt. Wegen $|\mathbf{L}| = \sqrt{GMp}$, wo p den sogenannten Bahnparameter $p = a(1 - \epsilon^2)$ der Bahnellipse bezeichnet, erhalten wir so die zweite Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt} \ln[p] = -2 k[r] v. \quad (5.62)$$

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst eine Kreisbahn. Wir machen die Hypothese, dass durch Luftreibung der Radius $r[t]$ dieser kreisförmigen Bahn sich langsam verkleinert und sich so der Satellit immer mehr dem Erdboden nähert. Wir prüfen diese Hypothese anhand der Variationsgleichungen (5.60) und (5.62). Bei einer Kreisbahn ist $a \equiv p$ und die beiden Variationsgleichungen lauten (die Faktoren 2 sind hier sehr bemerkenswert)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{GM}{r[t]} \right\} = +2 k[r] v^3, \quad (5.63)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \ln[r[t]] \} = -2 k[r] v. \quad (5.64)$$

Aus beiden Gleichungen folgen sofort die säkulare Entwicklungsgleichung für den Radius $r[t]$ und die *Keplersche* Geschwindigkeitsrelation

$$\dot{r}[t] + 2 k[r] r v = 0, \quad (5.65)$$

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \quad (5.66)$$

Aus der ersten Gleichung können wir schon schließen, dass sich der Bahnradius des tiefliegenden Satelliten immer mehr verkleinert, gleichzeitig aber - *trotz Abbremsung* - die Geschwindigkeit gemäß dem Keplerschen Gesetz immer mehr vergrößert. Die Erfahrung lehrt aber, dass dies nicht

immer so weitergehen kann, da irgendwann in den tieferen Luftschichten der Satellit auf aerodynamische Fallgeschwindigkeit abgebremst werden wird. Wir wollen diesen kritischen Übergang hier etwas genauer untersuchen. In den frühen 1960er Jahren konnte man aus der Änderung der gut messbaren Umlaufzeit T_U eines Satelliten auf den ballistischen Koeffizienten $k[r]$ und so auch auf die Luftdichte schließen. Denn es gilt mit den obigen Gleichungen

$$\frac{\dot{T}_U}{T_U} = -3 k[r] v. \quad (5.67)$$

Als sehr einfaches Modell für den ballistischen Koeffizienten nehmen wir wieder die barometrische Höhenformel

$$k[r] = k \exp\left(\frac{R - r}{H_S}\right). \quad (5.68)$$

Die ballistische Konstante k (*inverse Länge*) gilt jetzt für den Erdboden ($r = R$). Die Skala H_S liegt in der *Troposphäre* der Erde bei etwa 8000 Metern, ist aber in der *Thermosphäre* größer und kann zudem mit der Tageszeit und bei plötzlich ausbrechenden „Sonnenstürmen“ stark schwanken. Da die mittlere freie Weglänge der Moleküle in diesen höheren Schichten mit der Ausdehnung eines Satelliten vergleichbar ist, spielt auch die sogenannte *Knudsen - Zahl* für die Berechnung des Strömungswiderstandes eine Rolle. Aus den obigen Gleichungen folgt dann durch Einsetzen die wichtige radiale Driftgleichung erster Ordnung in k

$$\dot{r}[t] + 2k \sqrt{GM r[t]} \exp\left(\frac{R - r[t]}{H_S}\right) = 0. \quad (5.69)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\sqrt{\pi H_S} \mathbf{Erfi} \left(\sqrt{\frac{r[t]}{H_S}} \right) = C - 2k \sqrt{GM} \exp\left(\frac{R}{H_S}\right) t, \quad (5.70)$$

wobei $\mathbf{Erfi}[z]$ die mit $-i$ multiplizierte Fehlerfunktion für rein imaginäres Argument bedeutet. Die Konstante C folgt aus der Randbedingung $r(0) = R + H_0$ mit der Anfangshöhe H_0 . Die asymptotische Lösung



Fig. 5.11: Der kontrollierte Absturz des 14 Tonnen schweren ATV-002 Frachters „Johannes Kepler“ von der Internationalen Raumstation im Juni 2011. Da einige Details des Verglühens in der Erdatmosphäre bis heute nicht gut verstanden sind, hatte er einen „Reentry Break-up Recorder“ an Bord. In etwa 80 km Flughöhe brach allerdings der Kontakt ab. (Bild: ESA)

dieser Differentialgleichung lautet mit der Anfangshöhe $r(0) = R + H_0$ ($H_0/R \ll 1$)

$$H[t] = H_S \ln \left[\exp \left[\frac{H_0}{H_S} \right] - 2kR \frac{\sqrt{gR}t}{H_S} \right]. \quad (5.71)$$

Durch Einführung der Lebenszeit

$$T_L = \frac{e^{H_0/H_S}}{4\pi k R} \left(\frac{H_S}{R} \right) T_U \quad (5.72)$$

eines Satelliten in Erdnähe ergibt sich für die zeitliche Abnahme der Flughöhe die einfache Beziehung

$$\boxed{H[t] = H_0 + H_S \ln \left[1 - \frac{t}{T_L} \right]}. \quad (5.73)$$

Computersimulationen auf Basis der Gleichung (5.58) zeigen nun, dass die zeitliche Abnahme des Bahnradius einer kreisförmigen Satellitenbahn *sehr genau* der analytischen Formel (5.73) folgt. Auch die Geschwindigkeit nimmt nach dem Keplerschen Gesetz in den tieferen Atmosphärenschichten zunächst weiter zu. Bei einer bestimmten Höhe H_K allerdings erreicht

der Satellit kurz vor dem Ende seiner Lebenszeit seine *maximale Orbitalgeschwindigkeit*. Simulationen zeigen jetzt, dass kurz danach die Geschwindigkeit sehr schnell abnimmt und die säkulare Gleichung (5.65) erster Ordnung in k nicht mehr gültig ist. Der Satellit durchläuft eine kurze maximalen Bremsphase und stürzt danach schnell ab. In dieser Endphase maximaler Abbremsung und Energiedissipation findet in den meisten Fällen auch das Verglühen statt.

Bis jetzt haben wir den Abstieg eines Satelliten in einer Kreisbahn behandelt. Die Verhältnisse bei einer Ellipsenbahn sind qualitativ anders. Es gibt jetzt keinen Punkt maximaler Geschwindigkeit mehr, dafür aber beim Abstieg in die Atmosphäre einen Zeitpunkt *minimaler Exzentrizität*. Bezeichnet man jetzt die Perigäumsdistanz mit r_1 , die Apogäumsdistanz mit r_2 , so gilt in der Ellipsengeometrie

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}; \quad p = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad \epsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (5.74)$$

Außerdem gelten für den Radius r und die Geschwindigkeit v als Funktion der *wahren Anomalie* φ die Beziehungen

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}, \quad v^2 = G M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5.75)$$

Ist der Winkel φ gleich Null, geht die Sonde durch ihr Perigäum (Erdnähe), ist der Winkel ± 180 Grad, geht sie durch das Apogäum (Erdferne) der Bahn. Mit alledem lassen sich die beiden obigen Variationsgleichungen umschreiben und vereinfachen zu dem äquivalenten Paar

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}_1}{r_1} &= - \frac{k[r] v[r] (1 - \cos[\varphi]) (r_1 + r_2)}{r_2}, \\ \frac{\dot{r}_2}{r_2} &= - \frac{k[r] v[r] (1 + \cos[\varphi]) (r_1 + r_2)}{r_1}. \end{aligned}$$

Diese Formeln dürfen für eine realistische Abschätzung weiter vereinfacht werden. Da der ballistische Koeffizient k (inverse Länge) entlang der Flugbahn aus mehreren Gründen nur unsicher modelliert werden kann, die betrachteten Bahnen zudem nicht extrem exzentrisch sind, so dürfen wir in guter Approximation

$$\frac{d}{dt} \ln[r_1[t]] \sim -2 k[\varphi] (1 - \cos[\varphi]) v[\varphi], \quad (5.76)$$

$$\frac{d}{dt} \ln[r_2[t]] \sim -2k[\varphi] (1 + \cos[\varphi]) v[\varphi] \quad (5.77)$$

schreiben. Schon hier kann man den entscheidenden Mechanismus der Abbremsung (*Aerobraking*) von tieffliegenden Planetensonden sehen. Gerade wenn sich die Sonde im Perigäum der Bahn ($\varphi = 0$) befindet, wo die Luftdichte am höchsten ist, erfährt die Perigäumsdistanz $r_1[t]$ nur eine minimale säkulare Änderung ($1 - \cos(\varphi) \approx 0$), während die Apogäumsdistanz $r_2[t]$ eine maximale Änderung erfährt. Die elliptische Bahn der Sonde wird also durch die Luftreibung zunächst kreisförmiger gemacht, bevor sie in tiefere Atmosphärenschichten abtaucht.

Wir wollen die obigen Entwicklungsgleichungen für den häufig vorkommenden Fall niedrig fliegender Satelliten noch weiter vereinfachen. Wir approximieren die Bewegung der Sonde zwischen den beiden Höhenextrema H_1 (Perigäum) und H_2 (Apogäum) über der Erdoberfläche durch die harmonische Näherung

$$y \sim \frac{1}{2}(H_1 + H_2) + \frac{1}{2}(H_1 - H_2) \cos(\varphi). \quad (5.78)$$

Für die Geschwindigkeit v nahe der Erdoberfläche setzen wir einfach $v = \sqrt{gR}$, wo g die Oberflächenbeschleunigung und R den Erdradius bezeichnen. Variationen dieser Orbitalgeschwindigkeit liegen bei den erdnahen Bahnen in der Größenordnung von $\delta H/R$ und dürfen hier vernachlässigt werden. Auch die Quotienten $\dot{r}_{1,2}/r_{1,2}$ können wir durch die Ausdrücke $\dot{H}_{1,2}/R$ approximieren. Führen wir noch eine Mittlung durch, indem wir über einen vollen Umlauf φ integrieren und durch 2π dividieren, so ergeben sich die merkwürdigen Gleichungen

$$\frac{dH_1}{dt} = -V e^{-\frac{H_1+H_2}{2H_S}} \left(\mathbf{I}_0 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] - \mathbf{I}_1 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] \right) \quad (5.79)$$

und

$$\frac{dH_2}{dt} = -V e^{-\frac{H_1+H_2}{2H_S}} \left(\mathbf{I}_0 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] + \mathbf{I}_1 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] \right). \quad (5.80)$$

Die Funktionen $\mathbf{I}_0[z]$ und $\mathbf{I}_1[z]$ bezeichnen modifizierte Besselfunktionen und V bedeutet die Geschwindigkeitskonstante

$$V = 2kR\sqrt{gR}. \quad (5.81)$$

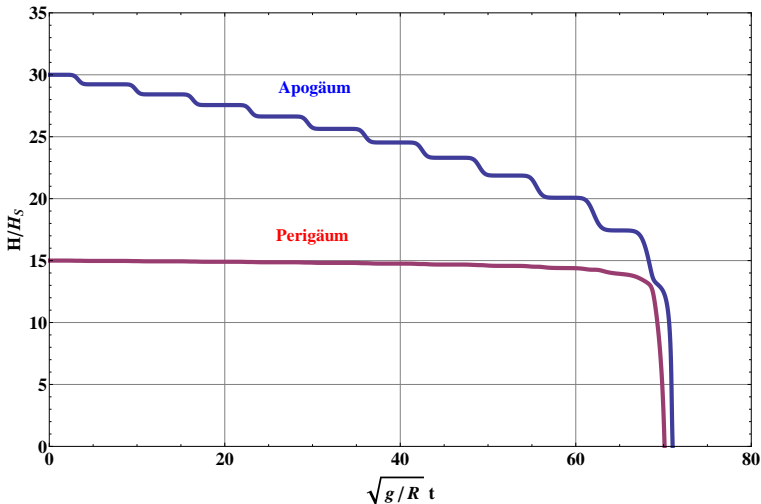


Fig. 5.12: Computersimulation für die Perigäumshöhe (rot) und Apogäumshöhe (blau) einer exzentrischen Satellitenbahn beim Eintauchen in die Erdatmosphäre. Deutlich ist zu sehen, dass die Apogäumshöhe mit der Umlaufzeit „stufenweise“ abgebaut wird, da nur in Perigäumshöhe die Luftreibung besonders effektiv ist. Die Skala H_S wurde hier zu 8 km angenommen.

Die obigen Entwicklungsgleichungen beschreiben *in unserem stark idealisierten Modell* die unterschiedlich schnelle Abnahme der Perigäumshöhe und der Apogäumshöhe ($H_1 < H_2$) mit der Zeit. Die einfache Lösung (5.73) legt es nahe, im anderen Extremfall einer stark elliptischen Bahn die modifizierten Besselfunktionen für ein großes Argument asymptotisch zu approximieren. Wir setzen genähert für $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0[x] + \mathbf{I}_1[x] &\sim \frac{2e^x}{\sqrt{2\pi x}} + \dots \\ \mathbf{I}_0[x] - \mathbf{I}_1[x] &\sim \frac{e^x}{2x\sqrt{2\pi x}} + \dots \end{aligned}$$

Mit diesen Näherungen lauten die Gleichungen (5.79) und (5.80) vereinfacht

$$\frac{dH_1}{dt} \sim -\frac{V}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{H_S}{H_2 - H_1} \right)^{3/2} e^{-\frac{H_1}{H_S}} \quad (5.82)$$

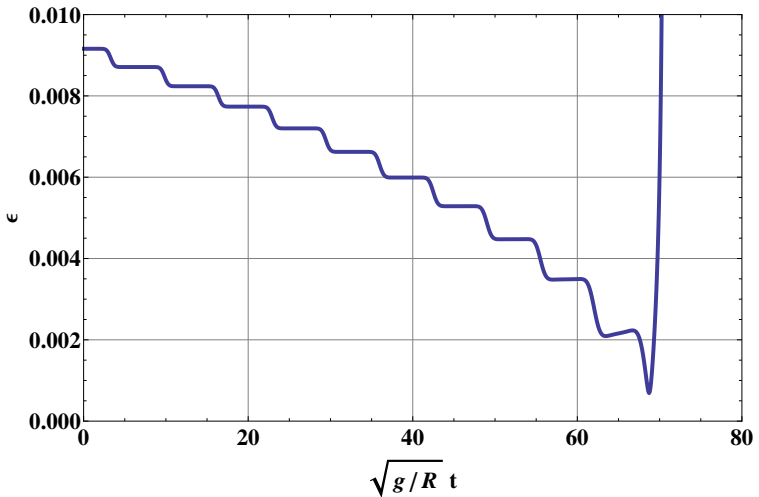


Fig. 5.13: Das stufenweise Abnehmen der Exzentrizität einer erdnahen elliptischen Satellitenbahn in einer Computersimulation. Es existiert kurz vor dem Absturz ein Punkt minimaler Exzentrizität, ab dem die Exzentrizität abrupt dem asymptotischen Grenzwert 1 zustrebt. Gleichzeitig halbiert sich der Wert der großen Halbachse. Die Bahnparameter sind dieselben wie in Fig. (5.12).

und

$$\frac{dH_2}{dt} \sim -\frac{2V}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{H_S}{H_2 - H_1} \right)^{1/2} e^{-\frac{H_1}{H_S}}. \quad (5.83)$$

Aus diesen gekoppelten Gleichungen folgt asymptotisch das Differential

$$\frac{dH_2}{dH_1} \sim 2 \frac{H_2 - H_1}{H_S}.$$

Das Integral dieser Relation ist

$$H_2 - H_1 \sim \frac{H_S}{2} + C_1 \exp\left(2 \frac{H_1}{H_S}\right)$$

C_1 ist hier eine Integrationskonstante, die mit den Anfangsbedingungen festliegt. Da die Beziehung asymptotisch gilt, vernachlässigen wir den

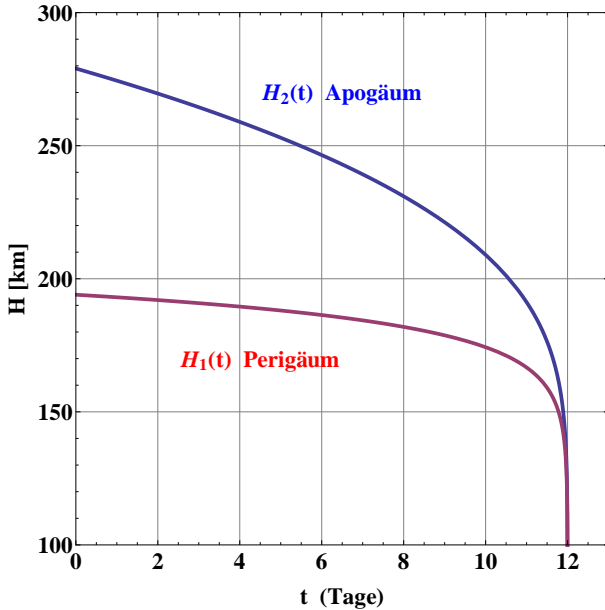


Fig. 5.14: Der Absturz von Progress M-27M im April/Mai 2015 nach einer Fehlfunktion der Trägerrakete. Die Funktionen (5.85) und (5.86) beschreiben die beobachtete Höhenabnahme sehr gut.

kleinen Summanden $H_S/2$ und erhalten die auch physikalisch einsichtige Beziehung

$$H_2 - H_1 \sim (H_{20} - H_{10}) \exp\left(2 \frac{H_1 - H_{10}}{H_S}\right). \quad (5.84)$$

Die Größen H_{10} und H_{20} bedeuten die Perigäumshöhe und die Apogäumshöhe zu Beginn der Beobachtung. Die obige Beziehung setzen wir nun in (5.82) ein und erhalten nach Integration für $H_1[t]$ die neue Darstellung

$$H_1[t] \sim H_{10} + \frac{1}{4} H_S \ln \left[1 - \frac{t}{T_L} \right]. \quad (5.85)$$

Wie bei einer reinen Kreisbahn erhalten wir wieder einen analogen zeitli-

chen Verfall für die Perigäumshöhe, nur ist jetzt die Skalenhöhe asymptotisch auf den vierten Teil reduziert. Dagegen gilt für den zeitlichen Verfall der Apogäumshöhe mit (5.84) und (5.85)

$$H_2[t] - H_1[t] = (H_{20} - H_{10}) \sqrt{1 - \frac{t}{T_L}}. \quad (5.86)$$

Die Lebensdauer T_L muss jetzt aus den gekoppelten Differentialgleichungen (5.79) und (5.80) gewonnen werden. Alternativ ist es auch möglich, aus den abnehmenden Höhendaten des Perigäums und Apogäums durch einen Fit die zwei freien Parameter H_S und T_L in (5.85) und (5.86) zu bestimmen. In der Figur (5.15) ist der sehr schnelle Zerfall der Bahn des ersten Satelliten *Sputnik 1* mit der Zeit zu sehen. Historisch ist noch interessant, dass man im Oktober 1957 nur die Umlaufzeit des Satelliten genau messen konnte.⁵ Für die Umlaufzeit eines künstlichen Satelliten um die Erde gilt nämlich mit Berücksichtigung der Abnahme der Gravitation mit dem Abstand vom Massenzentrum nach KEPLER oder NEWTON

$$T_U = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{3}{2} \delta + \frac{3}{8} \delta^2 + \dots \right) \quad (5.87)$$

mit $\delta = (H_1 + H_2)/(2R)$. Aus einer gemessenen Umlaufzeit und einer vom Kosmodrom Baikonur in der damaligen UDSSR angegebenen Apogäumshöhe konnte man damals schnell auf eine mittlere Bahnhöhe von **576** km schließen.

