MANUALI HOEPLI

# LEZIONI
DI
# CALCOLO INFINITESIMALE

DETTATE DA

*ERNESTO PASCAL*
Professore ordinario nella R. Università di Pavia,
Membro effettivo del R. Istituto Lombardo,
Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei,
Membro dell'Accademia Reale delle Scienze di Praga,
Socio corrispondente della Pontaniana di Napoli, ecc.

## PARTE I.
## CALCOLO DIFFERENZIALE

**Con 10 incisioni**

**2ª Edizione completamente riveduta.** 1902

## PARTE II.
## CALCOLO INTEGRALE

**Con 15 incisioni** 1895

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1895 1902

Tip. Lombardi di M. Bellinzaghi
Milano - Fiori Oscuri, 7 - Milano

# PREFAZIONE

La prima edizione di quest'opera venne alla luce nel 1894. Essendo essa ora completamente esaurita, mi sono accinto a questa seconda edizione, la quale contiene, rispetto alla prima, numerose modificazioni ed aggiunte, pur conservandone però inalterato l'ordinamento e lo schema fondamentale.

La materia che vi è esposta è, su per giù, tutta quella che si suole sviluppare in un ordinario corso di Calcolo infinitesimale per i giovani che aspirano ad entrare nelle Scuole speciali per gli Ingegneri, e che formano la gran maggioranza degli studenti del primo biennio della Facoltà Matematica nelle nostre Università.

La piccola mole di questi volumi non deve far credere che la materia vi sia scarsa, chè anzi, a causa dei fitti tipi, essa vi è in giusta misura.

È certo che per le profonde modificazioni che lo spirito critico ha al presente impresse nei fondamenti del Calcolo, anche un Corso destinato a quelli che le Matematiche hanno come mezzo e *non come scopo, non può fare a meno dei nuovi risultati cui si è pervenuti, e il suo piano deve staccarsi profondamente da quello degli antichi Trattati; farebbe perciò vedere di avere corta vista e poca stima del compito dei futuri Ingegneri, chi credesse che a questi basti imparare, se pure il possono, ad adoperare il Calcolo quasi allo stesso modo col quale un operaio sa bravamente far funzionare una macchina, costruita da altri, e di cui egli ignori gli interni congegni. Però la misura anche in questo non guasta, e certamente l'esagerare in certi sviluppi sarebbe didatticamente dannoso per un qualunque principiante, specialmente perchè gli farebbe annebbiare o perdere lo sguardo sintetico dell'insieme, e lo condurrebbe ad una non equa valutazione dell'importanza relativa delle varie parti della scienza.*

*Una trattazione più particolareggiata, e con maggiori sottigliezze critiche, dei teoremi e problemi fondamentali del Calcolo infinitesimale, si presenta necessaria per gli studenti di Matematiche pure; ma a ciò possono bastare delle apposite lezioni complementari, ed è precisamente a tale scopo che io ho pubblicato da varii anni un altro volume intitolato:* Note critiche di Calcolo infinitesimale (*Milano, 1895*), *nel quale sono discusse, dal punto di vista critico, con una quantità di esempï singolari, le varie quistioni di cui tratto in queste lezioni, nel corso delle quali avrò spesso occasione di riferirmi a quelle mie* Note critiche.

*Ho detto d'avere conservato in questa seconda edizione lo schema generale della prima, cioè il medesimo ordinamento delle varie parti.*

*Avrei invece potuto introdurre anch' io quella novità che si trova in alcuni recenti e pregevoli Trattati, la prosmicua, cioè, esposizione dei due Calcoli, il differenziale e l'integrale; ma non l'ho fatto non essendomi convinto dei vantaggi scientifici e didattici che presenta questa fusione, la quale d'altra parte, anzichè una vera e propria fusione, sembrami che, salvo lievi eccezioni, venga piuttosto a ridursi ad uno spostamento di Capitoli, giacchè i concetti, le definizioni, le dimostrazioni, i procedimenti in genere, salvochè in qualche punto di secondaria importanza, restano in sostanza gli stessi di prima.*

Milano, Giugno del 1902.

ERNESTO PASCAL.

# INDICE

## CAPITOLO I.

### FUNZIONI REALI DI VARIABILI REALI.


§ 1. Variabili reali; gruppi di punti; punti limiti . Pag. 1
§ 2. Funzione di una variabile . . . . . . . . „ 7
§ 3. Funzione di più variabili . . . . . . . . „ 12
§ 4. Teorema di Weierstrass sui limiti superiori e inferiori dei valori di una funzione . . . . . „ 13
§ 5. Limiti delle funzioni . . . . . . . . . . „ 15
§ 6. Condizione per l'esistenza di un limite . . . „ 22
§ 7. Continuità delle funzioni di una o più variabili. Serie convergenti in egual grado. Serie di potenze. . . . . . . . . . . . . . . . . „ 26
§ 8. Teoremi sulle funzioni continue di una sola variabile. Funzioni uniformemente continue. . . „ 39
§ 9. Considerazioni sulle funzioni continue di più variabili . . . . . . . . . . . , . . . . „ 47
§ 10. Variabili aventi per limite zero o per limite l'infinito. Infinitesimi ed infiniti . . . . . . „ 51
§ 11. Calcolo di alcuni limiti particolari . . . . . „ 60


## CAPITOLO II.

### DERIVATE DI UNA FUNZIONE.


§ 1. Derivata di una funzione di una sola variabile „ 6

§ 2. Teoremi di derivazione per le funzioni esplicite. Derivazione per serie . . . . . . . . . . I

§ 3. Calcolo delle derivate delle funzioni esplicite più semplici . . . . . . . . . . . . . .

§ 4. Funzioni aventi derivata in un intervallo; teorema di Rolle; teorema del valore medio e suoi corollari . . . . . . . . . . . . . . . .