5.5 Theorie der Kármán-Linie

Im letzten Kapitel wurde schon angedeutet, dass ein Satellit in einer erdnahen Kreisbahn durch Luftreibung zwar an Höhe verliert, gleichzeitig aber an Geschwindigkeit gewinnt. Es muss aber eine kritische Höhe geben, bei der mit zunehmender Luftreibung die Gesamtgeschwindigkeit ein Maximum erreicht. In dieser Endphase maximaler Abbremsung und Energiedissipation findet in den meisten Fällen auch das Verglühen statt. Wir

⁵Dies wurde insbesondere an der Bonner Sternwarte 1957 durch P. LENGGRÜSSER, H.G. BENNEWITZ und W. PRIESTER durchgeführt.

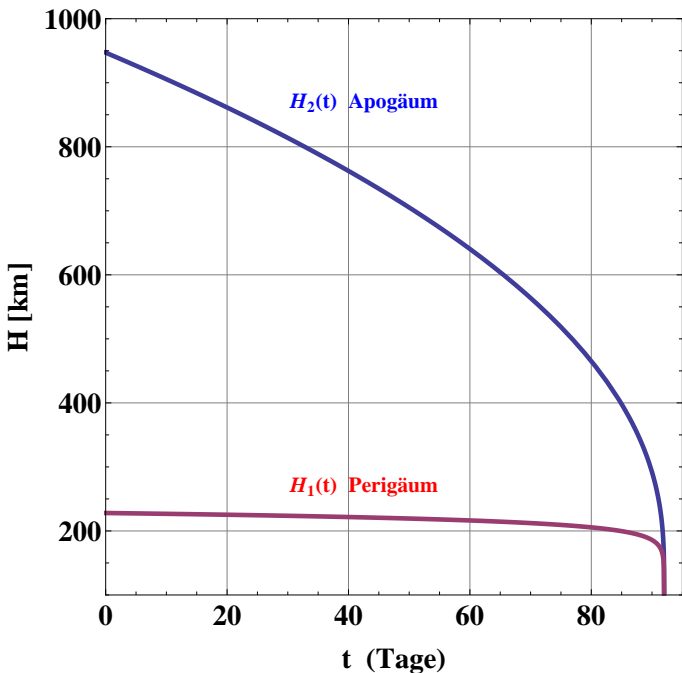


Fig. 5.15: Der dramatische Bahnzerfall von Sputnik 1 vom 4. Oktober 1957 bis zum 4. Januar 1958, dem Tag des Verglühens in der Erdatmosphäre. Berechnet mit den Funktionen (5.85) und (5.86).

wollen diese wichtige kritische Höhe H_K maximaler Orbitalgeschwindigkeit genauer verstehen und analytisch abschätzen. Letztendlich bestimmt diese Höhe die obere Grenze der Erdatmosphäre zum Weltraum. Dazu formulieren wir die Bewegungsgleichung (5.58) in Polarkoordinaten. Es gilt für die Radialkomponente

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\varphi}^2 - k[r]\dot{r}\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \quad (5.88)$$

sowie für die Azimutalkomponente

$$r\ddot{\varphi} + \left\{ 2\dot{r} + k[r]r\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \right\} \dot{\varphi} = 0. \quad (5.89)$$

Wie in der klassischen Ballistik ist es auch hier günstig, die Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_t gemäß

$$v_r = \dot{r}; \quad v_t = r \dot{\varphi} \quad (5.90)$$

einzuführen. Damit lauten die beiden obigen Bewegungsgleichungen

$$\dot{v}_r + \frac{GM}{r^2} - \frac{v_t^2}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_r = 0 \quad (5.91)$$

und

$$\dot{v}_t + \frac{v_r v_t}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_t = 0. \quad (5.92)$$

Da die Bahn monoton abfallend ist, können wir analog wie im ALLEN - EGGERS Modell die Ableitung nach der Zeit durch die Ableitung nach dem Radius r ersetzen. Mit

$$\frac{d}{dt} = v_r \frac{d}{dr} \quad (5.93)$$

folgen so die Differentialgleichungen

$$v_r v_r' + \frac{GM}{r^2} - \frac{v_t^2}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_r = 0 \quad (5.94)$$

und

$$v_r v_t' + \frac{v_r v_t}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_t = 0, \quad (5.95)$$

wobei ein Strich eine Ableitung nach r bedeutet.

Wir wollen diese Gleichungen jetzt mit der Störentwicklung

$$\begin{aligned} v_r &= k f_1[r] + k^3 f_3[r] + \dots; \\ v_t &= \sqrt{\frac{GM}{r}} + k^2 f_2[r] + k^4 f_4[r] + \dots \end{aligned}$$

approximativ lösen. Wir nehmen dabei an, dass in (5.95) im asymptotischen Limes $r \rightarrow \infty$ für v_t die Lösung $\sqrt{GM/r}$ gilt. Wir erhalten in erster Ordnung k mit (5.68) genau die radiale Driftgeschwindigkeit (5.65)

$$v_r = -2k \sqrt{GM r} \exp\left(\frac{R-r}{H_S}\right) \quad (5.96)$$

einschließlich des Faktors 2 vor dem ballistischen Parameter k , den wir zu Beginn aus einer energetischen Betrachtung gewonnen hatten. Wird diese Gleichung jetzt in die erste Bewegungsgleichung (5.94) eingesetzt, so erhält man für die Tangentialgeschwindigkeit bis einschließlich zweiter Ordnung in k

$$v_t^2 = \frac{GM}{r} \left(1 - 4 \frac{k^2 r^3}{H_S} \exp \left(2 \frac{R-r}{H_S} \right) + \dots \right). \quad (5.97)$$

Die Änderung der tangentialen Geschwindigkeit ist somit ein Effekt zweiter Ordnung in k . Der obige Ausdruck für v_t wird maximal, wenn für r die Bedingung

$$r = R + \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{2 k^2 H_S^2 (4 r^4 - 5 H_S r^3)}{H_S^4} \right] \quad (5.98)$$

erfüllt ist. Setzen wir in niedrigster Ordnung $r = R + H_K$, so folgt in erster rekursiver Iteration für H_K der genäherte Wert

$$\boxed{H_K \sim 2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln [\mathbf{C} k H_S] + \dots} \quad (5.99)$$

wobei \mathbf{C} eine Konstante nahe eins darstellt. Ausgedehnte Computersimulationen mit den Gleichungen (5.94) und (5.95) zeigen, dass die obige Formel (5.99) mit den numerischen Werten recht gut übereinstimmt. Wie man sieht, hängt die kritische Höhe H_K nur vom ballistischen Parameter k , dem Erdradius R und der Skalenhöhe H_S der Atmosphäre ab. Die Formel erinnert an das ALLEN-EGGERS Modell und an die Beziehungen im vorhergehenden Kapitel über den *Skip-Reentry*. Der Hauptteil der obigen Formel, der nicht vom ballistischen Koeffizienten k abhängt, ist mit $R = 6371$ km und $H_S = 8$ km von der Größenordnung

$$2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] \sim 107 \text{ km} \quad (\text{Erde}). \quad (5.100)$$

In dieser Höhe, die hier nur vom Radius R des Planeten und der Skalenhöhe H_S seiner Atmosphäre abhängt, befindet sich die sogenannte **Kármán-Linie**, die in den 1950er Jahren als gedachte Grenze der oberen Erdatmosphäre von der *Fédération Aéronautique Internationale* nach

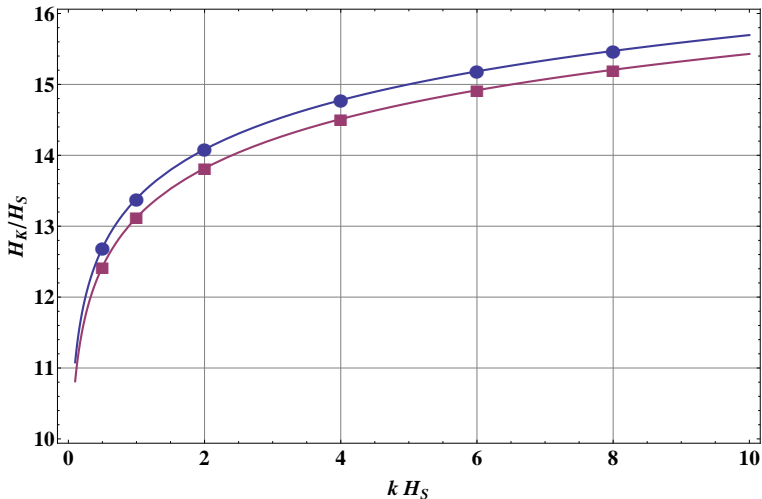


Fig. 5.16: Vergleich von numerischen Simulationen (Markierungen) mit der analytischen Formel (5.99) für die kritische Höhe H_K , bei der die Orbitalgeschwindigkeit eines Satelliten bei einer kreisförmigen Bahn maximal wird. Die obere Kurve entspricht $H_S = 7$ km und die untere $H_S = 8$ km. Für den Erdradius wurde dabei $R = 6371$ km genommen.

einem Vorschlag von T. v. KÁRMÁN bei 100 km festgelegt wurde⁶. Die Abschätzung für die Marsatmosphäre liefert übrigens bei der Kármán-Linie mit $R = 3390$ km und $H_S = 11$ km den überraschend hohen Wert

$$2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] \sim 126 \text{ km} \quad (\text{Mars}). \quad (5.101)$$

Multiplizieren wir schließlich (5.94) mit v_r , (5.95) mit v_t und addieren beide Gleichungen, so erhalten wir mit $\mathbf{v}^2 = v_r^2 + v_t^2$

$$v_r \frac{d|\mathbf{v}|}{dr} + \frac{GM}{r^2} v_r + k[r] |\mathbf{v}|^3 = 0. \quad (5.102)$$

⁶THEODORE VON KÁRMÁN (1881 - 1963) war ein ungarisch-amerikanischer Physiker und Luftfahrttechniker. Er gilt als Pionier der modernen Aerodynamik und der Luftfahrt- und Raketenforschung. In der Liste der damaligen Kommission tauchen auch Namen wie W. von Braun, E. Eula, V.N. Sokolsky, B. Genty und R.B. Dillaway auf.

Am Abstiegsunkt maximaler Geschwindigkeit gilt dann die spezifische Energiebilanz

$$\frac{GM}{r_c^2} v_r + k[r_c] |\mathbf{v}|^3 = 0. \quad (5.103)$$

Am Umkehrpunkt ist also die zeitliche Abnahme der spezifischen Gravitationsenergie gleich dem dissipativen Energieverlust durch Luftreibung. Die radiale Sinkgeschwindigkeit ist dann auf den halben theoretischen Wert von (5.96) gesunken. Die gleiche Bilanz gilt später bei einer konstanten Sinkgeschwindigkeit von $\sqrt{g/k}$ auch in den unteren Atmosphärenschichten .

6 Raketenballistik

Schon um das 1045 kennt man in China das Prinzip, mit Pulver *Lanzen des Feuers* auf Gegner zu schießen. Auch in Indien sind zu dieser Zeit Raketen bekannt. Nach Europa gelangen sie spätestens 1379, wo sie in Italien bei kriegerischen Auseinandersetzungen zum Einsatz kamen. Die eigentliche wissenschaftliche Erforschung begann dann in Russland im 19ten Jahrhundert. Der heute wenig bekannte russische Artillerieleutnant KONSTANTIN KONSTANTINOV (1817-1871) entwickelte 1844 eine Vorrichtung, um die Geschwindigkeit eines Flugkörpers an jedem Punkt seiner Bahn zu vermessen. Gleichzeitig erfand er ein ballistisches „Raketenpendel“, um die Impulsänderungen während des Abbrennens der Rakete zu untersuchen. Die eigentliche Entwicklung der modernen Raketentechnik fand dann erst im 20sten Jahrhundert während der beiden Weltkriege statt.

In der bodennahen *Raketenballistik* spielen drei Kräfte eine Rolle: 1) Impulsänderung durch Rückstoß, 2) Luftwiderstand, und 3) Gravitation. Vernachlässigt man zunächst die Gravitation, so lautet die Bewegungsgleichung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$

$$\dot{\mathbf{v}} + \left(k[y] v^2 + c_g \frac{d}{dt} \ln[m[t]] \right) \frac{\mathbf{v}}{v} = 0, \quad (6.1)$$

wo c_g die Ausströmgeschwindigkeit der Gase und $m[t]$ die durch das Abbrennen des Treibstoffes zeitlich abnehmende Masse der Rakete bezeichnet. Der ballistische Koeffizient k ist natürlich von der Höhe y der Rakete in der Atmosphäre abhängig. Eine optimal fliegende *Rakete* muss dabei während des Fluges in der Erdatmosphäre ihre Längsachse immer *exakt parallel zur momentanen Bahntangente* orientieren, um die aerodynamische Belastung zu minimieren. man kann auch sagen, dass der *Anstellwinkel* praktisch Null sein muss. Diese Voraussetzung werden wir im folgenden Kapitel machen.

Im Sport tritt bezüglich des Anstellwinkels ein analoges Problem beim **Speerwurf** auf. Seit 1986 wurde der Schwerpunkt gegenüber dem Druck-



Fig. 6.1: Start der Saturn V (Apollo 11) im Jahre 1969. Wenn die Schallgeschwindigkeit überschritten ist, tritt am Flugkörper ein eigenartiges Phänomen auf, die sogenannte **Prandtl-Glauert-Kondensationswolke**. Es handelt sich hier um kondensierte Wassertropfen hinter der Überschall - Schockwelle.

punkt, wo die aerodynamischen Kräfte angreifen, mehrere Zentimeter nach vorne verschoben. Die heutigen Speere sind daher eher „ballistisch“, während früher die Speere eher „aerodynamisch“ waren, weil die Längsachse gegenüber der momentanen Bahrtangente eine stärkere Abweichung aufwies und so ein größerer Auftrieb erzeugt wurde. Bei einer Rakete könnte aber ein von Null verschiedener Anstellwinkel („*angle of attack*“) dazu führen, dass die aerodynamischen Kräfte die dünne Raketenhülle zerstören.

Moderne Geschosse (**Base Bleed Geschosse**) besitzen heutzutage standardmäßig am Heck einen pyrotechnische Gasantrieb, um den Luftwiderstand durch den sogenannten Bodensog zu verringern. Dadurch kann die Reichweite insbesondere der Küstenartillerie um 20 - 30 Prozent erhöht werden. Anstatt Rotationsstabilisierung werden zudem gelenkte aerodynamische Flügel am Geschoss eingesetzt, um durch GPS - Steuerung das Ziel genau zu erfassen.

6.1 Aufstiegsbahn einer Rakete

Eine zentrale Frage der Raketenballistik ist das Problem, mit welcher Flugbahn man optimal von der Erdoberfläche in eine Erdumlaufbahn gelangt. Umgekehrt stellte sich bei der Mondlandung 1969 das Problem, wie man aus einer Kreisbahn oder aus einer Ellipsenbahn um den Mond optimal durch Raketenbremsung auf diesem Körper landet, der ja von keiner Lufthülle umgeben ist. Beide ziemlich komplizierten dynamischen Probleme¹ hängen eng miteinander zusammen und sollen hier in einem *idealisierten analytischen* Modell diskutiert werden.

HERMANN OBERTH (1894-1989) bezeichnete schon 1929 in seinem Buch *Wege zur Raumschiffahrt* diese nach Osten geneigten optimalen Aufstiegsbahnen als *Synergiekurven* der Rakete ([35])². Allerdings entspricht diese *Synergiekurve* nicht exakt der von Ihm vorher definierten sogenannten **Raketenlinie**, bei der die Richtung der Raketenlängsachse immer parallel zur momentanen Bahntangente liegt. Beim Flug durch eine Atmosphäre wird dies durch passive Leitwerke automatisch erreicht. In einer Fußnote seines Buches von 1929 auf Seite 177 bemerkte er dann auch ([35]): *Man hat mir hier entgegengehalten, dass das Raumschiff am besten auf einer reinen Raketenlinie aufsteigen würde, weil dabei dauernd*

¹Im Oktober 2012 berichtete J. VON PUTTKAMER (1933-2012) bei einem Vortrag in Darmstadt (ESOC/ESA) einige Anekdoten über das Vorgehen in den frühen 1960er Jahren bei der NASA, komplizierte Aufstiegsbahnen von Raketen mithilfe der damaligen Rechnertechnik (zunächst mechanische, dann elektrische Walzenrechner) zu berechnen.

²Auf Seite 171 seines Werkes von 1929 schreibt OBERTH: *Die Kurve, die das Raumschiff bei dieser Art des Aufstieges beschreibt, will ich Synergiekurve nennen. Sie zerfällt naturgemäß in vier Abschnitte: 1. Gradliniger schräger Aufstieg, 2. Umbiegung der schrägen Fahrtrichtung in die Waagerechte, 3. waagerechte Fahrt bis zur Erreichung der zirkulären Geschwindigkeit, 4. Von da bis zur Erreichung der Grundgeschwindigkeit Fahrt auf einer Raketenlinie.*

$\cos[\alpha] = 1$ sei, während bei der Synergiekurve die Düse wiederholt einen Winkel mit der Fahrtrichtung bilden müsse.... OBERTH bevorzugte für den Start einer Rakete eine schräge Aufstiegsbahn, weil dadurch seiner Meinung nach die Gravitationsverluste etwas vermindert werden. Die konsistente Berechnung einer zunächst *senkrechten* Aufstiegsbahn eines Raumschiffes in eine dann *horizontale* Kreisbahn um die Erde in Form einer reinen “*Raketenlinie*” konnte damals von OBERTH aufgrund mathematischer Schwierigkeiten nicht durchgeführt werden. Der folgende Abschnitt wird diese Probleme deutlich aufzeigen.

Ausgangspunkt sind wieder unsere reduzierten konsistenten Bewegungsgleichungen (5.1) und (5.2). Für die *idealisierte* Aufstiegsbahn einer Rakete schreiben wir sie jetzt in der modifizierten Form

$$\ddot{x} = a_s \frac{\dot{x}}{v} \quad (6.2)$$

$$\ddot{y} = a_s \frac{\dot{y}}{v} - g + \frac{\dot{x}^2}{R} \quad (6.3)$$

in der $a_s \rightarrow a_s[t]$ zunächst eine von der Zeit abhängige Schubbeschleunigung der Rakete, g die mit der Höhe als konstant angenommene Gravitationsbeschleunigung, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ und R den Erdradius bezeichnen. Der höhenabhängige Luftwiderstand $k \rightarrow k[y]$ und eventuell vorhandene aerodynamische Kräfte spielen nur in den unteren Atmosphärenschichten eine Rolle und sollen hier vernachlässigt werden³. Der Winkel $\theta = \arctan(\dot{y}/\dot{x})$ beschreibt sowohl den zeitabhängigen Neigungswinkel der Rakete als auch die identische momentane Neigung der Bahntangente relativ zur Erdoberfläche. Man definiert

- **angle of attack:** (Anstellwinkel zur Luftströmung): Winkel zwischen Körperlängsachse und Geschwindigkeitsvektor - bei OBERTH mit α bezeichnet.
- **pitch angle:** (Nickwinkel): Winkel zwischen der Körperlängsachse der Rakete und dem Horizont .
- **flight path angle:** (Flugpfadwinkel): Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der Flugbahn und dem Horizont.

³Der Luftwiderstand in den unteren Atmosphärenschichten der aufsteigenden Rakete ist für das seltsame Phänomen verantwortlich, dass Astronauten (Kosmonauten) beim plötzlichen Brennschluss der ersten Stufe unerwartet in die Gurte gedrückt werden - die Rakete also bis zur Zündung der zweiten Stufe wieder gebremst wird.



Fig. 6.2: Bei der ballistischen Aufstiegsbahn einer Rakete (hier eine russische Sojus 2-1A vom neuen Kosmodrom Wostotschnij im Jahre 2016) ist der **pitch angle** (Neigungswinkel θ) immer exakt gleich dem Winkel des momentanen Geschwindigkeitsvektors (**flight path angle**) über dem Erdboden. Die Schubbeschleunigung an der Rakete wirkt also wie eine inverse Luftreibung. (Bild: sputnik)

An den obigen Bewegungsgleichungen sieht man, dass hier die exakte Gleichheit von dem **pitch angle** und dem **flight path angle** vorausgesetzt wird. Der **angle of attack** ist also immer null. Der zeitliche Verlauf dieses Winkels θ zur Bodenfläche wird durch die dynamischen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der Bahn bestimmt. Man spricht hier auch von einem **Gravity Turn**. Der Neigungswinkel der Rakete muss mit einer aktiven Steuerung ständig nachkorrigiert werden (**Gimbaling**). Während der Neigungsphase zeigt der Schubvektor nicht exakt auf den Schwerpunkt der Rakete. Die optimierte Aufstiegsbahn einer Rakete gehört aus den oben erwähnten Gründen zur Klasse der ballistischen Kurven, die OBERTH im Jahre 1929 als reine *Raketenlinien* bezeichnet hat.

Multiplizieren wir wieder (6.2) mit \dot{x} , (6.3) mit \dot{y} , so folgt mit (4.3) erweitert

$$\dot{v} - a_s + \left(g - \frac{u^2}{R} \right) \sin[\theta] = 0, \quad (6.4)$$

in der wieder $u = v \cos[\theta]$ bedeutet. Des weiteren multiplizieren wir (6.2) mit \dot{y} , dann (6.3) mit \dot{x} und subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung, so erhalten wir wegen (4.5) in Modifikation zu (4.9) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + \left(g - \frac{u^2}{R} \right) \cos[\theta] = 0. \quad (6.5)$$

Dies sind die globalen ballistischen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitsänderung und Winkeländerung einer Rakete der Nähe der Erde bei hohen Geschwindigkeiten.

Wegen $u = \dot{x}$ folgt aus (6.2) und der Kettenregel bei Differentiation

$$\dot{u} = \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \equiv a_s \cos[\theta] \quad (6.6)$$

Elimination von $d\theta/dt$ durch (6.5) führt unmittelbar zu der Differentialgleichung

$$\left(g - \frac{u^2}{R} \right) \cos[\theta] \frac{du}{d\theta} + a_s u = 0. \quad (6.7)$$

Auch hier erweist es sich wieder als günstig, anstatt des vertikalen Neigungswinkel θ die Größe z gemäß $\sin[\theta] = \tanh[z]$ einzuführen. Dann ergibt sich

$$\left(g - \frac{u^2}{R} \right) \frac{du}{dz} + a_s u = 0. \quad (6.8)$$

Normieren wir wieder die Geschwindigkeit u über Grund mit der Kreisbahngeschwindigkeit

$$u = \sqrt{gR} \mathbf{U}[z], \quad (6.9)$$

so gelangen wir zu der idealisierten Gleichung

$$\boxed{(1 - \mathbf{U}^2) \frac{d\mathbf{U}}{dz} + \frac{a_s}{g} \mathbf{U} = 0.} \quad (6.10)$$

für die Funktion $\mathbf{U}[z]$ einer ballistischen Rakete. Wir nehmen dabei an, dass a_s während des Fluges konstant ist. Allgemeinere Fälle müssen numerisch integriert werden. Die Variable z hängt hier wegen (5.9) mit dem Neigungswinkel θ der Rakete zum Erdboden zusammen.

Der Raketenpionier OBERTH bezeichnete Aufstiegsbahnen von Raketen mit geringstem Energieaufwand mit dem Wort **Synergiekurven**. Die Lösungen der obigen Differentialgleichung beschreiben allerdings mehr die von ihm postulierten **Raketenlinien**, bei denen der Anstellwinkel zur Luftströmung oder zur momentanen Bahntangente immer null ist. Letztendlich handelt es sich also um ballistische Kurven. Der Neigungswinkel θ der Raketenlängsachse oder der Bahntangente zum Boden ist dabei durch die GUDERMANN - Funktion $\mathbf{gd}[z] = \arctan[\sinh[z]]$ gegeben. Denn es gilt

$$\sin[\theta] = \tanh[z], \quad \theta = \arctan[\sinh[z]], \quad d\theta = \frac{dz}{\cosh[z]}, \quad (6.11)$$

Für die Umkehrung nach der Hilfsvariablen z folgt

$$z = \ln[\sec[\theta] + \tan[\theta]]. \quad (6.12)$$

Mit (5.4) gilt dabei für die Hilfsvariable $z \rightarrow z[t]$

$$\cosh[z] \mathbf{U}[z] \frac{dz}{dt} + \sqrt{\frac{g}{R}} (1 - \mathbf{U}[z]^2) = 0. \quad (6.13)$$

Bei einem Raketenanstieg ist eine wichtige Randbedingung für die Funktion $\mathbf{U}[z]$ bekannt. Beim Erreichen einer kreisförmigen Zielbahn muss sowohl $\theta = 0$ als auch die Geschwindigkeit u gleich \sqrt{gR} sein. Daraus folgt aber als Randbedingung für die Funktion (6.10) $\mathbf{U}[0] = 1$. Beim Start der Rakete ist aber wegen (6.12) $z \rightarrow \infty$. Der Wertebereich von θ ist dann $\theta \in [0, \pi/2]$ und der von $z \in [0, \infty]$. Aus (6.11) und (6.12) folgt mathematisch nebenbei auch das interessante Integral

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\cosh[z]} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Differentialgleichung (6.10) ist fundamental für die Beschreibung einer ballistischen Aufstiegsbahn einer Rakete. In ihr könnte die Beschleunigung a_s noch eine beliebige Funktion von z sein.

Eine Integration der obigen Gleichung (6.10) mit $a_s \equiv \textit{konstant}$ liefert zunächst

$$\ln[\mathbf{U}] - \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{a_s}{g} z = C.$$

Mit der Randbedingung $\mathbf{U}[0] = 1$ läßt sich diese Gleichung in der Form

$$\ln[\mathbf{U}^2] - \mathbf{U}^2 = -1 - 2 \frac{a_s}{g} z$$

schreiben. Die Auflösung dieser transzendenten Gleichung nach $\mathbf{U}[z]$ gelingt mit dem oberen Zweig der LAMBERTSchen \mathbf{W} - Funktion. Die Lösung lautet einfach

$$\boxed{\mathbf{U}[z] = \sqrt{-\mathbf{W}_0[-e^{-1-2\alpha z}]},} \quad (6.14)$$

wobei zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a_s}{g} \quad (6.15)$$

gesetzt wurde und die Variable z durch (6.12) direkt mit der Neigung θ der Bahntangente (Raketenachse) zum Boden zusammenhängt. Die ungewöhnliche Funktion $\mathbf{W}_0[\xi]$ ist definiert als der obere Zweig der LAMBERTSchen Funktion $\mathbf{W}[\xi]$, gegeben als Lösung der Funktionalgleichung

$$\mathbf{W}[\xi] e^{\mathbf{W}[\xi]} = \xi. \quad (6.16)$$

Die Funktion $\mathbf{U}[z]$ ist der entscheidende Schlüssel, um in unserem idealisierten analytischen Modell die für *Aufstiegsbahnen* und auch *Mondlandebahnen* wichtigen Kenngrößen schnell zu überblicken. So folgt für die Geschwindigkeit über Grund sofort

$$\dot{x} = \sqrt{gR} \mathbf{U}[z] \quad (6.17)$$

Wegen $\dot{y} = \dot{x} \tan[\Theta]$ folgt für die vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$\dot{y} = \sqrt{gR} \mathbf{U}[z] \sinh[z] \quad (6.18)$$

Mit (6.12) definieren beide Komponenten den Hodographen unserer optimalen Raketenaufstiegsbahn; oder - nach OBERTH - den der Raketenlinie. In Figur (6.3) sind diese für zehn Werte des Parameters α graphisch dargestellt. Für die Gesamtgeschwindigkeit v gilt nun einfach

$$v = \sqrt{gR} \mathbf{U}[z] \cosh[z]. \quad (6.19)$$

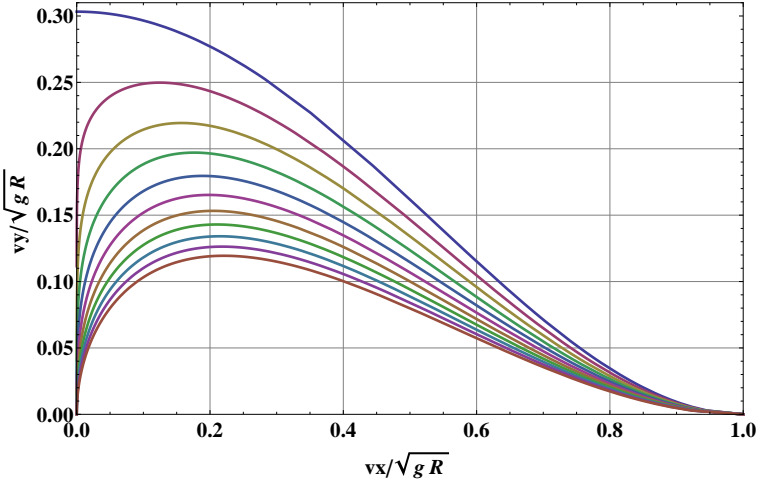


Fig. 6.3: Hodographen ballistischer Aufstiegsbahnen einer Rakete mit Beschleunigungen von $\alpha = 1$ (singulär; oberste Kurve) bis $\alpha = 2$ (unterste Kurve) in Schritten von 0.1. Die horizontale ($v_x = \dot{x}$) und die vertikale ($v_y = \dot{y}$) Geschwindigkeitskomponente sind in Einheiten der zu erreichenden Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} dargestellt. Die Rakete startet bei einem Winkel $\theta = 90^\circ$ mit der Geschwindigkeit $(v_x, v_y) = (0, 0)$ und gelangt bei einer Neigung von $\theta = 0^\circ$ in eine Umlaufbahn mit der Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} . Singulär ist der Wert $\alpha = 1$, bei dem die Rakete die Startrampe nicht verlassen und so auch nicht der „gravity turn“ in die horizontale Richtung stattfinden kann.

Um den zeitlichen Verlauf der Aufstiegsbahn analytisch zu berechnen, nehmen wir die Gleichung (5.4), setzen den Ausdruck θ als Funktion von z ein und erhalten so mit der Differentialgleichung (6.10)

$$\sqrt{\frac{g}{R}} dt = -\frac{\mathbf{U}[z] \cosh[z]}{1 - \mathbf{U}^2[z]} dz \equiv \frac{1}{\alpha} \mathbf{U}'[z] \cosh[z] dz. \quad (6.20)$$

Die Aufstiegszeit der Rakete bis in den Orbit ergibt sich daraus durch partielle Integration zu

$$\frac{a_s T}{\sqrt{gR}} = 1 + \int_0^\infty \mathbf{U}[z] \sinh[z] dz. \quad (6.21)$$

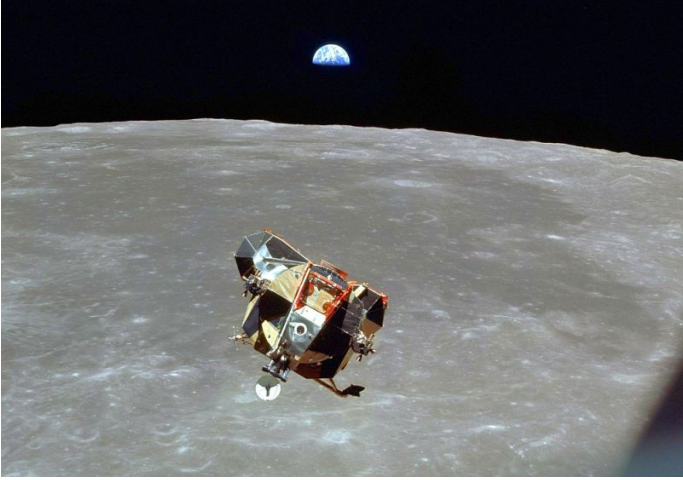


Fig. 6.4: Die Aufstiegsbahn und die dazu symmetrische Abstiegsbahn der Mondlandefähre Eagle im Juli 1969 gehörte zur Klasse ballistischer Flugbahnen, die trotz fehlendem Luftwiderstand genau berechnet werden mussten. Anstellwinkel θ und Schubbeschleunigung waren genau aufeinander abgestimmt, um aus einer bestimmten Kreisbahn der Höhe H über der Mondoberfläche zielgenau in einer Entfernung W längs der Mondoberfläche mit der Geschwindigkeit Null zu landen. (Bild:NASA 1969)

Mit Hilfe der Eigenschaften der lambertschen \mathbf{W} -Funktion läßt sich dies auch (siehe Anhang über die Lambertsche W -Funktion)

$$\begin{aligned} \frac{a_s T}{\sqrt{gR}} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{n-1}}{n!} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})}}{4(n + \frac{1}{2})^2 \alpha^2 - 1} \\ &= 1 + \frac{28}{45} \alpha^{-2} + \frac{301648}{496125} \alpha^{-4} + \dots \end{aligned}$$

schreiben. Man sieht hier anschaulich, dass das Produkt $a_s T$ nicht einfach gleich der Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} ist, weil die Rakete beim senkrechten Start erst noch die Anziehung des Planeten überwinden muss.

Eine wichtige Frage betrifft die erreichbare Höhe H der kreisförmigen Zielbahn um den Planeten. Mit der Formel für \dot{y} und (6.20) erhalten wir

zunächst

$$dy = \frac{R}{2\alpha} \mathbf{U}[z] \mathbf{U}'[z] \sinh(2z) dz. \quad (6.22)$$

Partielle Integration von liefert schließlich das wichtige Resultat

$$\boxed{\frac{H}{R} = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \mathbf{U}^2[z] \cosh[2z] dz.} \quad (6.23)$$

Diese Bilanzgleichung bestimmt implizit die Stärke der benötigten Schubbeschleunigung $a_s = \alpha g$, um in eine Kreisbahn von vorgeschriebener Höhe H ($H \ll R$) über einer Planetenoberfläche zu gelangen. Umgekehrt bestimmt diese Gleichung bei einer Mondlandung die Bremsbeschleunigung a_s , die man in einer Kreisbahn bei vorgegebener Flughöhe H über der Mondoberfläche zu einer Punktlandung benötigt. Das obige Integral besitzt analytisch die interessante Reihendarstellung. Mit (6.14) und der Reihendarstellung für $-\mathbf{W}_0[-z]$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{H}{R} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{e^{-n}}{n^2 \alpha^2 - 1} \\ &= \frac{1}{8} \alpha^{-2} + \frac{7}{72} \alpha^{-4} + \frac{96547}{1036800} \alpha^{-6} + \dots \end{aligned}$$

Die Reihenkoeffizienten streben hier der Grenze $1/(4e)$ zu. Man sieht hier, wie wenig „Hubarbeit“ $a_s H$ die Rakete im Vergleich zur spezifischen kinetischen Energie $1/2 g R$ verrichten muss, um in die Höhe H zu gelangen. Durch Umkehrung der Reihe nach der Brenndauer T der Triebwerke und Einsetzen in die obige Formel für die erreichte Höhe H erhält man die bemerkenswerte Formel

$$\boxed{H = \frac{1}{8} g T^2 \left\{ 1 - \frac{7}{15} \frac{g T^2}{R} + \frac{9629311}{31752000} \left(\frac{g T^2}{R} \right)^2 - \dots \right\}} \quad (6.24)$$

Hier taucht wieder der ballistische Term $g T^2/8$ der Wurfparabel auf. Die erreichbare Höhe H der Kreisbahn über der Erdoberfläche hängt in unserem Modell also nur von der operativen Brenndauer T der Triebwerke ab.

Bei den Mondlandungen in den Jahren 1969-1972 benötigt man eine weitere wichtige Kenngröße der Flugbahn: Die Länge des Bahnbogens über der Mondoberfläche vom Startpunkt bis zum Eintritt in die Kreisbahn. Zunächst gilt wieder mit den Grundgleichungen

$$dx = \frac{R}{\alpha} \mathbf{U}[z] \mathbf{U}'[z] \cosh[z] dz. \quad (6.25)$$

Wiederum ergibt sich durch eine partielle Integration die Bogenweite W zu

$$\frac{W}{R} = \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \int_0^\infty \mathbf{U}^2[z] \sinh[z] dz \right). \quad (6.26)$$

Auch diese Größe hängt nur von α ab. Alternativ gilt für die Reichweite auch die analytische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{W}{R} &= \frac{1}{2} \alpha^{-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \frac{e^{-n}}{4n^2\alpha^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^{-1} + \frac{5}{96} \alpha^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Mit der Approximation für die Schubbeschleunigung a_s ergibt sich so die obere Abschätzung

$$\boxed{W \approx \sqrt{2HR}} \quad (6.27)$$

Für die zeitliche Änderung des Neigungswinkels θ der Rakete (*pitch angle* = *flight path angle*) ergibt sich mit (5.4) der Ausdruck

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \frac{1 - \mathbf{U}^2[z]}{\mathbf{U}[z] \cosh^2[z]} \quad (6.28)$$

Mathematisch interessant ist hier das Verhalten des sogenannten *pitch-over* am Startplatz $z \rightarrow \infty$. Hier gilt mit der asymptotischen Formel für $\mathbf{W}_0[\xi]$

$$\mathbf{U}[z]_{z \rightarrow \infty} \sim \exp \left[-\frac{1}{2} - \alpha z \right] \quad (6.29)$$

α	H[km]	W[km]	T[sec]
1.5	569.6	2233.1	801.9
1.6	463.4	2079.9	702.7
1.7	387.2	1947.1	628.8
1.8	329.9	1830.9	571.2
1.9	285.5	1728.2	524.6
2.0	250.1	1636.7	486.0
2.1	221.4	1554.7	453.4
2.2	197.6	1480.7	425.4
2.3	177.6	1413.5	401.0
2.4	160.7	1352.3	379.5
2.5	146.2	1296.2	360.4
2.6	133.6	1244.7	343.3
2.7	122.7	1197.2	327.9
2.8	113.1	1153.2	313.9
2.9	104.6	1112.4	301.2
3.0	97.0	1074.4	289.5

Tab. 6.1: Wichtige Kenndaten für eine ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete von der Erdoberfläche in eine kreisförmige Umlaufbahn als Funktion der **konstanten** Schubbeschleunigung $\alpha = a_s/g$. Die Daten wurden mit Hilfe der Integrale (6.23), (6.26) und (6.21) gewonnen. Die physikalischen Konstanten sind $R = 6371$ km und $g = 9.81$ m/s².

und daher

$$\frac{d\theta}{dt}_{z \rightarrow \infty} \sim -4\sqrt{e} \sqrt{\frac{g}{R}} e^{(\alpha-2)z} \quad (6.30)$$

Anhand dieser Formel sieht man deutlich, dass sich am Startplatz der Rakete Aufstiegsbahnen mit konstanter Schubbeschleunigung a_s grundsätzlich in zwei Bereiche aufteilen: I.) $1 < \alpha < 2$ und II.) $\alpha > 2$. Im ersten Bereich starte die Rakete mit einem „pitch - over“ von Null, im zweiten Fall beginnt das „pitch - over“ schon am Startplatz mit einem singulären Wert. Am Grenzwert $a_s = 2g$ ($\alpha = 2$) gilt

$$\frac{d\theta}{dt}_{\alpha=2} = -4\sqrt{e} \sqrt{\frac{g}{R}} \sim 0.47^\circ/s \quad (6.31)$$

Schon 20 Sekunden nach dem *take off* muss sich die Rakete schon fast 10 Grad aus der Vertikalen gedreht haben. Sinnvolle Aufstiegsbahnen



Fig. 6.5: Die Aufstiegsbahn einer Rakete (Space Shuttle) ist eine genau vorgegebene Flugbahn, die durch Schwenkung der Triebwerke (*gimbaled thrust*) genau verfolgt wird.

in einem Modell mit $a_s = \textit{konstant}$ haben daher α - Parameter knapp unterhalb von $\alpha < 2$. Die alte SaturnV - Trägerrakete als auch die neueren *ARIANE*-Raketen hielten bzw. halten diese Bedingung tatsächlich ein.