§ 5. Differenziali. Notazione fondamentale per la derivata. Derivate e differenziali di ordine superiore . . . . . . . . . . . . . . . . . .

§ 6. Derivate parziali e differenziali delle funzioni di più variabili indipendenti. Il teorema del differenziale totale . . . . . . . . . . .

§ 7. Derivate e differenziali di ordine superiore per le funzioni di più variabili indipendenti. Teorema d'inversione delle derivazioni . . . . .

§ 8. Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili dipendenti. Funzioni composte. Teorema del valore medio per le funzioni di più variabili indipendenti . . . . . . . . . . . . . . .

§ 9. Calcolo delle derivate delle funzioni implicite di una o più variabili. . . . . . . . . . .

§ 10. Proprietà di funzioni di più variabili rispetto alle loro derivate parziali. Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee . . . . . . . . .


## CAPITOLO III.

### SVILUPPABILITÀ IN SERIE DELLE FUNZIONI.


§ 1. Generalizzazione del teorema del valor medio per le funzioni di una o di più variabili. Formole di Lagrange e di Cauchy . . . . . . . . .

§ 2. Formola di Taylor-Maclaurin. Condizione *necessaria e sufficiente* per la sua validità . . . .

§ 3. *Applicazione* della formola di Taylor-Maclaurin

## CAPITOLO IV.

### STUDIO DEI DIVERSI MODI DI VARIARE DI UNA FUNZIONE NELLE VICINANZE DI UN PUNTO.


§ 1. Funzioni crescenti e funzioni decrescenti in un punto . . . . . . . . . . . . . . . . . Pag. 174
§ 2. Massimi e minimi delle funzioni di una sola variabile . . . . . . . . . . . . . . . . „ 179
§ 3. Massimi e minimi delle funzioni di più variabili „ 183
§ 4. Calcolo dei massimi e minimi nel caso delle funzioni implicite . . . . . . . . . . . . „ 195


## CAPITOLO V.

### ALCUNE APPLICAZIONI ANALITICHE.


§ 1. Limite del quoziente di funzioni. Forme indeterminate. Loro risoluzione . . . . . . . . . „ 200
§ 2. Determinante funzionale di più funzioni. Dipendenza ed indipendenza delle funzioni di più variabili . . . . . . . . . . . . . . . . . „ 212
§ 3. Indipendenza lineare delle funzioni di una sola variabile. Determinanti wronskiani . . . . . „ 217


## CAPITOLO VI.

### APPLICAZIONI GEOMETRICHE. PRINCIPII DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE.


§ 1. Arco e corda di una curva piana o storta . . „ 221
§ 2. Tangente e normale alle curve piane . . . . „ 225
§ 3. Ricerca degli assintoti di una curva piana . . „ 234
§ 4. Concavità e convessità delle curve piane rispetto all'asse delle x . . . . . . . . . . . . „ 237
§ 4. Curvatura delle linee piane . . . . . . . „ 248
*§ 6. Centro di curvatura* . . . . . . . . . . „ 251
*§ 7. Evolute ed* evolventi . . . . . . . . . . „ 256

§ 8. Contatti delle curve . . . . . . . . . . . 1
§ 9. Curve osculatrici . . . . . . . . . . .
§ 10. Curve inviluppi . . . . . . . . . . . . .
§ 11. Tangente e piano normale a una curva storta .
§ 12 Piano tangente e retta normale ad una superficie
§ 13. Del raggio di di curvatura in un punto di una curva storta . . . . . . . . . . . . . .
§ 14. La normale principale . . . . . . . . .
§ 15. Del centro di curvatura . . . . . . . . .
§ 16. Contatto di una curva e di una superficie . .
§ 17. Del piano osculatore . . . . . . . . . .
§ 18. Della torsione . . . . . . . . . . .
Aggiunte . . . . . . . . . . . . . .

# CAPITOLO I.

## Funzioni reali di variabili reali.

§ 1. **Variabili reali; gruppi di punti; punti limiti.** — Si sa dall'Algebra che cosa si intende per *grandezza variabile* o semplicemente *variabile; una grandezza considerata come capace di acquistare valori diversi, i quali possono essere in numero finito o infinito*. Misurando la grandezza con un'altra della stessa specie scelta per unità di misura, ad ogni suo valore si può far corrispondere un numero reale razionale o irrazionale, positivo o negativo. L'assieme di tutti i valori di cui è capace la variabile, si chiama il suo *campo di variabilità.*

Useremo spesso una comoda rappresentazione geometrica del campo di variabilità. Su di una retta segniamo un punto fisso; ogni punto della retta avrà una certa distanza dal punto fisso, e questa distanza, fissata che sia un'unità di misura, si può misurare con un numero. Consideriamo come positive le distanze dei punti che restano alla destra del punto fisso, e come negative le altre; allora evidentemente ad ogni numero reale, *positivo o negativo*, corrisponderà un punto della retta, e ad ogni punto della retta corrisponderà un numero siffatto. Poichè inoltre ad ogni valore di una variabile, come abbiam detto, corrisponde anche un numero reale, così ogni valore della variabile resterà rappresentato da un punto della retta, e il *campo di variabilità* sarà rappresentato dall'assieme di punti della retta (in numero finito o infinito) i quali possono o costituire uno o più segmenti completi della medesima, ovvero essere punti fra loro staccati.

In vista di tale rappresentazione geometrica, noi, nel corso di queste lezioni, spesse volte in luogo di parlare di: *valori della variabile*, diremo: *punti della retta;* così p. es. ci occorrerà spesso usare delle espressioni come questa: *consideriamo la variabile nel punto a*, intendendo dire: *consideriamo quel valore della variabile cui corrisponde il punto a della retta.*

Se un punto della retta appartiene al campo di variabilità e nello stesso tempo appartiene ad un segmento i cui punti *tutti* appartengono al medesimo campo, noi diremo che la variabile data è *continua* in quel punto; se il segmento di cui si parla si estende solo alla destra o solo alla sinistra del dato punto, allora la variabile in quel punto sarà continua solo a destra o solo a sinistra.

Se $a$ è un punto della retta appartenente o no al campo, ma però tale che segnando alla sua destra o alla sua sinistra o da ambo le parti, un segmento piccolo a piacere avente $a$ per estremo, si trovi sempre in tal segmento, per quanto piccolo esso sia, un punto facente parte del campo, *allora diremo* che $a$ rappresenta un *limite dei va-*

*lori della variabile.* Così p. es. il campo contenga gli infiniti punti

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots\ldots;$$

è chiaro che segnando alla destra del punto zero, un segmento piccolo a piacere, in esso si troveranno sempre infiniti punti di tale specie; quindi il punto zero è il *punto limite* dei valori della variabile.

È necessario ora introdurre il concetto di *punti all'infinito* ($\pm\infty$) della retta ovvero *valori* $\pm\infty$ della variabile.

Se un campo è tale che scelto un punto della retta, lontano per quanto si voglia dall'origine, verso la parte positiva, alla destra di esso esistano sempre punti appartenenti al campo, si dirà che *l'estremo superiore del campo è il punto* $+\infty$; se invece, scelto un punto della retta, verso la parte negativa, lontano per quanto si voglia dall'origine, alla sinistra di esso esistono sempre punti appartenenti al campo si dirà che l'*estremo inferiore del campo è il punto* $-\infty$. In corrispondenza a ciò si dirà che *un limite dei valori della variabile è* $+\infty$ *nel primo caso e* $-\infty$ *nel secondo.* Queste però non bisogna considerarle che come delle *espressioni abbreviate* per indicare che si verifica la suindicata proprietà.

---

Infiniti valori della variabile corrispondono ad infiniti punti della retta; un assieme di tali infiniti punti della retta si suol chiamare un **gruppo infinito di punti.**

Si può far vedere che *un gruppo infinito di punti distribuiti in un segmento finito deve possedere sempre almeno un punto limite.*

La dimostrazione completa di questo teorema non la possiamo dare per ora, perchè essa risulterà da considerazioni che faremo un poco più avanti, ai §§ 5 e 6. Ci limiteremo solo a fare le seguenti considerazioni:

Dividendo il segmento finito in altri minori, vi deve essere sempre *almeno* uno di questi ultimi in cui sien contenuti infiniti punti del gruppo primitivo, altrimenti il gruppo primitivo risulterebbe di un numero finito di punti. Dividendo allora tale ultimo segmento parziale in altri minori, e ripetendo la stessa considerazione e poi la stessa suddivisione, si vede che *si potrà trovare un segmento minore di qualunque quantità assegnabile e dentro cui sien contenuti infiniti punti del gruppo.*

Chiamiamo $a_1, a_2, \ldots.$ gli estremi a sinistra di ciascuno dei segmenti ottenuti colla successiva divisione, e contenenti infiniti punti del gruppo, supposto che, dopo ogni divisione, di tali segmenti, se anche ve ne sia più di uno, se ne scelga sempre uno solo, e chiamiamo $b_1, b_2, \ldots.$ gli estremi a destra dei segmenti medesimi. Essendo ogni segmento sempre *compreso* nel precedente si hanno le disuguaglianze

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots..$$
$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots..$$
$$a_k < b_h$$

e inoltre la differenza $b_n - a_n$, rappresentando l'ampiezza di un segmento, si può rendere piccola a piacere, aumentando il numero $n$.

Di qui si può ricavare l'esistenza di un punto limite cogli stessi ragionamenti che faremo più avanti al § 6.

Se gli infiniti punti del gruppo non sono più racchiusi in un segmento finito della retta, ma in un segmento che si estende anche all'infinito, allora, per la definizione data sopra di punto limite all'infinito, si vede che *l'infinito positivo o negativo sarà certamente un punto limite del gruppo.*

Esempio di tale ultimo gruppo potrebbe essere quello di tutti i numeri interi positivi o negativi.

Un gruppo può avere infiniti punti limiti, e allora questi formano a loro volta un gruppo che si suol chiamare il *primo gruppo derivato* dal gruppo dato. Analogamente si ha il *2°, 3°... gruppo derivato.*

*L'assieme di tutti i numeri razionali forma un gruppo i cui punti limiti sono tutti i numeri possibili razionali ed irrazionali.* Si sa infatti che si può sempre calcolare un numero razionale che differisca dal valore di un dato numero (razionale o irrazionale) per una quantità minore di un'altra assegnata piccola a piacere.

Considerando un gruppo infinito di punti racchiusi in un intervallo finito della retta, esisterà un punto della retta tale che alla sua destra non esistono altri punti del gruppo, e che inoltre o appartiene al gruppo e in un intervallo piccolo a piacere alla sua sinistra si contengano sempre punti del gruppo stesso, ovvero, pure appartenendo al gruppo, non si verifica la seconda proprietà, o finalmente, *non appartenendo al gruppo,* si verifica invece la seconda proprietà. Nel primo e secondo caso tal punto si chiamerà il *massimo* dei valori della variabile e nel terzo caso si dirà il *limite superiore.* Evidentemente il limite superiore è un punto limite del gruppo.

Analogamente si definirebbero il *minimo* e il *limite inferiore.*

Si noti che il concetto dell'esistenza di un massimo o di un limite superiore è un concetto indipendente da quello dell'esistenza dei *punti limiti* di un gruppo infinito, e cioè, mentre per poter dimostrare completamente l'esistenza di questi ultimi, bisogna servirsi, come abbiamo detto, di considerazioni che saranno fatte al § 6, l'esistenza dei primi invece resta già del tutto dimostrata da quanto si è sopra detto.