Um die Flugbahn der Rakete kurz nach dem Start als Funktion der Zeit analytisch zu beschreiben, gehen wir auf (6.20) zurück und entwickeln asymptotisch

$$\sqrt{\frac{g}{R}} dt = -\frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right] dz. \quad (6.32)$$

Das Integral für kleine Zeiten t lautet dann ($z \gg 1$)

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t \simeq \frac{1}{2(\alpha - 1)} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right]. \quad (6.33)$$

In analoger Form ergibt sich aus (6.17) und (6.18) asymptotisch

$$\dot{x} \simeq \sqrt{gR} \exp \left[-\frac{1}{2} - \alpha z \right] \quad (6.34)$$

und

$$\dot{y} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{gR} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right]. \quad (6.35)$$

Durch Elimination der Variablen z und durch Einführung der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (6.36)$$

erhalten wir im Einzelnen ($\tau \rightarrow 0$)

$$\dot{x} = \sqrt{gR} (\sqrt{e})^{\frac{1}{\alpha-1}} [2(\alpha-1)\tau]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \dots \quad (6.37)$$

und

$$\dot{y} = \sqrt{gR} (\alpha-1)\tau + \dots \quad (6.38)$$

Aus der letzteren Gleichung finden durch Integration nach der Zeit t leicht

$$\frac{y}{R} = \frac{1}{2} (\alpha-1)\tau^2 + \dots \quad (6.39)$$

oder in physikalischen Einheiten

$$y[t] = \frac{1}{2} (a_s - g) t^2 + \dots \quad (6.40)$$

Dies Resultat hätte man auch ohne die asymptotische Analyse hinschreiben können. Schwieriger ist die Integration der x Koordinate. Man erhält

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{2\alpha-1} [2^\alpha \sqrt{e}]^{\frac{1}{\alpha-1}} [(\alpha-1)\tau]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \quad (6.41)$$

Wir führen nun einen Index Q nach

$$Q = \frac{2\alpha-2}{2\alpha-1} \quad (6.42)$$

ein. Mit den dimensionslosen Koordinaten

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R} \quad (6.43)$$

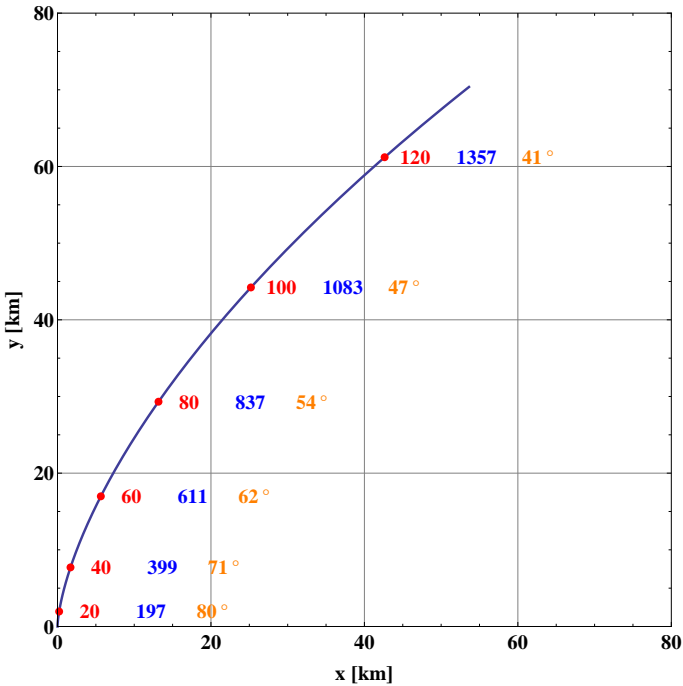


Fig. 6.6: Die Aufstiegsbahn einer Rakete ohne Luftwiderstand im Falle $a_s = 2g \equiv \text{konstant}$. Die roten Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden, die blauen die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde und die orangen Zahlen den Anstellwinkel der Rakete zum Horizont in Grad. Die Rakete erreicht in dieser Aufstiegsbahn nach 483 Sekunden eine Kreisbahn in einer Höhe von etwa 250 km um die Erde.

können wir eine asymptotische algebraische Gleichung für die Aufstiegsbahn einer Rakete für die Umgebung des Startplatzes angeben. Durch Elimination von τ erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$Y \sim \frac{1}{2Q} \left(\frac{1-Q}{2e} \right)^{1-Q} X^Q \quad (6.44)$$

wobei e die Eulersche Zahl bedeutet. Mit $\alpha = 2$ ergibt sich zum Beispiel der Index $Q = 2/3$, für $\alpha = 3/2$ dagegen $Q = 1/2$. Startet die Rakete also

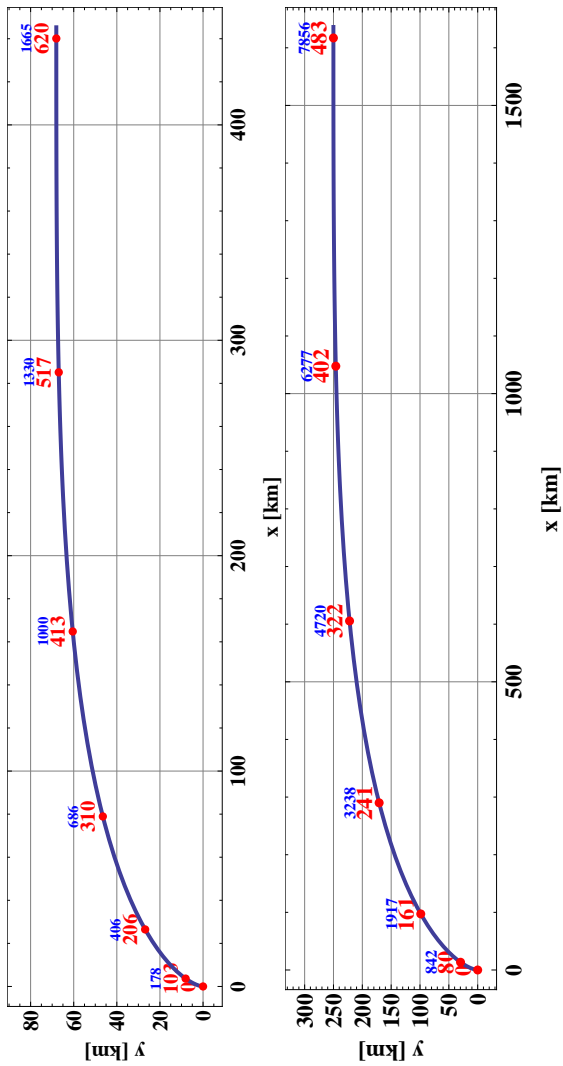


Fig. 6.7: Optimale ballistische Aufstiegsbahnen, nach H. OBERTH auch als Synergiekurve einer Rakete benannt, für den Fall einer konstanten Schubbeschleunigung von $a_s = 2g$ ($\alpha = 2$). Die obere Figur gilt für den Mond mit den Daten $g = 1.62m/s^2$ und $R = 1734km$, die untere Figur für die Erde mit $g = 9.81m/s^2$ und $R = 6371km$. Die roten Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden nach dem Start, die blauen Zahlen die Geschwindigkeit in m/s .

mit $a_s = 1.5g$, so sieht ihre idealisierte ballistische Aufstiegsbahn mit „Gravity Turn“ in den ersten Minuten wie die Funktion $Y \sim \sqrt{X/e/2}$ aus. Die obigen Ergebnisse motivieren dazu, eine genauere analytische Reihenentwicklung der Aufstiegsbahn zumindest für den Grenzfall $a_s = 2g$ abzuleiten. Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man so mit (6.2,6.3) und den asymptotischen zeitlichen Limiten (6.41) und (6.40) für die Aufstiegsbahn vom Startplatz aus

$$x[t] = \frac{4e^{1/2}g^{3/2}}{3R^{1/2}}t^3 - \frac{32e^{3/2}g^{5/2}}{15R^{3/2}}t^5 + \frac{32e^{3/2}g^{7/2}(70e-9)}{315R^{5/2}}t^7 - \dots \quad (6.45)$$

und

$$y[t] = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{4eg^2}{3R}t^4 + \frac{8e(3+20e)g^3}{45R^2}t^6 - \dots \quad (6.46)$$

Ganz im Geiste von L. EULER können wir nun die $x[t]$ - Entwicklung nach der Zeit t umkehren und in die zweite Gleichung für $y[t]$ einsetzen. Auf diese Weise ergibt sich für die ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete mit $a_s = 2g$ in den dimensionslosen Koordinaten (6.43) die Darstellung

$$Y = \frac{3^{2/3}}{4(2e)^{1/3}}X^{2/3} - \frac{3^{4/3}e^{1/3}}{2^{2/3}5}X^{4/3} + \frac{3(25+7e)}{175}X^2 - \dots \quad (6.47)$$

Für die Neigung θ der Raketenachse zur Horizontalen (*gravity turn*) ergibt sich kurz nach dem Start im Falle $a_s = 2g$ die Zeitentwicklung

$$\theta = \frac{\pi}{2} - 4\sqrt{e}\sqrt{\frac{g}{R}}t + \frac{32e^{3/2}g^{3/2}}{3R^{3/2}}t^3 - \dots \quad (6.48)$$

Die idealisierten analytischen Lösungen gelten nur für den Fall $a_s = \textit{konstant}$ und ohne höhenabhängigen Luftwiderstand. Will man diese Effekte für eine detaillierte Berechnung mit einbeziehen, sind nur noch *numerische Modelle sinnvoll*. Dabei müssen wir aufgrund der Randbedingungen für die zu erreichende Orbitalgeschwindigkeit numerisch *in der Zeit rückwärts* rechnen, weil der Startplatz mit der Randbedingung $v[0] = 0$ eine Singularität mit unbekanntem Randbedingungen für die zeitliche Ableitung $v'[0]$ darstellt. Dabei muss man die Endhöhe H für die Kreisbahn so lange variieren, bis die Randbedingungen am Startplatz $y[0] = 0$ erfüllt sind. Gegenüber der obigen analytischen Rechnung ist dieses iterative numerische Rechnen relativ aufwendig.

Eine letzte wichtige Frage bezüglich der Aufstiegsbahn einer Rakete können wir noch mit Hilfe eines einfachen analytischen Modelles beantworten: *In welcher Höhe erfährt die Rakete beim Aufstieg durch die Luftreibung den maximalen aerodynamischen Staudruck ? Von welchen Parametern hängt diese kritische Höhe und ihr zugehöriger kritische Staudruck ab?* Diese wichtige Stelle in der Aufstiegsbahn nennt man auch den **Max Q** Punkt. Er liegt meistens in einer Höhe von 10 - 15 km.

Zur Abschätzung idealisieren wir die Aufstiegsbahn im unteren Bereich durch eine zur Erdoberfläche *senkrechte gerade Linie*. Die dafür geeignete Differentialgleichung entnehmen wir dem Kapitel über den Senkrechtschuß. Mit (4.233) gilt dann für die Aufstiegsbeschleunigung einer Rakete mit der konstanter Schubbeschleunigung a_s

$$v[y] \frac{dv}{dy} + k \exp[-y/H_S] v[y]^2 + g - a_s = 0. \quad (6.49)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $v[0] = 0$ lautet

$$v[y] = \exp[k H_S e^{-y/H_S}] \sqrt{2(a_s - g) H_S (\mathbf{Ei}[-2k H_S] - \mathbf{Ei}[-2k H_S e^{-y/H_S}])} \quad (6.50)$$

Die Funktion $\mathbf{Ei}[x]$ ist wiederum durch den *Cauchy - Hauptwert* des Integrals

$$\mathbf{Ei}[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

definiert. Analytische Untersuchungen zeigen nun das bemerkenswerte Resultat, dass im Grenzfall $b \rightarrow 0$ der Ausdruck

$$k \exp[-y/H_S] v[y]^2$$

unabhängig von der Schubbeschleunigung a_s in der Höhe $H_Q \equiv H_S$ maximal wird. Im Falle $k H_S = 1$ gilt immer noch $H_Q = \mathbf{0.82} H_S$. Mit $H_S \sim 8 \text{ km}$ liegt dies etwas unterhalb den in der Literatur angegebenen Werten. Für die Geschwindigkeit $v[H_Q]$ erhält man Werte, die in der Nähe der kritischen *Schallgeschwindigkeit* der entsprechenden Atmosphäre liegen.

Nach der Raketengleichung gilt im Falle $a_s = \textit{konstant}$

$$a_s = -c_e \frac{d}{dt} \ln[m[t]] \quad (6.51)$$

Die Lösung dieser Gleichung beschreibt die abnehmende Gesamtmasse der Rakete mit der Zeit

$$m[t] = m_0 \exp \left[-\frac{a_s \cdot t}{c_e} \right], \quad (6.52)$$

wobei c_e die effektive Ausströmgeschwindigkeit der Triebwerksgase bezeichnet. Bei der Mondlandung der Apollo - Fähren wurde kurz vor dem Aufsetzen die Beschleunigung auf $a_s = g$ gesetzt, um so ein kontrolliertes Einschweben auf sicheres Terrain zu gewährleisten. in Verbindung mit der Tabelle (6.1) liefert die Zahl $\exp[-a_s \cdot T/c_e]$ eine Abschätzung für das verbleibende Massenverhältnis $m[t]/m(0)$ der Rakete bei Brennschluss. Im Allgemeinen wird dies aber nur durch eine Mehrstufenrakete realisierbar sein.

6.2 Die vertikale Aufstiegsbahn

Im vorhergehenden Kapitel haben wir die Aufstiegsbahn einer Rakete in eine kreisförmige Umlaufbahn um die Erde in einem idealisierten Modell betrachtet. Dabei wurde angenommen, dass sich die Schwerebeschleunigung g mit der Höhe H vom Erdboden nicht ändert. Diese Vereinfachung soll nun für den Spezialfall einer vertikalen Aufstiegsbahn einer Rakete fallengelassen werden. Die Bewegungsgleichung entlang des Radius r vom Erdmittelpunkt lautet jetzt

$$\ddot{r} = a_s - g \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (6.53)$$

in der wieder a_s die als konstant angenommene Schubbeschleunigung der Rakete, g die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche und R den Erdradius bezeichnen. Multiplikation der Gleichung mit \dot{r} und Integration nach der Zeit führt zunächst zu

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = a_s r + g \frac{R^2}{r} + C_1. \quad (6.54)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung, dass zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit der Rakete Null ist. Damit erhalten wir

$$\dot{r}^2 = 2 a_s (r - R) + 2 g R \left(\frac{R}{r} - 1 \right). \quad (6.55)$$

Wir nehmen jetzt an, dass in der Höhe H_b über dem Erdboden die Rakete Brennschluss hat. Die dann erzielte vertikale Geschwindigkeit v_b ergibt sich zu

$$v_k^2 = 2 a_s H_b + 2 g R \left(\frac{R}{R + H_b} - 1 \right). \quad (6.56)$$

Nach Erreichen dieser Höhe H_b fliegt die Rakete noch ohne Antrieb bis zur ihrer Gipfelhöhe H weiter und fällt dann im freien Fall wieder zum Erdboden zurück. Energetisch führt dies auf die alternative Bedingung

$$v_k^2 = 2 g R \left(\frac{R}{R + H_b} - \frac{R}{R + H} \right). \quad (6.57)$$

Durch Differenzbildung ergibt sich so die wichtige Relation

$$\boxed{a_s H_b = g R \left(1 - \frac{R}{R + H} \right)}. \quad (6.58)$$

Die energetische Bedeutung dieser Relation ist offensichtlich. Aus einer bekannten Gipfelhöhe einer Rakete beim Senkrechtsflug können wir also auf das Produkt aus Schubbeschleunigung a_s und Brennschlusshöhe H_b schließen.

Eine weitere Bedingung ergibt sich aus der gesamten Flugzeit der Rakete vom Start bis zum Wiederaufprall auf der Erdoberfläche. Die erste Zeitspanne T_1 ist die Brenndauer der Raketentriebwerke bis in die Höhe H_b . Mit Hilfe von (6.55) erhält man hierfür das Integral

$$T_1 = \int_0^{\frac{H_b}{R}} \frac{\sqrt{R(1+u)} du}{\sqrt{2u(a_s - g + a_s u)}}. \quad (6.59)$$

Bei Höhen H_b bis etwa 1000 km lässt sich das Integral bis auf wenige Sekunden durch den Ausdruck

$$T_1 \sim \sqrt{\frac{2 H_b}{a_s - g}} \quad (6.60)$$

approximieren. Die weiteren Zeitabschnitte T_2 bis zum Gipfelpunkt und T_3 bis zum Aufprall können einfach mit Hilfe des Differentials

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - \frac{R}{R+H}}} = \sqrt{2gR} dt$$

berechnet werden. Wir erhalten im Einzelnen

$$T_2 = \frac{\sqrt{\frac{R+H}{R}} \left(\sqrt{(R+H_b)(H-H_b)} + (R+H) \arctan \left[\sqrt{\frac{H-H_b}{R+H_b}} \right] \right)}{\sqrt{2gR}},$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{\frac{R+H}{R}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \arctan \left[\sqrt{\frac{H}{R}} \right] \right)}{\sqrt{2gR}}.$$

Analytisch kompakter können wir mit der hypergeometrischen Funktion auch

$$T_2 = \sqrt{\frac{2(H-H_b)}{g}} \left(1 + \frac{H}{R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{H-H_b}{R+H} \right] \quad (6.61)$$

und

$$T_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 + \frac{H}{R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{H}{R+H} \right] \quad (6.62)$$

schreiben. Die gesamte Flugzeit ist somit $T = T_1 + T_2 + T_3$.