---

Consideriamo ora due variabili $x_1$ $x_2$ fra loro indipendenti. Le coppie di valori di tali variabili potranno rappresentarsi mediante i punti del piano, come abbiamo rappresentato i valori di una sola variabile mediante i punti di una retta. Basterà perciò ricordare la solita rappresentazione adoperata nella Geometria analitica; scegliendo nel piano due assi coordinati, su ciascuno di essi si segneranno i valori di $x_1$ e di $x_2$, e così ad ogni punto del piano corrisponderà una coppia di variabili, e ad ogni coppia di variabili corrisponderà un punto del piano.

Similmente un sistema di valori di tre variabili *potrà essere* geometricamente rappresentato dai punti di uno spazio a tre dimensioni e volendo, per comodità di rappresentazione, introdurre, come spesso si fa, la considerazione di un cosidetto *spazio ad n dimensioni*, un sistema di valori di $n$ variabili potrà essere geometricamente rappresentato dai punti di un tal spazio.

Un assieme di infiniti punti del piano si chiamerà un *gruppo di punti*, ed è chiaro che per tale gruppo possono ripetersi tutte le considerazioni fatte pei gruppi di punti su di una retta. Cosi esisteranno dei *punti limiti*, che sono definiti dalla proprietà che in un intorno comunque piccolo attorno ad essi, esistono sempre infiniti punti del gruppo. Non ci dilunghiamo su ciò, perchè le estensioni delle cose già dette sono del tutto ovvie.

§ 2. **Funzione di una variabile.** — Due variabili $x$, $y$ possono essere legate fra loro da un rapporto di dipendenza, in modo che, assegnato il valore ad una variabile p. es. $x$, resti assegnato anche un valore per l'altra variabile $y$. Cosi p. es., consideriamo tutti i cerchi che si possono descrivere attorno un centro fisso. Il *raggio* di tutti questi cerchi è una quantità variabile, ed è anche una quantità variabile la loro *area*. Ma è noto che fissato un valore per il raggio, resta fissato anche quello per l'*area;* le due variabili sono dunque dipendenti l'una dall'altra.

Ora questa dipendenza potrà essere di varia natura; potrà accadere che per *certi* valori della variabile $x$, si abbia per $y$ un valore determinato e unico; per certi altri valori di $x$, per $y$ si abbiano diversi valori determinati, e per certi altri *infine, non si* abbia per $y$ nessun determinato valore, così che la dipendenza propriamente detta scompaia per certi valori di $x$.

Ma immaginiamo di considerare solo un tal campo di variabilità di $x$, e di definire in tal maniera la dipendenza fra $x$ e $y$ che per ogni punto del campo la $y$ resti *determinata sempre ed in un modo solo;* diremo allora che $y$ è *funzione* di $x$ in quel campo; la $x$ si chiamerà la *variabile indipendente.*

Per indicare che $y$ è funzione di $x$, si adopererà un simbolo come questo:

$$y = f(x),$$

rappresentando $f$, o qualunque altra lettera si voglia, il simbolo di *funzione.*

Se la dipendenza fra le due variabili $x, y$ è tale che mentre $y$ si può considerare funzione di $x$, anche $x$ può inversamente considerarsi funzione di $y$, la funzione $x$ si chiamerà *inversa* della funzione $y$.

Stabilito il concetto di funzione, vien subito la domanda: c'è un mezzo analitico o geometrico per rappresentare la dipendenza che esiste fra la funzione $y$ e la variabile indipendente $x$? cioè un mezzo mediante il quale dato un valore ad $x$, si possa ricavare il corrispondente valore di $y$?

Un'idea che viene spontanea è la seguente: consideriamo, come si fa in Geometria analitica, le $x$ e $y$ come le coordinate di un punto del piano. Facendo variare $x$, facendole assumere tutti quegli infiniti valori pei quali la funzione $y$ è stata definita, si avranno infiniti punti del piano, *i quali il più delle volte potranno* formare una curva nel senso ordinario della parola; disegnata che si è questa curva, è chiaro che si ha una rappresentazione geometrica della funzione $y$, inquantochè la curva potrà rappresentare in certo modo, la maniera di variare di $y$ rispetto al variare di $x$. Però avvertiamo che una siffatta rappresentazione geometrica non sempre è possibile, potendo immaginarsi funzioni per le quali gli infiniti punti di coordinate $x$, $y$ non costituiscano nel loro assieme una curva nel senso ordinario della parola.

Esempii di ciò se ne possono dare molti e di varia natura. Basta limitarsi al seguente: si immagini la funzione cosidetta di DIRICHLET (1), che *per tutti i valori razionali di $x$ sia zero, e per tutti i valori irrazionali di $x$ sia 1.*

La rappresentazione geometrica di questa funzione è l'assieme di tutti i punti razionali sull'asse di $x$, e di tutti i punti irrazionali su di un asse parallelo al primo e distante da esso della quantità 1. Tutti questi punti non formano però una curva nel senso ordinario della parola.

In quanto ad una rappresentazione analitica delle funzioni ecco quello che abbiamo a dire. Nelle Matematiche elementari, e nell'Algebra, si sono studiate le operazioni fondamentali che si possono fare colle quantità, come la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione a potenza, l'estrazione di radice; ciascuna di queste operazioni applicata alla variabile $x$ dà per risultato una nuova variabile il cui valore dipende in

(1) *Per tale funzione* v. il n. 1 del mio volume: Esercizii e *note critiche di calcolo infinitesimale*, Milano 1895.

generale dal valore di $x$, e che può dunque in generale dirsi una *funzione* di $x$. Lo stesso può dirsi se sulla variabile $x$ non si applica una sola di quelle operazioni, ma parecchie di esse, ovvero una stessa si ripeta un numero finito di volte, o anche infinite volte, come sarebbe il caso delle serie infinite o dei prodotti infiniti che si studiano nell'Algebra. Altri esempi di funzioni sarebbero dati da quelle variabili $y$ che rappresentano rispettivamente il seno, il coseno, la tangente etc., di un arco $x$, oppure il logoritmo o l'esponenziale di un numero $x$.

Ognuna di queste funzioni corrisponde ad una *operazione analitica* ben determinata da effettuarsi sulla variabile, e ogni funzione il cui valore possa calcolarsi effettuando una successione di tali operazioni si dirà *una funzione capace di una rappresentazione analitica*; però avvertiamo che *la possibilità di una rappresentazione siffatta non è affatto inerente al concetto e alla definizione generale di funzione,* potendo immaginarsi una dipendenza tale fra $x$ e $y$ che non possa essere siffattamente con formole analitiche rappresentata per *tutto* il campo di variabilità della $x$; perciò quando noi parliamo di *funzioni*, facciamo astrazione, in generale, dalla possibilità o meno della sua *rappresentazione analitica.*

Fra le operazioni analitiche enumerate di sopra è da aggiungersi anche la cosidetta *operazione di limite* di cui si parla nell'Algebra, e di cui tratteremo più sotto; una funzione la cui rappresentazione analitica dipenda da tale operazione è *p. es. quella di* DIRICHLET, e per essa rimandiamo *volume citato* alla pag. precedente.

Una funzione rappresentabile analiticamente, e nella quale la variabile $x$ e le sue potenze intere sieno sottoposte solo alle quattro prime operazioni fondamentali dell'aritmetica, si chiama una funzione *razionale*. La sua forma generale è:

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}.$$

Se invece la variabile $x$ e le sue potenze intere sono assoggettate alle sole tre prime operazioni (somma, sottrazione, moltiplicazione) allora si ha la funzione *razionale intera.*

La rappresentazione analitica di cui abbiamo trattato finora, si suol chiamare *esplicita,* per contrapporla ad un'altra specie di rappresentazione analitica che si chiama *implicita.*

Immaginiamo data una relazione analitica fra le due variabili $x$, $y$, cioè immaginiamo stabilita una serie di operazioni analitiche da farsi contemporaneamente sulle due variabili, e fissato che per queste variabili si debbano prendere tali coppie di valori che, eseguite le indicate operazioni, il risultato finale sia lo zero; in simbolo ciò lo indichiamo colla formola

$$f(x, y) = 0$$

dove $f$ indica l'assieme di tutte quelle operazioni analitiche da eseguirsi. Per fissare le idee, supponiamo che si abbia un'equazione di grado $n$ in $y$, e i cui coefficienti sieno delle determinate funzioni *di $x$. In* questo caso è chiaro che dato un valore ad $x$, si ha un'equazione in $y$ a coefficienti determinati, la quale, come si sa dall'Algebra, ammette sempre $n$ radici reali o immaginarie; se fra queste radici ce n'è sempre una *reale* quando $x$ non oltrepassi certi valori, e se fissiamo poi una maniera colla quale possiamo volta per volta prendere in considerazione una speciale radice reale invece di tutte le altre che per avventura potranno esserci, allora è chiaro che per ogni $x$ compresa in quel certo campo di variabilità, la $y$ resta determinata e potrà perciò dirsi *funzione* di $x$. Il valore di $y$ resta così rappresentato come radice di una certa equazione, e quindi non potrà calcolarsi, se non si sa risolvere l'equazione; la $y$ si chiama allora una funzione rappresentata *implicitamente*, o una funzione *implicita* di $x$; se si può risolvere l'equazione, la formola di risoluzione, darà la rappresentazione analitica *esplicita* della funzione.

Prima di por termine a questo paragrafo noi dobbiamo avvertire una cosa; poichè nel § 1 abbiamo rappresentato i valori di una variabile mediante i punti di una retta, così siamo naturalmente condotti a usare in seguito l'espressione: *funzione dei punti della retta*, per dire: funzione della variabile i cui valori sono rappresentati da quei tali punti della retta.

§ 3. **Funzione di più variabili**. — Il concetto di funzione esplicato nel § precedente può estendersi. Si abbiano $n+1$ variabili $y, x_1, x_2, \ldots . x_n$ e sieno tali che assegnando alle $x$ certi valori compresi in campi determinati, ogni volta la $y$ assuma un valore determinato; la $y$ si chiamerà *funzione delle variabili* $x$.

Per semplicità supponiamo che si tratti di due sole variabili $x_1$, $x_2$.

Se tutti gli infiniti punti del piano per i quali è definita la funzione $y$, formano un'area piana, noi diremo che *la $y$ è una funzione definita nell'interno di quell'area piana.*

Si può ideare una rappresentazione geometrica delle funzioni di più variabili che sia la estensione diretta di quella indicata nel § 2 per le funzioni di una sola variabile. Consideriamo il caso di due sole variabili indipendenti, il cui campo di variabilità sia rappresentato da una certa area piana. Per ogni punto di questa, elevando una perpendicolare al piano, e su questa, segnando il punto la cui distanza dal piano corrisponda al valore di $y$, si potrà avere nell'assieme di tutti questi punti dello spazio, una falda di superficie, che potrà geometricamente rappresentare la funzione a due variabili.

Si potrebbero infine ripetere per le funzioni di più variabili tutte quelle considerazioni già fatte sulla rappresentabilità analitica esplicita e implicita delle funzioni di una sola variabile.