Die Formeln sollen nun an zwei Testflügen der Nordkoreanischen zwei-stufigen ballistischen Raketen *Hwasong-14* und *Hwasong-15* aus dem Jahre 2017 erprobt werden. Beide Raketen flogen zwar nicht in einer exakten vertikalen Flugbahn, doch bei einem H : W Verhältnis von etwa 4:1 oder 5:1 ist die vertikale Bahn schon eine sehr gute Approximation. Am 17. Juli 2017 erreichte eine *Hwasong-14* eine Gipfelhöhe von $H = \mathbf{3725}$ km. Die gesamte Flugzeit bis zum Aufschlag im Japanischen Meer betrug $T \sim \mathbf{2832}$ s. Mit $R = \mathbf{6371}$ km und $g = \mathbf{9.81 m/s^2}$ entspricht diese Gipfelhöhe $H = \mathbf{3725}$ km einer reinen ballistischen Flugzeit von

$$2T_3 \sim \mathbf{2581 s}$$

Die Differenz zur längeren Flugzeit von **2832** Sekunden muss im Wesentlichen auf die Beschleunigungsphase der Rakete beim Start zurückzuführen sein. Eine konsistente Lösung der Gleichungen (6.58) mit den drei Zeitabschnitten führt auf die eindeutigen Parameter

$$a_s \sim \mathbf{21 m/s^2}; \quad H_b \sim \mathbf{1100 km}; \quad T_1 \sim \mathbf{435 s}$$

Am 28. November 2017 erreichte eine neu entwickelte *Hwasong-15* eine Gipfelhöhe von $H \sim \mathbf{4475}$ km. Die gesamte Flugzeit bis zum Aufschlag

im Japanischen Meer betrug diesmal $T \sim 3180$ s. Die reine ballistische Boden-Boden Flugzeit für diese Höhe beträgt

$$2T_3 \sim 3012 \text{ s.}$$

Aus der Differenz ergeben sich jetzt die Parameter

$$a_s \sim 29 \text{ m/s}^2; \quad H_b \sim 897 \text{ km}; \quad T_1 \sim 304 \text{ s}$$

Deutlich ist zu erkennen, dass die beiden Stufen der *Hwasong-15* im Mittel mit $a_s \sim 3g$ beschleunigen, also wesentlich stärker als die der *Hwasong-14* mit etwa $a_s \sim 2g$ sind. Auffällig ist auch die wesentlich kürzere Gesamt-Brenndauer gegenüber den *Hwasong-14* Triebwerken.

6.3 Die Keplerbahn

Wie weit kann eine *ballistische Interkontinentalrakete* nach dem Brennschluss der letzten Stufe fliegen? Mit den Formeln der Wurfparabel können wir das nicht mehr genau genug abschätzen, da zwar über 100 km Höhe der Luftwiderstand praktisch verschwindet, dafür aber das Gravitationsfeld kein konstantes Beschleunigungsfeld mehr darstellt und die Erdoberfläche gekrümmt erscheint. Die Rakete bewegt sich nun bei Geschwindigkeiten von etwa 6 km/s auf einer *Keplerschen* Ellipse, und es besteht die Aufgabe, die Formel (3.3) als Grenzfall einer allgemeineren Beziehung aufzufassen. Dies Problem hat schon I. NEWTON in seinem Hauptwerk 1687 andiskutiert. Als neue Größe führe man jetzt die Kreisbahngeschwindigkeit v_K eines masselosen Körpers um die Erdkugel mit der Masse M im Abstand R ein. Für diese gilt ($G =$ Gravitationskonstante; $g = GM/R^2$)

$$v_K = \sqrt{\frac{GM}{R}} \equiv \sqrt{gR} \quad (6.63)$$

Hat nun eine Rakete nach Brennschluss im Abstand R vom Erdmittelpunkt die Geschwindigkeit v_0 und den Abgangswinkel Θ (Elevationswinkel), so besteht die Aufgabe, diese lokalen Parameter mit den globalen Bahnkonstanten der Keplerellipse zu verknüpfen. Man kann so vorgehen: In Polarkoordinaten (r, χ) lautet die Ellipsengleichung

$$r[\chi] = \frac{p}{1 - \epsilon \cos[\chi]}. \quad (6.64)$$

$\chi = 0$ bedeutet hier das Apogäum der Bahn (siehe Fig. 6.8). Mit dem ganzen Bogenwinkel φ und dem Erdradius R erhält man die erste geometrische Bedingung

$$R = \frac{p}{1 - \epsilon \cos[\varphi/2]}. \quad (6.65)$$

Andererseits gilt für das Quadrat der Geschwindigkeit in einer Keplereellipse

$$v^2 = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (6.66)$$

wo G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten und a die große Halbachse der Ellipse bedeuten. Für den Bahnparameter gilt außerdem $p = a(1 - \epsilon^2)$. Mit dem Geschwindigkeitsverhältnis

$$\gamma = \frac{v_0}{v_K} \equiv \frac{v_0}{\sqrt{gR}} \quad (6.67)$$

erhält man so eine dynamische Bedingung

$$\gamma^2 = \frac{R}{p} (1 - 2\epsilon \cos[\varphi/2] + \epsilon^2). \quad (6.68)$$

Aus (6.65) und (6.68) folgt die wichtige Bedingung

$$\gamma^2 = 1 + \epsilon^2 - (2 - \gamma^2) \epsilon \cos[\varphi/2]. \quad (6.69)$$

Eine zweite geometrische Bedingung entsteht durch den an der Erdoberfläche gültigen Elevationswinkel Θ und die lokale Neigung der Bahntangente gegenüber dem Radiusvektor. Mathematisch lautet die Bedingung

$$\tan[\Theta] = \left. \frac{1}{r} \frac{dr}{d\chi} \right|_{\chi \rightarrow \varphi/2} \quad (6.70)$$

Mit Hilfe der Ellipsengleichung folgt daraus

$$\tan[\Theta] = \frac{\epsilon \sin[\varphi/2]}{1 - \epsilon \cos[\varphi/2]} \quad (6.71)$$

Aus (6.68) und (6.71) kann man ϵ eliminieren und erhält eine Bestimmungsgleichung für den Bahnbogen φ und damit auch für die Wurfweite $W = R\varphi$

$$(2 - \gamma^2) \sin[\varphi/2] = \gamma^2 \sin(2\Theta + \varphi/2). \quad (6.72)$$

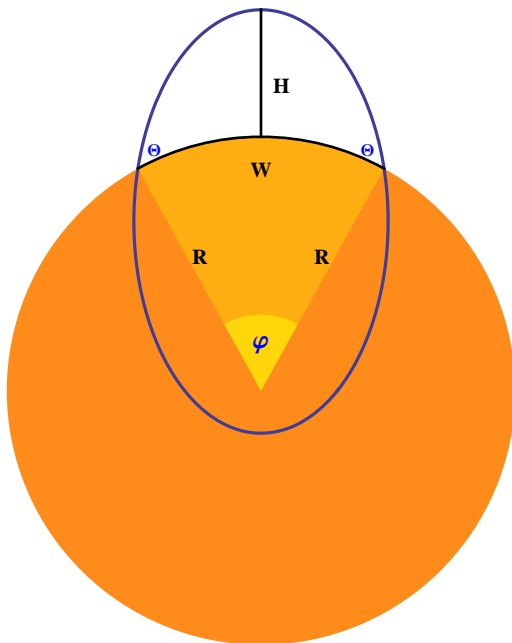


Fig. 6.8: Die Wurfparabel auf der Erdoberfläche als Grenzfall einer Kepler'schen Ellipse um den Erdmittelpunkt. Die Gipfelhöhe H ist durch die Formel (6.77), die Wurfweite $W = R\varphi$ durch die Formel (6.73) berechenbar. Der Elevationswinkel Θ ist beim Abschussort und Zielort identisch. Bei einer **optimalen Flugbahn** gilt die Beziehung $\Theta = (\pi - \varphi)/4$. Schon 1686 hat I. NEWTON ähnliche Betrachtungen angestellt.

Auflösen nach φ führt zu

$$\tan\left[\frac{\varphi}{2}\right] = \frac{v_0^2 \sin[2\Theta]}{2(gR - v_0^2 \cos[\Theta]^2)} \quad (6.73)$$

Dieser Ausdruck ist die NEWTON'sche Erweiterung der Beziehung (3.3) – nun aber für sehr hohe Abgangsgeschwindigkeiten, um auch den Einfluss der Erdkrümmung und die Abnahme der Erdbeschleunigung mit der Höhe zu berücksichtigen. Die Wurfparabel ist jetzt der lokale Grenzfall einer Keplerschen Ellipse geworden. Die Wurfweite W längs der Kugeloberfläche

der Erde ist die Bogenlänge

$$W = R\varphi. \quad (6.74)$$

Durch eine Reihenentwicklung nach γ und $\varphi = W/R$ lässt sich die Korrespondenz beider Formeln leicht veranschaulichen. Man erhält mit (6.73)

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin[2\Theta] (1 + \gamma^2 \cos[\Theta]^2 + \dots) \quad (6.75)$$

Im Falle $\gamma \rightarrow 0$ erhalten wir wieder die klassische *Torricelli - Galilei* Formel der Wurfweite.

Um die Gipfelhöhe H der Bahn im *Apogäum* der Bahn (*Erdferne*) über dem Erdboden zu berechnen, benötigen wir noch die restlichen zwei globalen Konstanten der Keplerbahn, nämlich die Exzentrizität ϵ und den Bahnparameter p . Es gilt

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{1 - (2 - \gamma^2) \gamma^2 \cos[\Theta]^2}, \\ p &= \gamma^2 R \cos[\Theta]^2, \\ a &= \frac{R}{2 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Für $\gamma = 0$ folgt zum Beispiel für die Bahnhalbachse $a = R/2$. Dies ist kein Paradoxon, denn man denkt sich ja die ganze Masse im Erdmittelpunkt vereinigt. Die Situation ist also nicht identisch mit einem Stein, der in einen Schacht fallen würde, der durch die ganze Erde bis auf die andere Seite getrieben wäre.

Mit den obigen Formeln ergibt sich die Gipfelhöhe H im *Apogäum* (= *Erdferne*) der Bahn über dem Erdboden zu

$$H = R \left(\frac{\sqrt{1 - (2 - \gamma^2) \gamma^2 \cos[\Theta]^2} - (1 - \gamma^2)}{2 - \gamma^2} \right). \quad (6.77)$$

Eine Reihenentwicklung führt hier auf den Ausdruck

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin[\Theta]^2 \left(1 + \frac{1}{4} \gamma^2 (3 + \cos[2\Theta]) + \dots \right). \quad (6.78)$$

Auch hier erkennt man wieder vor der großen Klammer den klassischen Term der Wurfparabel. Will man für vorgegebene Werte von H und W einer ballistischen Flugbahn den Abgangswinkel Θ und die Abgangsgeschwindigkeit v_0 berechnen, so müssen zunächst die Formeln (6.73) und (6.77) umgeschrieben werden. Wir setzen

$$\gamma = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}; \quad \cos[\Theta] = \frac{v_x}{v_0}; \quad \sin[\Theta] = \frac{v_y}{v_0}; \quad v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \tan \left[\frac{W}{2R} \right] &= \frac{v_x v_y}{gR - v_x^2}, \\ \frac{H}{R} &= \frac{v_y^2}{gR - v_x^2 - v_y^2 + \sqrt{(gR - v_x^2)^2 + v_x^2 v_y^2}}. \end{aligned}$$

Die Wurzel im zweiten Ausdruck kann aber durch die Wurfweite W der ersten Formel eliminiert werden. So erhalten wir vereinfacht

$$\begin{aligned} \tan \left[\frac{W}{2R} \right] &= \frac{v_x v_y}{gR - v_x^2}, \\ \frac{H}{R} &= \frac{v_y^2}{gR - v_x^2 - v_y^2 + v_x v_y \csc \left[\frac{W}{2R} \right]}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungspaar ist von quadratischer Ordnung in v_x und v_y . Die positive Lösung lautet

$$v_x = \sqrt{\frac{2gR(R+H)}{H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2}} \sin \left[\frac{W}{4R} \right], \quad (6.79)$$

$$v_y = \sqrt{\frac{2gRH^2}{(H+R) \left(H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2 \right)}} \cos \left[\frac{W}{4R} \right]. \quad (6.80)$$

Daraus folgt für die Abgangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR}{R+H} \left(2H+R \left(1 - \frac{H}{H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2} \right) \right)}. \quad (6.81)$$

Im Grenzfall $W \rightarrow 0$ folgt hieraus einfach

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}}. \quad (6.82)$$

Diese Formel reicht in den meisten Fällen aus, um die maximale kinetische Energie pro Masse einer ballistischen Rakete aus ihrer erreichten *Gipfelhöhe* H ohne Berücksichtigung der Flugweite W abzuschätzen. Diese Formel folgt auch aus (6.57) im Falle $H_b = 0$. Für den Abgangswinkel Θ erhalten wir schließlich

$$\tan[\Theta] = \frac{v_y}{v_x} \equiv \frac{H}{H+R} \cot\left[\frac{W}{4R}\right]. \quad (6.83)$$

Schwieriger ist die Berechnung der Flugzeit. Wir benötigen dazu den Flächensatz der gravitativen Zentralbewegung. Man erhält mit der Randbedingung am Startort der Rakete

$$r[\chi]^2 \frac{d\chi}{dt} = R v_0 \cos[\Theta]. \quad (6.84)$$

Mit der Bahngleichung (6.64) ergibt so zunächst für die Flugzeit das Integral

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \gamma^3 \cos[\Theta]^3 \int_0^{\varphi/2} \frac{d\chi}{(1 - \epsilon \cos[\chi])^2}. \quad (6.85)$$

Die Auswertung führt zu

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{2\Phi}{(\sqrt{2-\gamma^2})^3} + \frac{\gamma \sin[\Theta]}{2-\gamma^2} \right], \quad (6.86)$$

wobei die Größe Φ durch

$$\tan[\Phi] = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan\left[\frac{\varphi}{4}\right] \quad (6.87)$$

gegeben ist. Die Exzentrizität ϵ folgt aus (6.76), der Winkel φ aus (6.73). Für kleine γ erhalten genähert für die Flugzeit

$$T = 2 \frac{v_0}{g} \sin[\Theta] \left\{ 1 + \frac{1}{6}(5 + \cos[2\Theta]) \gamma^2 + \dots \right\} \quad (6.88)$$

Der erste Term stimmt mit der Wurfparabel wieder überein.

6.4 Die optimale Flugbahn

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Formeln gelten für beliebige $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ und beliebige Elevationswinkel Θ . Doch wie bei der Wurfparabel ist auch bei der Raketenballistik über große Entfernungen die Hauptfrage, bei welchem Elevationswinkel Θ unter Voraussetzung konstanter „Brennschlussgeschwindigkeit“ *maximale Flugweite* erreicht wird. Oder anders ausgedrückt: *Bei minimalem Energieaufwand die maximale Zieldistanz erreichen*. Mathematisch bedeutet dies, bei konstanten γ in (6.73) den Elevationswinkel Θ_m maximaler Winkeldistanz φ zu finden. Man erhält sehr einfach das Resultat

$$\tan[\Theta_m] = \sqrt{1 - \gamma^2}; \quad \cos[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2 - \gamma^2}}. \quad (6.89)$$

Für $\gamma \rightarrow 0$ folgt wieder das klassische Resultat $\Theta_m = \pi/4$ (45 Grad) von TARTAGLIA und TORRICELLI. Für $\gamma \rightarrow 1$ folgt hieraus $\Theta_m \rightarrow 0$, also horizontale Flugbahn (Kreisbahn) (**Erdsatelliten**). Für die optimale Bahnexzentrizität gilt dann

$$\epsilon_m = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (6.90)$$

Die dazugehörige maximale Bogenweite um die Erdkugel lautet

$$\sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] = \frac{\gamma^2}{2 - \gamma^2}. \quad (6.91)$$

Setzt man hier in γ die Anfangsgeschwindigkeit (6.82) ein, so folgt einfach

$$\sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] = \frac{H}{R}. \quad (6.92)$$

Eine Rakete, die in einem Vertikalaufstieg die Gipfelhöhe H über dem Erdboden erreicht, kann also in einer optimalen ballistischen Flugbahn die Weite W_m

$$W_m = 2R \arcsin \left[\frac{H}{R} \right] \quad (6.93)$$

längs des Erdumfangs erreichen. Für die koreanische Rakete *Hwasong-15* erhalten wir zum Beispiel mit $H \sim 4475$ km die maximale Weite $W_m \sim 9923$ km - ohne Berücksichtigung der Erdrotation.



Fig. 6.9: Eine ballistische RSM-56 Bulava Rakete nach dem Start aus einem untergetauchten U-Boot der russischen Borei - Klasse. Reichweite bis zu 8500 km. (credit: wikimedia.commons)

Alternativ können wir (6.91) auch

$$\sqrt{\frac{1 - \sin\left[\frac{\varphi_m}{2}\right]}{1 + \sin\left[\frac{\varphi_m}{2}\right]}} = \tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_m}{4}\right] = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (6.94)$$

schreiben. Ein Vergleich mit (6.89) führt auf die bemerkenswerte Relation

$$\boxed{\Theta_m = \frac{\pi - \varphi}{4}}. \quad (6.95)$$

Man kann so für die optimale Flugbahn einer Rakete den Satz aussprechen:

Bei einer optimalen ballistischen Flugbahn einer Interkontinentalrakete muss die Summe aus dem vierfachen Elevationswinkel beim Start und dem Großkreiswinkel vom Startpunkt zum Zielpunkt längs der Erdoberfläche immer 180 Grad betragen.

Die dazugehörige *minimale Geschwindigkeit* folgt aus

$$\gamma_m = \csc\left[\frac{\pi + \varphi}{4}\right] \sqrt{\sin\left[\frac{\varphi}{2}\right]}. \quad (6.96)$$

Für $\varphi \rightarrow \pi$ wird $\Theta_m \rightarrow 0$ und $\gamma_m \rightarrow 1$. Die Antipoden bezüglich des eigenen Standortes sind mit einer ballistischen Rakete also sehr schlecht zu erreichen. Führen wir die Länge der Sehne S

$$S = 2 R \sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] \quad (6.97)$$

vom Startort zum Zielort ein, so können wir auch

$$v_{0m} = \sqrt{\frac{2 g R S}{2 R + S}} \quad (6.98)$$

schreiben. Die Steighöhe bei einer optimalen Flugbahn beträgt

$$H[\varphi] = \sqrt{2} R \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} \right] \sin \left[\frac{\varphi}{4} \right] \quad (6.99)$$

Mit der Sehne S ergibt sich dann

$$H[S] = \frac{1}{4} \left(\sqrt{4 R^2 - S^2} - (2 R - S) \right). \quad (6.100)$$

Unter der Schar *optimaler* Flugbahnen mit unterschiedlichen Weiten φ erreicht die Bahn mit $\varphi = \pi/2$ die **absolut größte Steighöhe**. Sie beträgt

$$H[\pi/2] = \sqrt{2} R \sin \left[\frac{\pi}{8} \right]^2 \equiv \frac{R}{2} \left(\sqrt{2} - 1 \right). \quad (6.101)$$

Mit dem Erdradius $R = \mathbf{6371}$ km ergibt sich so für die Maximalhöhe aller optimalen Flugbahnen

$$H[\varphi/2] \approx \mathbf{1319} \text{ km} \quad (6.102)$$

Keine ballistische Rakete sollte eine Flugbahn mit einer größeren Höhe aufweisen. Die Reichweite bei dieser Maximalhöhe entspricht dabei genau $1/4$ des Erdumfanges.

Die Gleichung für diese Schar optimaler Keplerbahnen bei vorgegebener Weite W lautet

$$r[\chi] = \frac{R \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} \right) \cos \left(\chi - \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (6.103)$$

Der Punkt $\varphi = 0$ ist dabei der idealisierte Abgangsort der Rakete. In Abbildung (6.10) sind einige dieser Bahnbögen graphisch dargestellt.

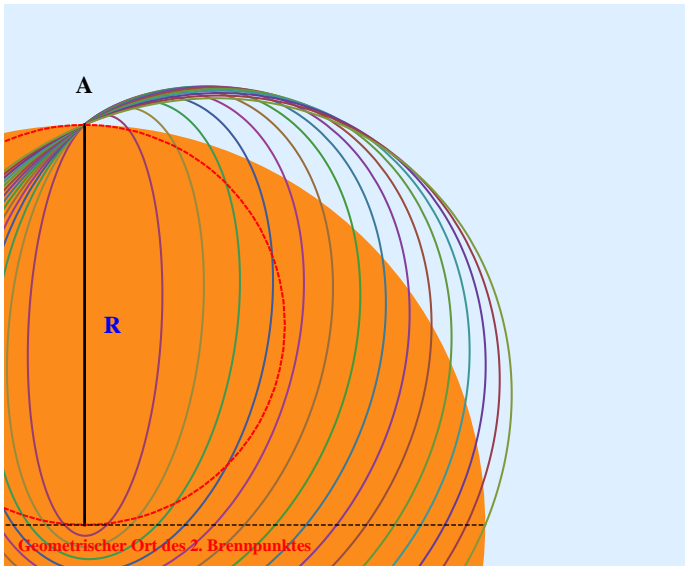


Fig. 6.10: Optimale Flugbahnen einer Interkontinentalrakete für Reichweiten von bis zu 10000 km ($1/4$ Erdumfang). Je weiter das Ziel, desto kleiner ist der optimale Neigungswinkel der Rakete bei Brennschluss.

Es verbleibt noch die Flugzeit der optimalen Bahnen zu berechnen. Aus (6.86) folgt zunächst

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{2 \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \right) + \gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{(\sqrt{2 - \gamma^2})^3} \right]. \quad (6.104)$$

Die Größe γ hängt mit der optimalen Elevation φ_m bei Brennschluss durch die Relation (6.94) zusammen. Führen wir hier wieder die Länge der Sehne S (6.97) vom Startort zum Zielort ein, so gilt mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion alternativ

$$T = \sqrt{\frac{2S}{g}} \left(1 + \frac{S}{2R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{2S}{2R+S} \right] \quad (6.105)$$

Im Falle $S/R \ll 1$ ist die Sehne S mit der Wurfweite W längs der Erdoberfläche vergleichbar und wir erhalten im Limes das Ergebnis $\sqrt{2W/g}$ für die Flugzeit einer optimalen Wurfparabel mit der Elevation $\Theta = 45^\circ$. Für $S = 2R$ erhält man $H = 0$ und $T = \pi \sqrt{R/g}$, also die halbe Umlaufzeit einer Kreisbahn im Abstand R .

Zahlenbeispiel: Die Oberflächenbeschleunigung g betrage $g = 9.81 m/s^2$, der Erdradius $R = 6.371 * 10^6 m$. Mit diesen Daten folgt für die Kreisbahngeschwindigkeit

$$\sqrt{gR} \sim \mathbf{7906} \text{ m/sec.} \quad (6.106)$$

Setzen wir für den Winkelbogen der Wurfweite $1/4$ Erdumfang an, also $\varphi_m = \pi/2$ oder $W \sim 10000 km$, so erhalten wir

$$v_0 \sim \mathbf{7194} \text{ m/sec} \quad (6.107)$$

Diese Geschwindigkeit muss die Rakete nach Brennschluss der dritten Stufe erreicht haben. Um die Flugzeit zum Ziel zu berechnen, erhalten zunächst für die Zeitkonstante mit den obigen Daten in Sekunden

$$\sqrt{\frac{R}{g}} \sim \mathbf{806} \text{ sec.} \quad (6.108)$$

Damit folgt für den ganzen Viertelbogen um die Erde

$$T \sim \mathbf{1933} \text{ sec} \equiv \mathbf{32} \text{ m } \mathbf{13} \text{ sec} \quad (6.109)$$

Es dauert also etwas über eine halbe Stunde, bis die Rakete das Ziel erreicht hat. Mit diesen Zahlen hat man in etwa eine Vorstellung von den erforderlichen Geschwindigkeiten und den entsprechenden Zeiträumen. Schon C. CRANZ hat in seinem Lehrbuch von 1910 Teile dieser Probleme etwas umständlich durchgerechnet. An eine Raketenballistik war damals (1910) natürlich noch nicht zu denken. Erst H. OBERTH hat 1929 in seinem Hauptwerk *Wege zur Raumschiffahrt* diese Fragen sehr ausführlich behandelt ([35]). Während seiner Zeit in Peenemünde zu Beginn der 1940er Jahre entwickelte er auch sein Dreistufenkonzept für Raketen mit sehr großen Reichweiten.

Die Idee, mit einer „Riesenkanone“ anstatt einer Mehrstufenrakete ein Objekt in das Weltall zu schießen, hatte schon I. NEWTON. Romanhaft beschrieben wurde es dann von dem französischen Romancier und

W[km]	Θ°	v_0 [m/s]	H[km]	T[min]
1000	42.8	3015	240	7.91
2000	40.5	4111	459	11.70
3000	38.3	4862	655	14.93
4000	36.0	5431	828	17.87
5000	33.8	5880	976	20.62
6000	31.5	6246	1098	23.22
7000	29.3	6548	1195	25.69
8000	27.0	6801	1264	28.01
9000	24.8	7014	1305	30.18
10000	22.5	7194	1319	32.20

Tab. 6.2: Bahndaten von optimalen ballistischen Kurven für zehn verschiedene Reichweiten auf der Erdoberfläche. Schon der Raketenspionier H. OBERTH hat im Jahre 1929 solche Berechnungen veröffentlicht. Die physikalischen Konstanten sind hier wieder $R = 6371$ km und $g = 9.81$ m/s².

Raumfahrt – Träumer *Jules Verne*, der 1865 erstmals eine Reise „von der Erde zum Mond“ beschrieb. Sein Raumgefährt ließ er von einer unterirdischen Riesenkanone in Florida mondwärts schießen. Ende des ersten Weltkrieges wurden von der Firma *Krupp* Geschütze mit überlangen Rohren entwickelt, um Reichweiten von über 100 km zu erlangen. Und um 1965 wurde mit einem amerikanischen „Raumgeschütz“ von 36 Metern Länge von Barbados aus Reichweiten von über 250 km erreicht. Neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet sind *Magnetspulenkanonen (coil gun)*, mit denen kleine „Satelliten“ auf Geschwindigkeiten von etwa 5000 m/s gebracht werden können. Ob damit aber schon erfolgreich kleinere Körper in die Erdumlaufbahn gelangen konnten, ist dem Autor nicht bekannt.

7 Schlussbemerkungen

Der Wunsch, die Erde für kurze Zeit mal zu verlassen, ist schon sehr alt. Dies bezeugt eine Textstelle aus der *antiken Lügengeschichte*, nämlich aus der *Ikaromenippus oder die Luftreise* von LUKIAN VON SAMOSATA (120-180):

Vom Weltraum aus sah ich die Erde ganz außerordentlich klein - ich will sagen, noch kleiner als den Mond - so dass ich mir, wie ich zum erstenmal hinunter guckte, gar nicht vorstellen konnte, wo all die hohen Berge und das so große Weltmeer geblieben wären Aber der Sonnenglanz, der mir aus dem Ozean entgegen-spiegelte, ließ mich schließen, dass das, was ich da sah, die Erde sei.

Das Problem der ballistischen Kurve oder allgemeiner das der Bewegung eines Körpers mit Luftwiderstand und Gravitationsbeschleunigung hat Mathematiker und Militärwissenschaftler der letzten 500 Jahre immer wieder beschäftigt. Als I. NEWTON entdeckte, dass die Bremskraft des Luftwiderstandes in guter Näherung mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt, konnte das Problem dem Differentialkalkül unterworfen werden. Doch eine *exakte einfache Lösung* wie im planetaren Zweikörperproblem der Himmelsmechanik existiert nicht - selbst ein I. NEWTON konnte mit seinen ausgefeilten geometrischen Methoden wenig ausrichten.

In den 1930er Jahren kam dann die Raketenballistik hinzu - natürlich zunächst aus rein militärischen Interessen. Erst Anfang der 1960er Jahre wurde das Problem von Aufstiegsbahnen einer Rakete in einen Erdorbit als Teil einer neuen ballistischen Aufgabe untersucht. Solche Fragestellungen waren einem I. NEWTON oder L. EULER noch völlig unbekannt. Doch der eigentliche Reiz dieser Probleme liegt gerade in ihren Schwierigkeiten und unerwarteten einfachen Lösungen. Es kommt immer wieder darauf an, geschickte neue Approximationsmethoden zu finden. Jeder darf hier seine kreativen Kräfte ausprobieren und kann so dem komplexen Problem immer wieder neue Seiten abgewinnen. Der Mensch wird hier



Münchhausen

O. Herrfurth pinx.

Fig. 7.1: Die witzigen Einfälle oder scherzhaften Erzählungen (Facetien) eines Münchhausen sind heute durch die Mondflüge in gänzlich unerwarteter Form Realität geworden. (Bild: Oscar Herrfurth - Ritt auf der Kanonenkugel)

zum Künstler...er kann hier vielleicht sein eigenes mathematisches *Taj Mahal* (Tadsch Mahal) finden.

Anhang

A.1 Die Lambertsche W - Funktion

Um die Wurfweite oder die Flugzeit einer „Kanonenkugel“ bei einem flachen Elevationswinkel *genähert* zu berechnen, hat sich die wenig bekannte transzendente Funktion $\mathbf{W}[z]$ als sehr nützlich erwiesen. Sie ist definiert durch die transzendente Gleichung

$$\mathbf{W}[z] e^{\mathbf{W}[z]} = z, \quad (\text{A.1})$$

wobei z eine beliebige komplexe Zahl darstellen kann. Die Funktion wurde zum erstenmal von J.H. LAMBERT und L. EULER betrachtet und spielt in der mathematischen Physik heutzutage eine wichtige Rolle. Im reellen Intervall $x \in [1/e, 0)$ existieren für diese Funktion zwei reelle Zweige, die mit $\mathbf{W}_0[x]$ (oberer Zweig) und $\mathbf{W}_{-1}[x]$ (unterer Zweig) bezeichnet werden. In der Ballistik benötigt man beide Zweige dieser Funktion. Um den Punkt $x = 0$ lautet die Taylorreihe der Funktion $\mathbf{W}_0[x]$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0[x] &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \\ &\equiv x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \frac{125}{24} x^5 - \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist hier $1/e$. Führt man jetzt die zwei Hilfsfunktionen

$$L_1 = \ln(-x); \quad L_2 = \ln(-\ln(-x)) \quad (\text{A.2})$$

ein, so gilt für die asymptotische Entwicklung der Funktion $\mathbf{W}_{-1}[x]$ im Intervall $x \in [-1/e, -0)$ die Reihe

$$\mathbf{W}_{-1}[x] = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2(2 - L_2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(6 - 9L_2 + 2L_2^2)}{6L_1^3} - \dots \quad (\text{A.3})$$

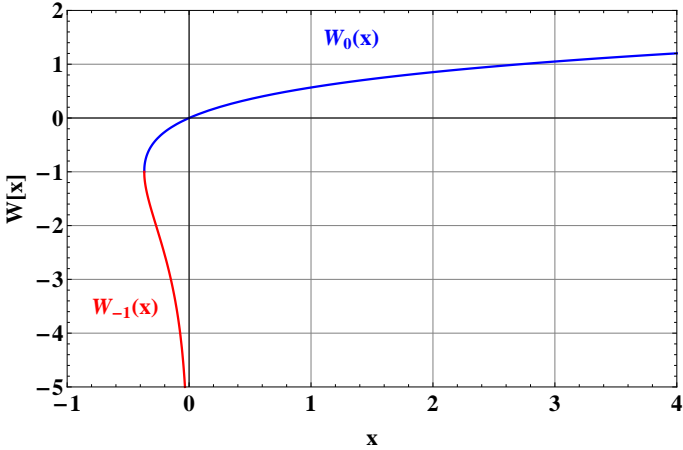


Fig. A.1: Die Lambertsche $W[x]$ - Funktion mit ihren beiden reellen Zweigen.

Die Koeffizienten sind hier *Stirlingsche Zahlen*. Für die Funktion im oberen Zweig gilt analog für $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{W}_0[x] = \ln[x] - \ln(\ln[x]) + \frac{\ln(\ln[x])}{\ln[x]} - \dots \quad (\text{A.4})$$

Weitere zum Teil bemerkenswerte Details findet man in der Literatur ([14]).

Gerade die Funktion $-\mathbf{W}_0[-x]$ spielt ja bei der analytischen Berechnung einer idealisierten Aufstiegs- und Abstiegsbahn einer Rakete (Mondlandung) eine entscheidende Rolle. Es gilt speziell um den Punkt $x = 0$ die Taylorreihe der Funktion $-\mathbf{W}_0[-x]$

$$\begin{aligned} -\mathbf{W}_0[-x] &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n \\ &\equiv x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist auch hier $1/e$. Wir definieren jetzt die Funktionschar

$$f_k[x] = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{n-k-1}}{n!} x^n$$

mit

$$f_0[x] = -\mathbf{W}_0[-x].$$

Dann gelten die Rekursionen

$$f_{k+1}[x] = \int x^{-1} f_k[x] dx; \quad \{k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Im Einzelnen ergibt sich so

$$\begin{aligned} f_1[x] &= -\mathbf{W}_0[-x] - \frac{1}{2} \mathbf{W}_0[-x]^2, \\ f_2[x] &= -\mathbf{W}_0[-x] - \frac{3}{4} \mathbf{W}_0[-x]^2 - \frac{1}{6} \mathbf{W}_0[-x]^3, \end{aligned}$$

Analog gilt auch die Darstellung

$$\begin{aligned} \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{n-1}}{2 n!} x^{n+\frac{1}{2}} \\ &\equiv x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{3/2} + \frac{5}{8} x^{5/2} + \frac{49}{48} x^{7/2} + \dots \end{aligned}$$

Definieren wir die parametrisierte Funktion

$$g_k[x] = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{n-k-1}}{2^{k+1} n!} x^{n+\frac{1}{2}},$$

dann gelten mit

$$g_0[x] = \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]}$$

die Rekursionen

$$g_{k+1}[x] = \frac{1}{2} \int x^{-1} g_k[x] dx; \quad \{k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Im Einzelnen gilt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} g_1[x] &= \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} \left(1 + \frac{1}{3} \mathbf{W}_0[-x] \right), \\ g_2[x] &= \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} \left(1 + \frac{4}{9} \mathbf{W}_0[-x] + \frac{1}{15} \mathbf{W}_0[-x]^2 \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklungen ist es möglich, die analytischen Reihenoeffizienten der Aufstiegsbahn einer Rakete nach $\alpha \equiv a_s/g$ exakt durch rationale Zahlen auszudrücken. So gilt zum Beispiel für die erreichte Höhe einer ballistischen Aufstiegsbahn die Formel

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n+1}[1/e] \left(\frac{g}{a_s} \right)^{2n+2}$$

Ähnliche Reihen gelten auch für die anderen Kenngrößen.

A.2 Der Satz von Cranz

Wahrscheinlich ist der Begriff „Satz von Cranz“ historisch nicht ganz richtig, aber in seinem Lehrbuch von 1910 hat C. CRANZ einen elementaren Lehrsatz über die Lage des zweiten Brennpunktes von einer Schar von Keplerellipsen ausgesprochen, die dadurch entstehen, daß Körper mit steigender Geschwindigkeit immer in der gleichen Richtung von einer Planetenoberfläche abgeschossen werden. Man kann diesen Sachverhalt mit den Formeln (6.73) und (6.76) verstehen. Der eine Brennpunkt liegt im Erdmittelpunkt, der andere Brennpunkt hat dann vom Erdmittelpunkt mit $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ den Abstand

$$2a\epsilon \equiv \frac{2\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos[\Theta]^2}}{2 - \gamma^2} R \quad (\text{A.5})$$

Legt man der Figur (A.2) ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Erdmittelpunkt (0, 0) (erster Brennpunkt der Ellipsen) zugrunde, so lauten die Koordinaten des zweiten Brennpunktes zunächst

$$x_2 = 2a\epsilon \sin[\varphi/2], \quad y_2 = 2a\epsilon \cos[\varphi/2] \quad (\text{A.6})$$

Wegen (6.73) gilt aber

$$\begin{aligned} \sin[\varphi/2] &= \frac{\gamma^2 \sin(2\Theta)}{2\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos[\Theta]^2}} \\ \cos[\varphi/2] &= \frac{1 - \gamma^2 \cos[\Theta]^2}{\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos[\Theta]^2}} \end{aligned}$$

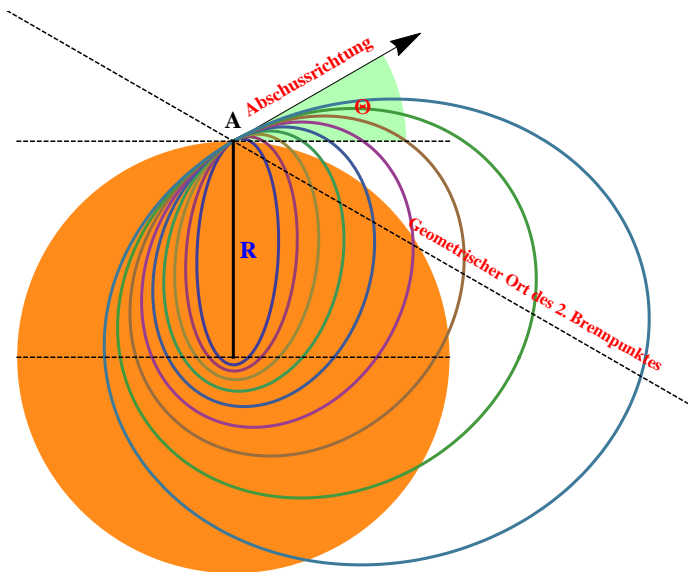


Fig. A.2: Der zweite Brennpunkt aller Keplerellipsen, die unter gleichem Winkel Θ mit steigender Geschwindigkeit vom Punkt **A** abgeschossen wurden, liegen auf einer geraden Linie, die durch den Abschussort geht und die Steigung $-\cot(2\Theta)$ hat.

Mit dem obigen Resultat ergibt sich so

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{\gamma^2 \sin(2\Theta)}{2 - \gamma^2} R \\
 y_2 &= \left(1 - \frac{\gamma^2 \cos(2\Theta)}{2 - \gamma^2} \right) R
 \end{aligned}$$

Durch Elimination von γ ergibt sich so für den geometrischen Ort des zweiten Brennpunktes der Ellipsenschar die Geradengleichung

$$\boxed{y_2 = R - \cot(2\Theta) x_2} \tag{A.7}$$

In der Figur (A.2) ist die Situation für den Elevationswinkel $\Theta = \pi/6$ dargestellt.

Den Satz von CRANZ kann man natürlich auf die optimalen Flugbahnen erweitern. Da dann der Abschusswinkel Θ selbst eine Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ ist, folgt nun

$$x_2 = \frac{2\gamma^2 \sqrt{1-\gamma^2}}{(2-\gamma^2)^2} R; \quad y_2 = \left(1 - \frac{\gamma^4}{(2-\gamma^2)^2}\right) R \quad (\text{A.8})$$

Daraus folgt natürlich sofort

$$\boxed{x_2^2 + \left(y_2 - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2} \quad (\text{A.9})$$

Der geometrische Ort des zweiten Brennpunktes aller optimalen Bahnen ist somit ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf halber Strecke zwischen Erdzentrum und Abschussort liegt, und dessen Radius dem halben Erdradius entspricht.