§ 4. **Teorema di Weierstrass sui limiti superiori e inferiori dei valori di una funzione.** — Immaginiamo una funzione di una o più variabili reali: per fissare le idee supponiamo che si tratti di una funzione di *una sola* variabile, definita in un certo segmento finito.

Per tutti i punti di tal segmento la funzione avrà un valore, e tutti questi valori rappresentati a loro volta su di una retta, formeranno in generale un gruppo infinito di punti sulla retta (v. § 1).

Considerando questo gruppo racchiuso in un intervallo finito, esisterà (v. § 1) un *limite superiore* e un *limite inferiore* dei valori della funzione.

Se in particolare esisterà un *massimo* e un *minimo* dei valori della funzione, ciò vuol dire che esisterà un valore della variabile indipendente pel quale la funzione prenda il valore massimo o minimo. Se invece quel gruppo di punti non ammette un massimo, ma ammette solo un limite superiore, non si può più dire lo stesso. Si può però allora dimostrare il seguente teorema, detto di WEIERSTRASS:

*Sia $S$ il limite superiore dei valori di una funzione in un segmento dato; esiste sempre in questo un punto $x'$ tale che, per un segmento piccolo a piacere attorno ad esso, il limite superiore dei valori della funzione sia ancora $S$.*

Dividiamo infatti il segmento primitivo in due parti, e consideriamo i valori della funzione per i punti di tali segmenti separatamente; se $S_1, S_2$ sono i limiti superiori dei valori della funzione nei due segmenti parziali, si può subito vedere che uno almeno di questi due deve essere eguale ad $S$; giacchè se $S$ fosse minore di ambedue $S_1, S_2$, esso non sarebbe più limite superiore dei valori della funzione in tutto l'intervallo, e d'altra parte se $S$ fosse maggiore di ambedue $S_1, S_2$, allora vi sarebbero valori della funzione maggiori sia di $S_1$ che di $S_2$ il che è impossibile.

Sia allora $S = S_1$, e dividiamo l'intervallo in cui il limite superiore è $S_1$ in due parti, in una *almeno* delle quali, per gli stessi ragionamenti, il *limite superiore* dei valori della funzione deve essere ancora $S$; così continuando si vede che *si può trovare un intervallo piccolo per quanto ci piace e in cui il limite superiore dei valori della funzione sia ancora S.*

Supponiamo ora che questa divisione e suddivisione dell' intervallo si sia fatta con una legge determinata, p. es. dividendo sempre per metà, e consideriamo gli *estremi* di tutti quei segmenti, sempre più piccoli, nei quali il limite superiore dei valori della funzione è sempre $S$. Essi formeranno un gruppo infinito di punti, che, per il teorema del § 1, ammetterà sempre un punto limite $x'$. In un segmento piccolo a piacere intorno ad $x'$, o, come si dice, in un *intorno* piccolo a piacere di $x'$, saranno compresi per necessità segmenti in cui il limite superiore è $S$, e quindi in esso il limite superiore sarà $S$, con che è dimostrato il teorema. È ovvio poi che un teorema analogo vale per il limite *inferiore.*

§ 5. **Limiti delle funzioni.** — Immaginiamo una funzione $y$; per fissare le idee la supporremo di una sola variabile $x$. Supponiamo che questa si avvicini ad un valore limite $a$ (v. § 1), e immaginiamo che fissato un numero $\sigma$ piccolo a piacere si possa sempre trovare solo a destra, o solo a sinistra, o da ambo le parti del punto $a$, un segmento tale che il valore di $y$ per un *qualunque* punto compreso in esso, sia tale che la differenza $(A - y)$ sia in valore assoluto minore di $\sigma$, $A$ essendo un certo numero fisso; *noi diremo allora che A è il limite dei valori di y per* $x = a$, *e scriveremo in simbolo*:

$$\lim_{x=a} f(x) = \text{A}.$$

Distingueremo *limite a destra*, o *limite a sinistra*, o *limite da ambo le parti*, secondochè il segmento di cui si parla nella definizione si può trovare sempre solo a destra, o solo a sinistra, o da ambo le parti del punto $a$, e potrà accadere che esistano i due limiti a destra e a sinistra, ma che il limite a destra sia diverso dal limite a sinistra.

La data definizione di limite di una funzione vale evidentemente pel caso in cui ambedue i valori $a$ ed $A$ sieno finiti. Se uno di essi o ambedue fossero infiniti, allora non varrebbe più la data definizione e bisognerà modificarla.

Supponiamo prima che $A$ sia l'infinito; si dirà che $y$ ha per limite $\pm\infty$ per $x=a$, se, dato $\omega$ grande a piacere, si può trovare un intorno del punto $a$ tale che per tutti i punti di quell'intorno la $y$ sia sempre in valore assoluto maggiore di $\omega$ e abbia sempre il segno positivo o il segno negativo rispettivamente.

Supponiamo che sia $a=\infty$, cioè che si consideri il limite di $y$ quando il valore della variabile si accresce indefinitivamente. Diremo che $y$ ha per limite $A$ per $x=\infty$ quando dato $\sigma$ piccolo a piacere si possa sempre trovare un valore $x'$ di $x$, in modo che per ogni valore di $x$ maggiore di $x'$, la $y$ abbia un tale valore che la differenza $A-y$ sia in valore assoluto minore di $\sigma$.

Finalmente, diremo che $y$ ha per limite l'$\infty$ p $x=\infty$ quando, dato $\omega$ grande a piacere, si pos trovare un valore $x'$ in modo che per tutte le maggiori di $x'$, la $y$ sia sempre maggiore di $\omega$

*Queste considerazioni* sui limiti, sviluppate *caso in cui la $y$* sia funzione di una sola vari

$x$, possono valere anche, con leggiere modificazioni, pel caso in cui si tratti di funzioni di più variabili.

Così p. e., si dirà che $y$, funzione delle due variabili $x_1$, $x_2$ ha per limite $A$ per $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ quando, dato $\sigma$ piccolo a piacere, si può trovare un intorno del punto del piano di coordinate $a_1\, a_2$, in modo che per *tutti i punti di tale intorno* la $y$ differisca in valore assoluto da $A$ per una quantità minore di $\sigma$. Similmente nessuna difficoltà si troverebbe ad estendere le altre definizioni.

Se tutti i valori della funzione si rappresentano su di una retta, i limiti delle funzioni corrisponderanno su questa retta a *punti-limiti* (v. § 1) del gruppo infinito di punti.

---

È utile ora aggiungere qui alcune osservazioni.

Nel caso delle funzioni di una sola variabile noi abbiamo già osservato che si possono distinguere due limiti diversi per la funzione $y$ nel punto $x = a$; cioè si può considerare il limite a destra di $a$, il quale si ha quando l'intervallo attorno al punto $a$ di cui si parla nella definizione si può rintracciare solo alla destra di $a$, e non alla sua sinistra, e si può considerare solo il limite a sinistra; e se poi esistono ambedue questi limiti, e *sono dippiù fra loro eguali,* allora invece di parlare solo di limite a destra o di limite a sinistra, si può naturalmente senz'altro parlare di *limite nel punto.*

Ora nel caso delle funzioni di più variabili, p. es. di due, si presentano in maggiore abbondanza le *analoghe* distinzioni.

Per vedere ciò torniamo per un momento alla data definizione.

Dato $\sigma$ si deve poter trovare un intorno del punto $(a_1\, a_2)$, tale che per tutti i punti di tale intorno la differenza fra $A$ e $y$ sia minore di $\sigma$. Ora questo intorno del punto $(a_1\, a_2)$ può essere di varie specie; può accadere che sia uno o più segmenti di rette uscenti dal punto $(a_1\, a_2)$, e allora ciò vuol dire che la $y$ ha per limite $A$, solo quando le variabili $x_1\, x_2$ si fanno avvicinare alle $a_1\, a_2$ in certi speciali modi e non in certi altri; oppure può accadere che l'intorno di cui si parla sia un'area piana avente però il punto $a_1\, a_2$ non come punto interno, ma come punto del contorno, e ciò vuol dire allora che $y$ ha per limite $A$ quando col punto $(x_1\, x_2)$ ci avviciniamo al punto $(a_1\, a_2)$ in certe direzioni in numero anche infinito, ma non in *tutte* le direzioni; e può accadere che l'intorno comprenda sempre nel suo *interno* il punto $(a_1\, a_2)$ e allora il limite $A$ sussiste *qualunque* sia la maniera colla quale facciamo avvicinare il punto $(x_1\, x_2)$ al punto $(a_1\, a_2)$. Si vede quindi che in questo caso, anzichè considerare due soli limiti come nel caso delle funzioni di una variabile, si possono considerare infiniti limiti diversi secondo le infinite maniere colle quali ci possiamo avvicinare al punto $(a_1\, a_2)$.

Ed è da notarsi che le *maniere* colle quali possiamo avvicinarci al punto, possono essere di natura anche diversa che quella di seguire una curva che vada a terminare nel punto; si può p. es. anche immaginare una curva la quale giri a spirale attorno al punto, avvicinandosi indefinitivamente ad esso, senza mai raggiungerlo, e si possono immaginare anche altre diverse maniere.

La seguente altra osservazione è anche degna di nota:

Per semplicità limitiamoci al caso delle funzioni di una sola variabile. La variabile indipendente $x$ può avvicinarsi al valore $a$ in varii modi; si può intendere che si avvicini ad $a$ in modo *continuo*, cioè che il punto $x$ si avvicini al punto $a$ percorrendo tutto l'intero tratto rettilineo, cioè passando per tutti gli infiniti punti dell'intero segmento; oppure si può intendere che $x$ si avvicini ad $a$ *non* passando per tutti i punti del segmento, ma passando per un assieme di infiniti punti il cui punto-limite sia $a$ (v. § 1); o, come si dice, avvicinandosi ad $a$ *saltuariamente*. Se si tiene conto di questa circostanza allora si può considerare un'altra specie di limite, ovvero si introduce una nuova distinzione nel concetto di limite, il quale dipenderà allora ancora dalla maniera colla quale la variabile indipendente $x$ si avvicina ad $a$ e non solo dalla direzione. Ed è possibile che il limite concepito in questo senso esista, quando il limite concepito nell'altro senso non esiste. Nelle definizioni date avanti noi avevamo implicitamente ammesso che la $x$ si avvicinava ad $a$ percorrendo tutti i punti della retta e *non saltuariamente*, cioè come si dice, che la variabile $x$ sia continua; inquantochè noi abbiamo esplicitamente detto che la disuguaglianza $| A - f(x) | < \sigma$ deve valere per *tutti* i punti $x$ dell'intorno del punto-limite $a$.

Almenochè non avvertiremo del contrario, in seguito noi daremo al concetto di *limite* sempre il significato dato ad esso in principio.

Prima di terminare questo paragrafo dimostriamo alcuni teoremi sui limiti che ci occorreranno spesso in seguito.