A.3 Das ballistische Integral

Im Text wurde der Abstand der senkrechten Asymptote der idealen ballistischen Kurve vom Abgangsort (siehe Fig.1.2) durch das Integral (4.35)(quadratisches Luftwiderstandsgesetz)

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_{-\tan[\Theta]}^{\infty} \frac{\cos[\Theta]^2 dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(\tan[\Theta]) + \mathbf{f}[p]]} \quad (\text{A.10})$$

dargestellt. Für $b = 0$ ist dieser Abstand natürlich unendlich, weil eine Wurfparabel *keine senkrechte Asymptote besitzt*. Man kann versucht sein, dieses Integral durch Verschiebung des Integrationsweges in die komplexe Zahlenebene p zu vereinfachen oder gar durch Residuenbildung an Polstellen zu berechnen. Es kommt hier also auf die Funktion

$$\mathbf{F}[p] = \frac{\cos[\Theta]^2}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(\tan[\Theta]) + \mathbf{f}[p]]} \quad (\text{A.11})$$

mit

$$\mathbf{f}[p] = p \sqrt{1+p^2} + \ln(p + \sqrt{1+p^2}) \quad (\text{A.12})$$

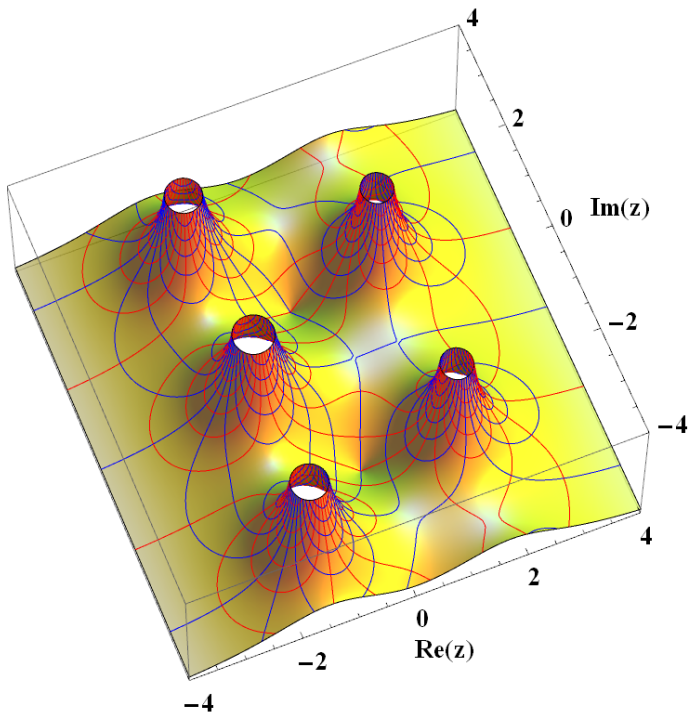


Fig. A.3: Das Verhalten der Funktion $|\mathbf{F}[z]|$ von (A.15) auf der komplexen z - Ebene für $\nu = 1$ und $\Theta = \pi/4$. Rote Linien beschreiben die Konturen von $\text{Re}(\mathbf{F}[z])$, blaue die von $\text{Im}(\mathbf{F}[z])$. Auf der negativen reellen Achse existiert eine Polstelle, auf der imaginären Achse zwei unendlich lange Ketten von Polstellen.

an. Wie in der Raketenballistik substituieren wir hier für die Steigung p die Größe

$$p = \sinh[z]; \quad dp = \cosh[z] dz$$

und erhalten für $\mathbf{f}[z]$

$$\mathbf{f}[z] = z + \frac{1}{2} \sinh(2z). \quad (\text{A.13})$$

Damit gilt

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_{-z_0}^{\infty} \frac{\cos[\Theta]^2 \cosh[z] dz}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(z_0) + \mathbf{f}[z]]}, \quad (\text{A.14})$$

wobei $z_0 = \operatorname{arcsinh}(\tan[\Theta])$ bedeutet. Die Funktion im Integranden lautet jetzt

$$\mathbf{F}[z] = \frac{\cos[\Theta]^2 \cosh[z]}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(z_0) + \mathbf{f}[z]]}, \quad (\text{A.15})$$

deren 3D - Konturen in der Figur (A.3) für den Spezialfall $k v_0^2/g = 1$ und $\Theta = \pi/4$ dargestellt sind. Da das Kontourintegral nur längs der reellen Achse im Unendlichen konvergiert, ist eine Verschiebung des Integrationsweges nicht vorteilhaft. Die ballistische Kurve kann auch nach „rückwärts“ verlängert werden. Dort hat sie als Asymptote eine gerade Linie, deren Steigung etwas größer als $\tan[\Theta]$ ist. Diese asymptotische Steigung folgt im Prinzip aus der Polstelle der Funktion $\mathbf{F}[z]$ auf der negativen reellen Achse.

A.4 Optimierung von Stufenraketen

Die Physik des Raketenantriebes und des Raketendesigns gehört eher in das Gebiet der *inneren Ballistik* beispielsweise der *Ingenieurwissenschaften*. Aus historischen Gründen soll hier aber kurz das Problem des *optimalen Designs* von Stufenraketen behandelt werden, welches als Erster HERMANN OBERTH in seinem Buch von 1929 für eine einstufige Rakete und im Jahre 1941 in Peenemünde für eine mehrstufige Rakete durchgeführt hat.

Vernachlässigt man der Einfachheit halber die Gravitation und den Luftwiderstand, so gilt nach dem russischen Raketenpionier KONSTANTIN EDUARDOWITSCH ZIOLKOWSKI (1857-1935) für die Geschwindigkeit v einer Rakete die Formel

$$v = c_s \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Die Größe c_s bedeutet hier die Ausstoßgeschwindigkeit der Triebwerksgase, m_Z die Gesamtmasse der Rakete bei der Zündung und m_B die

Masse der Rakete bei Brennschluss. Wenn jetzt eine *einstufige* Rakete eine bestimmte Geschwindigkeit erreichen soll, muss bei vorgegebenen c_s das Massenverhältnis m_Z/m_B einen bestimmten Wert haben. Physikalisch kann man fragen, wie hoch der Wirkungsgrad einer *einstufigen* Rakete ist. Unter Wirkungsgrad verstehen wir hier das Verhältnis der aufgewendeten Energie im Triebwerk zur erreichten Bewegungsenergie der ausgebrannten Restrakete (Nutzlast + Struktur) bei Brennschluss ist. Für den aufgewendeten Energieanteil E_1 der Triebwerke nehmen wir genähert die kinetische Energie der ausgestoßenen Gasmasse. Es gilt

$$E_1 = \frac{1}{2} (m_Z - m_B) c_s^2. \quad (\text{A.17})$$

Die kinetische Energie E_2 der Rakete bei Brennschluss ist dagegen

$$E_2 = \frac{1}{2} m_B c_s^2 \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]^2. \quad (\text{A.18})$$

Der Wirkungsgrad Q einer *einstufigen* Rakete ergibt sich so zu

$$Q = \frac{m_B \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]^2}{m_Z - m_B}. \quad (\text{A.19})$$

Definieren wir das Massenverhältnis

$$p = \frac{m_B}{m_Z}, \quad (\text{A.20})$$

so gilt auch

$$Q[p] = \frac{p \ln [p]^2}{1 - p}. \quad (\text{A.21})$$

Die Grenzwerte sind $Q[0] = Q[1] = 0$. Dazwischen muss also ein Optimum für den so definierten Wirkungsgrad liegen. Eine exakte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} p_m &= -\frac{1}{2} \mathbf{W}_0 [-2 e^{-2}], \\ &= \mathbf{0.20318} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

wobei $\mathbf{W}_0[\xi]$ die Lambertsche Funktion des oberen Zweiges bedeutet. Der eigentliche Wirkungsgrad ergibt sich so zu

$$\begin{aligned} Q[p_m] &= -\mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \left(2 + \mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \right), \\ &= \mathbf{0.64761} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Das optimale Geschwindigkeitsverhältnis liegt jetzt bei

$$\frac{v}{c_s} = 2 + \mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \sim \mathbf{1.59362} \dots \quad (\text{A.24})$$

Der energetische Wirkungsgrad einer einstufigen Rakete kann also in dieser Form knapp 65% erreichen. Die Endgeschwindigkeit beträgt etwas mehr als das Anderthalbfache der Ausströmgeschwindigkeit c_s .

Will man jetzt höhere Endgeschwindigkeiten erreichen, muss man Mehrstufenraketen verwenden. Historisch ist dabei bemerkenswert, dass die älteste bis heute bekannte Beschreibung einer Mehrstufenrakete schon aus dem Jahre 1559 herrührt¹. Sie stammt von dem Militärtechniker und Raketenpionier CONRAD HAAS (1509 - 1576), der im Jahre 1551 mit der Armee des Römisch-deutschen Königs Ferdinand I. als Zeugwart und Büchsenmeister nach Hermannstadt in Siebenbürgen (rumänisch Sibiu, ungarisch Nagyszeben) kam und dort aufgrund der Türkeneinfälle die Leitung des Kriegsarsenals übernahm. Zwischen 1529 und 1559 ergänzte er das von seinem Vorfahren HANS HAASENWEIN geerbte - zwischen 1450 und Mai 1459 angelegte Feuerwerksbuch von 1420, welches er den Titel Kunstbuch gab (Staatsarchiv Sibiu, Varia II 374), um wesentliche Teile². Kurios mutet es heute an, dass auch H. OBERTH gebürtig aus Hermannstadt in Siebenbürgen stammte.

Bei der theoretischen Betrachtung wollen wir die Stufenaufteilung so verstehen, dass von der *Spitze der Rakete* die Stufenzahlen von $N, N - 1, N - 2, \dots, 2, 1$ nach unten gezählt werden. Die *erste* Stufe beinhaltet so die gesamte Rakete. Zur theoretischen Beschreibung dieser Stufenrakete mit N Stufen müssen jetzt drei Massenverhältnisse p_n, q_n, s_n für jede

¹Doru Todericiu: *Preistoria Rachetei Moderne*. Manuscrisul de la Sibiu 1529-1569, Editura Academiei RSR, Bucursti, 1969

²Hans Barth: *Conrad Haas - Raketenpionier und Humanist*, Johannis Reeg Verlag, Heilbronn 2005, 94 Seiten.

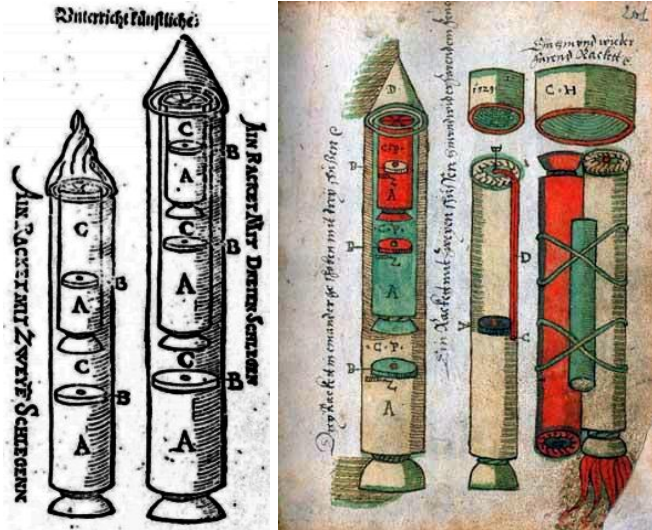


Fig. A.4: Dreistufiges Raketendesign von CONRAD HAAS aus dem Jahre 1559, gezeichnet in einem Kunstbuch aus Hermannstadt in Siebenbürgen. Das Buch wurde erst 1961 in einem Archiv (Staatsarchiv Sibiu, Varia II 374) entdeckt. Danach wurde die dreistufige Rakete erst wieder 1650 von dem polnisch-litauischen Waffenkonstrukteur CASIMIR SIMIENOWICZ beschrieben. (Quelle: wikimedia.commons)

Teilstufe $n = 1, 2, \dots, N$ definiert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{m_{B,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse bei Brennschluss der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n} \\
 q_n &= \frac{m_{L,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse der Nutzlast der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n} \\
 s_n &= \frac{m_{S,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse der Struktur der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n}
 \end{aligned}$$

Für die Größe q_n gilt auch

$$q_n = \frac{m_{Z,n+1}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n+1}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n}$$

Die Gesamtmasse der Stufenrakete beim Start wäre dann $m_{Z,1}$. Es gelten

außerdem die beiden alternativen Randbedingungen

$$m_{B,n} = m_{L,n} + m_{S,n} \quad (\text{A.25})$$

$$m_{S,n} = m_{B,n} - m_{Z,n+1} \quad (\text{A.26})$$

und daher die wichtige Relation

$$\boxed{p_n = q_n + s_n} \quad (\text{A.27})$$

Bei der Optimierung einer N -Stufenrakete kommt es im wissenschaftlichen wie ökonomischen Bereich darauf an, das Verhältnis aus der Nutzlast der letzten Stufe zur Gesamtmasse der Rakete beim Start zu maximieren. Für die Nutzlast der letzten Stufe gilt aber jetzt

$$\begin{aligned} m_{L,N} &= q_N m_{Z,N} \\ &= q_N q_{N-1} m_{Z,N-1} \\ &= q_N q_{N-1} q_{N-2} m_{Z,N-2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt für das zu maximierende Verhältnis

$$\mathbf{F} = \frac{m_{L,N}}{m_{Z,1}} = \prod_{n=1}^N q_n \quad (\text{A.28})$$

Unter der Voraussetzung, dass die Strahlgeschwindigkeit c_s aller Triebwerke gleich ist, gilt für die Endgeschwindigkeit der Rakete (ohne Gravitation und Luftwiderstand)

$$\begin{aligned} v_0 &= -c_s \ln \left[\prod_{n=1}^N p_n \right] \\ &= -c_s \sum_{n=1}^N \ln[q_n + s_n] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Diese Endgeschwindigkeit geht als Nebenbedingung in das Extremwertproblem ein. Das zu maximierende Funktional lautet also

$$\mathbf{F} = \prod_{n=1}^N q_n + \lambda \sum_{n=1}^N \ln[q_n + s_n], \quad (\text{A.30})$$

wobei λ ein *Lagrangescher Multiplikator* darstellt. Die Strukturgrößen s_n sind dabei durch die Konstruktion vorgegeben. Gesucht wird ein Satz optimaler q_n Werte. Partielle Differentiation nach den q_n Werten liefert für jedes n die Bedingung

$$q_n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_n} = \prod_{n=1}^N q_n - \lambda \frac{q_n}{q_n + s_n} \equiv 0! \quad (\text{A.31})$$

Daraus folgt unmittelbar die Identität der Verhältnisse

$$\frac{s_1}{q_1} = \frac{s_2}{q_2} = \dots = \frac{s_N}{q_N} \equiv \text{konstant}$$

Dies bezeichnet man auch als die *Gewichtsähnlichkeit einer optimierten Stufenrakete* mit identischen Strahlgeschwindigkeiten. Es ist jetzt sicherlich sinnvoll, für alle Stufen

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = \dots = q_N &\equiv q; \\ s_1 = s_2 = \dots = s_N &\equiv s; \end{aligned}$$

zu setzen. Durch Konstruktionsbedingungen und aus Stabilitätsgründen ist der Parameter s in den meisten Fällen auf $s \sim 1/10$ festgelegt. Der zu optimierende Parameter ist somit q mit $0 < q + s < 1$. Die Raketengleichung lautet jetzt vereinfacht

$$v_0 = -N c_s \ln[q + s] \quad (\text{A.32})$$

Auflösen nach der Stufenzahl und Einsetzen in (A.28) führt zu dem logarithmierten Funktional

$$\ln(\mathbf{F}) = -\frac{v_0}{c_s} \frac{\ln[q]}{\ln[q + s]}, \quad (\text{A.33})$$

welches durch Variation von q maximiert werden muss. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Extremum $q \rightarrow q[s]$ lautet

$$\boxed{(q + s)^{q+s} = q^q} \quad (\text{A.34})$$

Diese Bestimmungsgleichung für eine optimale Unterteilung einer Stufenrakete wurde zum erstenmal von HERMANN OBERTH im Jahre 1941 in

Peenemünde abgeleitet und diskutiert. Ende 1945 erschien ein persönlicher Bericht in englischer Übersetzung an die Amerikanische Kommission, in der es unter anderem hieß:³

I have investigated these questions in 1941 (as far as I know I am the only one) in precise mathematical form and expressed my views in a confidential report of 37 pages: „On the Best Division of Step - aggregates“. Fourteen copies of the report, which was countersigned by the chief of the Peenemünde Project Division, graduate engineer Roth⁴, appeared at that time. Several copies were burned during the 1943 bombing attack, the rest remained in Peenemünde...⁵

Die transzendente Gleichung (A.34) lässt sich numerisch oder durch eine Potenzreihe nach dem Strukturparameter s lösen. Betrachtet man die Taylorreihe nach dem Parameter s

$$(q + s)^{q+s} - q^q = q^q (1 + \ln[q]) s + O[s]^2,$$

so ergibt sich in niedrigster Ordnung in s die Grenze $q = 1/e$; gültig für sehr kleine Strukturparameter s . Die Größe e bezeichnet hier die Eulersche Zahl mit $\ln[e] = 1$. Genauer gilt

$$q[s] = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{2} e s + \frac{1}{24} (e s)^2 + \frac{1}{1920} (e s)^4 + \frac{13}{580608} (e s)^6 + \dots \right) \quad (\text{A.35})$$

Numerische Rechnungen zeigen, dass $q[s]$ mit steigendem s stetig abfällt und bei $s = 1$ den asymptotischen Grenzwert null erreicht. Außerdem gilt $q[1/4] = 1/4$. In der Umgebung dieses kritischen Punktes gilt dann die Entwicklung

$$q[s] = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{\ln[2]} \right) \left(s - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

³David Myhra: Hermann Oberth - One of the Fathers of Rocketry. Published by R.C. Walters RCW Technology Sales & Services Inc. 15082 Iona Lakes Drive, Florida 33908, (2013)

⁴LUDWIG ROTH (1909-1967) war deutsch - amerikanischer Ingenieur und Projektleiter des Peenemünder Büros für Zukunftsprojekte - verantwortlich insbesondere für Stufenraketen wie dem Aggregat A9/A10/A11 und A12, die als Vorlage zur späteren Entwicklung der Saturn 5 AS(501) dienten.

⁵Der 23 seitige Bericht wurde am 4. Oktober 1945 von REYNOLD DREYER ins Englische übersetzt und erschien unter dem Titel: „The Design of a Long - Range Rocket“ .

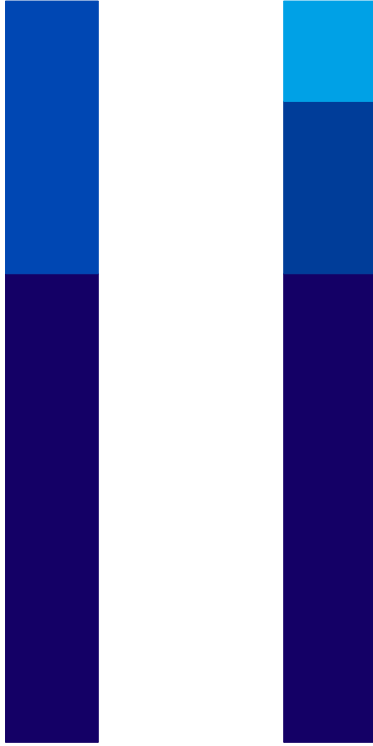


Fig. A.5: *Optimale Massenaufteilung einer zweistufigen und dreistufigen Rakete im Grenzfall $s = 0$, also vernachlässigbarer Strukturmasse. Auffällig ist bei der dreistufigen Variante, wie massiv die erste Stufe gegenüber den anderen Stufen sein muss.*

Auch gilt für die Umkehrung von (A.34) nach s

$$q + s = \exp [\mathbf{W}_0 [q \ln q]]. \quad (\text{A.36})$$

Für ein optimiertes q läßt sich so der dazugehörige Strukturparameter s ableiten. Die optimierte Stufenzahl N der Rakete ergibt sich mit (A.32) zu

$$N = -\frac{v_0}{c_s} \frac{1}{\ln[q + s]} \quad (\text{A.37})$$

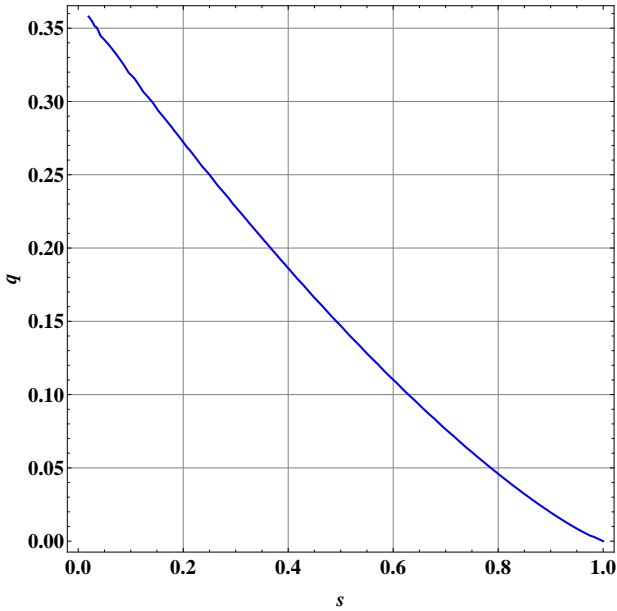


Fig. A.6: Die Funktion $q \rightarrow q[s]$ bei der Optimierung von Raketentufen, berechnet nach (A.34).

oder als Reihenentwicklung

$$N = \frac{v_0}{c_s} \left(1 + \frac{1}{2} e s + \frac{1}{6} (e s)^2 + \frac{1}{16} (e s)^3 + \frac{1}{45} (e s)^4 + \dots \right) \quad (\text{A.38})$$

Die Stufenzahl hängt also im Wesentlichen von der zu erreichenden Endgeschwindigkeit v_0 ab, die mit Gravitation und Luftwiderstand noch nach „Oben“ korrigiert werden muss. Die Zahl wird im Allgemeinen nicht ganzzahlig sein. Dies macht die Einführung von sogenannten *Boostern* (*Verstärkern, Hilfsraketen*) sinnvoll, die mit der ersten Stufe gleichzeitig gezündet werden, aber eher abgeschaltet werden. In diesem Sinne wäre die *Ariane 5* eine 2.5 stufige Rakete.

Um die *gestapelten Einzelmassen* der einzelnen Stufen zu berechnen, setzen wir die Gesamtmasse $m_{Z,1}$ der Rakete beim Start gleich M . Dann gilt mit den obigen Definitionen

$$m_1 = (1 - q) M$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= q(1 - q) M \\
\dots &= \dots \\
m_{N-1} &= q^{N-2} (1 - q) M \\
m_N &= q^{N-1} M
\end{aligned}$$

Es ist hier interessant, die obigen Formeln mit den damaligen Design-Daten der **Saturn V AS(501)** aus den 1960er Jahren zu vergleichen. Die erste Stufe hatte mit vollen Tanks eine Gesamtmasse von etwa $m_1 \sim \mathbf{2145}$ Tonnen, die zweite Stufe $m_2 \sim \mathbf{479}$ Tonnen und die dritte Stufe $m_3 \sim \mathbf{117}$ Tonnen. Die vierte Stufe (Nutzlast) bestand im Wesentlichen aus dem *Apollo Service Modul* und der *Mondfähre*, die jeweils eine Masse von **25** und **15** Tonnen hatten. Man kann also genähert $m_4 \sim \mathbf{40}$ Tonnen annehmen. Für die Gesamtmasse der Rakete ergibt sich so die Abschätzung $M \sim \mathbf{2781}$ Tonnen. Diese Daten entsprechen recht gut einem q -Wert knapp unterhalb von $q \sim 1/4$ und knapp oberhalb von $s \sim 1/4$.

Unabhängig von der Stufenzahl einer *optimierten Rakete* ergibt sich im Grenzfall eines sehr kleinen Strukturparameters der genäherte universelle Ausdruck

$$\begin{aligned}
m_n &\sim e^{-n+1} (1 - e^{-1}) M \\
n &= \{1, 2, \dots, N - 1\}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

und für die letzte Stufe

$$m_N \sim e^{-N+1} M. \tag{A.40}$$

Die Summe aller Einzelstufen m_n ergibt natürlich immer die Gesamtmasse M . In Fig. (A.5) sind für $N = 2$ und $N = 3$ die Massenaufteilungen der einzelnen Stufen für den obigen Spezialfall $s = 0$ anschaulich geometrisch dargestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Allen, H. J. & A.J. Eggers, Jr. : *A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the Earth's atmosphere at high supersonic speeds*. Classified document TN **4047**, 1951; dann TR **1381**, Ames Aeronautical Laboratory, Moffett Field, Calif., 1958
- [2] Anderson, Robert: *Art of Gunnery*, London, 1674.
- [3] Arcy, Patrick von. *Versuch einer Theorie der Artillerie*, Nancy. Übersetzt von J.H. Lambert, Dresden 1766
- [4] Bernoulli, Johann: *Opera Omnia* Tom. I, pag. 514, Tom II, pag. 399. *De motu corporum, gravium, pendulorum, et projectilium in mediis non resistentibus, supposita gravitate uniformi et non uniformi*, 1719
- [5] Bernoulli, Johann: *Responsio ad nonneminis provocationem, ejusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae, de invenienda linea curva quam describit projectile in medio resistente*. Acta Eruditorum Maji, pp. 216-226, 1719
- [6] Bezout, Etienne: *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* 6 Vols. Paris: Bachelier, (1770-1782)
- [7] Blondel, Nicolas Francois: *L' Art de jetter les bombes*. Paris 1683. Deutsch: *Die Kunst Bomben zu werffen, Das ist: Neu-ausgefundene Art die Weiten und Höhen der Würffe und Bogen-Schüsse, nach allerhand Elevationen der Stücke oder Böller zu finden*. Nürnberg 1686.
- [8] de Borda, J.C.: *Sur la courbe d'écrite par les boulets & les bombes, en 'egard 'a la r'esistance de l'air*. In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences ; Année M. DCCLXIX ; Avec les M'emoires de Math'ematique & de Physique de la meme Année, Tirés des Registres de cette Académie, pp. 116-121. L'Imprimerie Royale, Paris 1772

- [9] Busca, Gabriello, 1584: *Instruttione de bombardieri*, (1584). Wahrscheinlich das Erste Artilleriebuch für den Dienstgebrauch [Spaulding1937, p. 98]
- [10] Charbonnier, P.J.: *Traite de Balistique exterieure* (2 vols.) Paris: Doin & Gauthier-Villar 1904-1927
- [11] Charbonnier, Prosper-Jules (1852-1936): *Essais sur l'histoire de la balistique; extrait du Memorial de l'artillerie francaise*. Paris, 1928. Dieses Buch erhielt 1929 den Binoux Preis für Geschichte und Philosophie der Wissenschaften von der Pariser Akademie der Wissenschaften.
- [12] Cranz, C.J. 1898: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, 18. Ballistik*. Leipzig 1898.
- [13] Cranz, Carl Julius: *Lehrbuch der Ballistik I/II/III*. (1910 - 1927) mehrere Auflagen; Ergänzungen 1936. Springer Verlag. *Carl Cranz (1859 - 1945) gilt als Begründer der modernen Ballistik. Insbesondere die innere Ballistik, die Kreiseldynamik rotierender Geschosse und die Hochgeschwindigkeits - Photographie wurden von ihm begründet.*
- [14] Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. and D.E. Knuth: *On the Lambert W Function*. *Advances in Computational Mathematics* **5**, 329 - 359, (1996).
- [15] Didion, Isidor.: *Traite de balistique* Deuxieme Edition, Paris 1860; *Isidor Didion (1798 - 1878) war französischer General. Die Erstausgabe des Buches erschien 1848 und kann als erstes Standardwerk der analytischen Ballistik bezeichnet werden. Die Differentialgleichung dritter Ordnung für das eingeschränkte Problem steht hier auf Seite 86.*
- [16] Euler, Leonhard, *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta*, (Meditation on experiments made recently on the firing of cannon), *Opera Postuma* 2, 1862, pp. 800-804; reprinted *Opera Omnia*, Series 2, Volume 14, pp. 468-477. E853.
- [17] Euler, Leonard.: *Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Gewalt des Pulvers nebs einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen*. Aus dem Englischen des Herrn *Benjamin Robins* übersetzt und mit den

nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen. Berlin, Haude, 1745.

- [18] Euler, L. *Recherches sur la veritable courbe que decrivent les corps jettes dans l'air ou dans un autre fluide quelconque*, Memoires de l'Academie royale des Sciences de Berlin Tome **IX**, 1755, pp. 321-352.
- [19] Gauß, C.F.: [Gauß Werke, Band 11/1](#), pp. 49-53, Göttingen 1927
- [20] Grävenitz, H.F. von, 1764: *Akademische Abhandlung von der Bahn von Geschützkuugeln, nebst praktischen Tabellen und Regeln die Schussweiten zu finden*. Von Wenceslaus Johann Gustav Karsten begleitet. Rostock: Röse, 1764. Diese Arbeit stellt in der Geschichte ein Kuriosum dar, denn hier werden mit siebenstelliger (!) Genauigkeit ballistische Bahnkurven berechnet und tabelliert
- [21] Hennert, J.P. 1796: *Dissertations sur la fortification permanente, la fortification de campagne, et la portee des Bombes. Avec un Plan d'instruction pour les officiers.*, Utrecht: Wild & Altheer, 1796
- [22] Heydenreich, W.: *Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln*, Abteilungen **I/II**. Königliche Hofbuchhandlung, Kochstrasse 68-71, Berlin 1898.
- [23] Lagrange, J.L.: *Mémoire sur la th'éorie g'én'erale de la variation des constantes arbitraires dans tous les probl'emes de la m'échanique*. Mémoires de l'Institut national, classe des Sciences mathématiques et physiques **9**, 257-302, (1809), reprinted in OEuvres, VI, pp. 771-804
- [24] Lambert, J.H.: *Mémoire sur la resistance des fluides avec la solution du problème ballistique*. Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin Tome **XXI**, année 1765/1767, 102-188
- [25] Lambert, J.H.: *Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers und den Widerstand der Luft, auf Veranlassung der von den Herrn Robins und Herrn Ritter d'Arcy darüber angestellten Versuchen.*, Dresden 1766, in der Waltherische Hof - Buchhandlung
- [26] Lambert, J.H.: *Construction d'une échelle ballistique*, Nouveaux Mémoires de L'Académie Royale, 1767

- [27] Legendre, A.M.: *Dissertation sur la question de balistique propos´ee par l’Academie royale des sciences et belles-lettres de Prusse pour le prix de 1782*. G. J. Decker, Berlin, (1782)
- [28] Littlewood, J.E. (1953): *A Mathematician’s Miscellany*. Methuen & CO. LTD. London. 36 Essex Street, Strand, W.C. 2
- [29] Mandryka, Aleksei Petrovich: *The significance of Euler’s research in ballistics*, pp. 241-244 in Euler and Modern Science, MAA 2007. Dies ist eine englische Übersetzung des russischen Originaltextes von 1988
- [30] McCoy, Robert L.: *Modern exterior ballistics. The launch and flight dynamics of symmetric projectiles*, Schiffer Publishing, Ltd.; 2nd edition edition, pp. 328, (May 28, 2012) Das heutige Standardwerk über äußere BALLISTIK
- [31] Magnus, G.: *Ueber die Abweichung der Geschosse und über eine auffallende Erscheinung bei rotirenden Körpern*, Annalen der Physik und Chemie, Band **28**, S. 1 -28, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1853
- [32] [Apollo Atmospheric Entry Phases - 1968 NASA Educational Documentary](#);
- [33] Napoleon. *Napoleon inconnu*. Papiers inedits (1786-1793). Edited by Frederic Masson et Guido Biagi; Paul Ollendorff, Editeur, pp. 558, 1895
- [34] Oberth, Hermann: *Die Rakete zu den Planetenräumen*. Mit Tafeln und 58 Textabbildungen. München und Berlin 1923. Druck und Verlag von R. Oldenbourg.
- [35] Oberth, Hermann: *Wege zur Raumschiffahrt*. 431 Seiten und und 159 Textabbildungen. München und Berlin 1929. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. Englischer Nachdruck [Ways to Spaceflight](#), NASA TT-F-622, (1970). In diesem umfangreichen Werk - eigentlich die stark erweiterte dritte Auflage des Buches von 1923 - beschreibt HERMANN OBERTH auch die optimale Aufstiegsbahn einer Rakete als Raketenlinie und Synergiebahn, wobei auch die Erdrotation energetisch ausgenutzt wird.
- [36] Parker, G.W.: *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*. Am. J. Phys. **45** (7), pp. 606-610, (1977)

- [37] Poisson, A.S.: *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air* (Paris 1839)
- [38] Rayleigh, J.W.S.: *On the irregular flight of a tennis ball*, *Messenger of Mathematics* **VII**, 14 - 16, (1877); *Scientific Papers*, **I**, 344 (1869-1881)
- [39] Robins, Benjamin: *New principles of gunnery*: containing the determination of the force of gun-powder, and an investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions, with several other tracts on the improvement of practical gunnery / by Benjamin Robins ... with an account of his life and writings by James Wilson, London: F. Wingrave, 1805. New ed. / corrected, and enlarged with the addition of several notes, by Charles Hutton. London 1742 Robins (1707 - 1751) hat auch schon den sogenannten „Magnus-effekt“ bei rotierenden Kanonenkugeln beschrieben. Im damals britisch besetzten Indien machte er auch erste „Erfahrungen“ mit Raketenballistik.
- [40] Rohde, Johann Philipp von: *Mathematische Abhandlungen: I. Ueber das ballistische Problem. II. Ueber die Änderungen der Elemente, der Planeten - und Cometenbahnen, in einem widerstehenden Mittel*. Potsdam, bei Carl Christian Horvarth 1797. Johann Philipp von Rohde (1759 - 1834) studierte in Göttingen bei KÄSTNER und LICHTENBERG und trat dann frühzeitig in die preußische Armee ein. Er unterrichtete mit CHRISTIAN VON MASSENBACH (1758-1827) an der Ingenieurakademie in Potsdam und stieg bis zum Generalmajor auf. Wissenschaftlich beschäftigte er sich mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen zur Mathematik, Astronomie, Physik und Geophysik, die damals nicht unbedingt im Zentrum der akademischen Forschung standen. So sind seine Bemerkungen zu langfristigen Klimaänderungen aufgrund von Bahnänderungen und Achsenverschiebungen der Erde seiner Zeit weit voraus (Jahreszeiten von höherer Ordnung (Königsberg 1809)).
- [41] Ruppe, H.O.: *Introduction to Astronautics*. Academic Press, New York & London, 2 Volumes, 1966-1967 Das Standardwerk zu theoretischen Aspekten der Raumfahrt von H.O. Ruppe (1929-2016) aus den 1960er Jahren enthält auch den Versuch, die ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete durch Reihenentwicklungen nach der Zeit zu lösen.
- [42] Scharnhorst, G. von: *Über die Wirkung des Feuegewehrs*. Für die Königlich preussischen Kriegs - Schulen, Berlin - Nauck, 1813

- [43] Seydell, C.F. 1811: *Abhandlung über Einrichtung und Gebrauch des kleinen Gewehrs*. Berlin 1811, in der Voßischen Buchhandlung.
- [44] Shouryya, Ray & Jochen Fröhlich : *An analytic solution to the equations of the motion of a point mass with quadratic resistance and generalizations*. arXiv:1305.1283v5 (2014)
- [45] Siacci, F.: *Corso di Balistica*. 3 vol., Torino 1888
- [46] Siemienowicz, Kazimierz: *Artis magnae artilleriae pars prima* Amsterdam: Jan Jansson, 1650. *Vollkommene Geschütz-Feuerwerch-und Buchsenmeisteren-Kunst*, Frankfurt am Main: In Verlegung Johann David Zunner, gedruckt bey Henrich Friessen, 1676., *The great art of artillery of Casimir Siemienowicz*, London: J. Tonson, 1729.
- [47] Steele, Brett D.: *Muskets and Pendulums: Benjamin Robins, Leonard Euler, and the Ballistics Revolution*. *Technology and Culture* **35**, No.2 April 1994, pp. 348-382
- [48] Struensee, Carl August: *Anfangsgründe der Artillerie*, Leipzig und Liegnitz, zweite Auflage, 1769, Im Verlage der David Siegertischen Buchhandlung, 563 Seiten. Carl August Struensee (1735 - 1804) war zuletzt preußischer Finanzminister und Mitglied der geheimen Berliner Mittwochsgesellschaft, die von 1783 - 1798 existierte und sich der Spätaufklärung verpflichtet sah.
- [49] Szabo, Istvan (1906 - 1980): *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser, Basel, 1977, 1979, ISBN 3-7643-1735-3, 3. erweiterte Auflage herausgegeben von Peter Zimmermann, Emil Fellmann, 1987 (mit Biographie und Publikationsverzeichnis von Szabo).
- [50] Tait, P.G. (1890): *Some Points in the Physics of Golf*. *Nature* **42**, 420-423 (1890)
- [51] Tait, P.G. (1896): *Scientific Papers Vol. II*. Cambridge at the University Press (1900)
- [52] Tartaglia, Niccolo: *La nova scientia de Nicolo Tartaglia : con una gionta al terzo libro*, 1537
- [53] Tartaglia, Niccolo: *Quesiti et inventioni diverse*, 1546

- [54] Tempelhoff, Georg Friedrich von, 1781: *Le Bombadier Prussien ou du Mouvement des projectiles en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré des vitesses*. Berlin 1781, Friedrich der Große stellte 1781 dieses Buch unter militärische Geheimhaltung. Sehr geheim kann es aber nicht gewesen sein, denn 1796 berichtet F.X. VON ZACH in einer Rezension über ein Buch des Mathematikers J. HENNERT über seinen Inhalt, als ob er es flüchtig eingesehen hätte.
- [55] Torricelli, Evangelistae, 1644: *Opera Geometrica*
- [56] Ufano, 1613: *Tratado de la Artilleria y uso de la platicada por el capitan Diego Ufano en las Guerras de flandes*. 1613
- [57] Vega, Georg Freiherr von, (Slowenisch: JURIJ VEGA), 1787: *Praktische Anweisung zum Bombenwerfen mittels dazu eingerichteter Hilfstabeln*. Ein Fragment aus dem dritten Bande der mathematischen Vorlesungen des Artilleriehauptmanns und Professors der Mathematik bei dem kaiserlich königlichen Bombardierkorps. Wien, 1787. Der Freiherr von Vega (1754 - 1802) ist bis heute durch seine Logarithmentafeln berühmt geblieben, sowohl die Siebenstellige als auch die Zehnstellige. Die Erstere war eigentlich nur zur Berechnung von ballistischen Kurven angelegt worden. Der Schriftsteller Arno Schmidt nimmt in seinem Werk vielfältig Bezug auf Vega, dem er sich als mathematisch Interessierter und Artilleriesoldat im 2. Weltkrieg besonders verbunden fühlte.
- [58] Yabushita, K., Yamashita, M. & K. Tsuboi 2007: *An analytical solution of projectile motion with quadratic resistance law using the homotopy analysis method*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **40**, N. 29, 8403
- [59] Zach, Franz Xaver von, 1796: Rezension über das Buch von J.F. HENNERT: *Dissertations sur la fortification permanente, la fortification de campagne, et la portee des Bombes. Avec un Plan d'instruction pour les officiers*. , Utrecht: Wild & Altheer. Erschienen in *Allgemeine Literatur - Zeitung*, Band **4**, Numero 373 - 374, Spalten 521 - 534, 1796