*Si abbiano tre funzioni di $x$, e sieno $y$, $y'$, $y''$; e immaginiamo che mentre $x$ si avvicina al punto $a$, il valore di $y$ stia sempre compreso fra i valori di $y'$ e $y''$ cioè p. es., sia sempre maggiore di $y'$ e minore di $y''$ e inoltre che $y'$, $y''$ per $x = a$ tendano al medesimo limite $A$; si può mostrare che anche $y$ tende ad un limite per $x = a$, e che tale limite è la stessa quantità $A$.*

Infatti per le ipotesi fatte sui valori di $y$ rispetto ai valori di $y'$ e $y''$, possiamo dire che $A - y$ sarà sempre compreso fra $A - y'$ e $A - y''$, cioè sarà sempre maggiore di una di quelle differenze e minore dell'altra. Allora fra le due differenze $A - y'$ e $A - y''$ ve ne sarà sempre una che in *valore assoluto* sarà maggiore del valore assoluto di $A - y$; onde potendo sempre trovarsi un intorno del punto $a$ in modo che ambedue quelle differenze sieno in valore assoluto minori di $\sigma$ (quantità piccola a piacere), certamente nel medesimo intorno sarà anche il valore assoluto di $A - y$ minore di $\sigma$, e quindi $y$ tenderà ad un limite e tal limite sarà $A$.

Un altro teorema sui limiti è il seguente: *se una funzione $y$, avvicinandosi la variabile $x$ ad un valore limite, cresce continuamente, o almeno non decresce, mantenendosi però sempre inferiore ad un valore finito $A$, essa tende ad un limite che o è $A$ stesso o è un numero inferiore ad $A$.*

Facciamo avvicinare $x$ al suo valore limite $a$, e immaginamo di disegnare su di una retta i punti che corrispondono ai valori di $y$; si ha un gruppo di infiniti punti, racchiusi in un segmento che non può estendersi all'infinito perchè abbiamo supposto che tutti i valori di $y$ sono sempre minori di un numero determinato $A$, e quindi tutti i punti $y$ debbono stare tutti a sinistra del punto che rappresenta il valore $A$. Questo gruppo *deve ammettere* o un massimo o un limite superiore (v. § 1) che sarà rappresentato da un punto non a destra del punto $A$, cioè o da un punto a sinistra di $A$ o da $A$ stesso. Se il gruppo ammette un *massimo,* cioè se vi è *un punto del gruppo,* tale che alla sua destra non esistano altri punti del gruppo, tal punto non potrà che corrispondere ad un valore $x'$ di $x$ minore di $a$, perchè noi abbiamo disegnato tutti i punti $y$ per $x$ compreso in un intervallo a sinistra di $a$, ma non il punto $y$ per $x=a$. Allora, per le ipotesi fatte, per un $x > x'$, la $y$ non potendo essere minore della $y$ in $x'$, si ha che sarà eguale al valore del massimo trovato, e quindi la $y$ per tutto il tratto da $x'$ sino ad $a$ è sempre eguale a quel massimo, cioè il limite di $y$ per $x=a$ è proprio quel massimo.

Se poi il gruppo non ammette un massimo, ma solo un limite superiore $L$, allora al gruppo appartengono punti $y$ vicini quanto si vuole e a sinistra di questo limite superiore $L$.

Si può vedere che, fissato $\sigma$, la differenza $|L-y|$ si può rendere minore di $\sigma$; giacchè se consideriamo un segmento a sinistra di $L$ e minore di $\sigma$, in esso devono trovarsi necessariamente punti $y$, perchè $L$ è limite superiore. Ad uno di questi corrisponderà un punto $x$ tale che ad un altro *qualunque punto* $x$ fra esso e $a$, corrisponde, per le fatte ipotesi, un punto $y$ compreso nel segmento considerato e quindi tale che $| L - y |$ sia minore di $\sigma$. Ciò mostra che $L$ è il limite di $y$ per $x = a$.

Analogamente potrebbe dimostrarsi che: *se una funzione decresce continuamente o almeno non cresce, mantenendosi sempre superiore ad un numero B, essa tende ad un limite che o è B o è superiore a B.*

§ 6. **Condizione per l'esistenza di un limite.** — La prima quistione che si presenta nella teoria dei limiti è naturalmente questa: *data una funzione, a quali condizioni deve essa soddisfare perchè ammetta un limite determinato, quando la variabile o le variabili si avvicinano a valori già fissati?* Se si volesse che il limite fosse una quantità fissata $A$, allora la definizione stessa di limite risponderebbe a questa domanda, e con quella definizione potrebbe decidersi se $A$ è o non è il limite della funzione. Ma se $A$ non è conosciuto nè dato e vuol soltanto sapersi se la funzione ha o non ha un limite qualsiasi, quale criterio dovremo allora adoperare?

Se il limite esiste e lo chiamiamo $A$, per la definizione stessa di limite si ricava che dato un numero $\sigma$ piccolo a piacere si può trovare un intorno del punto $a$ tale che per *ogni* punto compreso in tale intorno si abbia sempre in valore assoluto:

$$| y - A | < \sigma.$$

Prendiamo dunque due punti di tale intorno e chiamiamo $y_1, y_2$ i valori che $y$ ha in tali punti;

sussisteranno allora contemporaneamente le due disuguaglianze

$$|y_1 - A| < \sigma \quad , \quad |y_2 - A| < \sigma.$$

Ora se le due quantità dei primi membri sono minori di $\sigma$, sia la loro somma che la loro differenza saranno minori di $2\sigma$, e quindi possiamo in ogni caso dire che la differenza dei due valori $y_1, y_2$ sarà in valore assoluto minore di $2\sigma$, cioè:

$$|y_1 - y_2| < 2\sigma.$$

Interpretando questo risultato possiamo dire che: *data una quantità piccola a piacere che possiamo chiamare $2\sigma$, si troverà sempre un intorno del punto a tale che la differenza dei valori della funzione in due punti qualunque di tale intorno, è in valore assoluto minore della quantità assegnata $2\sigma$.*

Questa è dunque la condizione che ci si presenta come *necessaria* per l'esistenza di un limite *finito.* Possiamo dimostrare che essa è anche una condizione *sufficiente.*

Diamo infatti a $2\sigma$ dei valori decrescenti, cioè

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_4 > \dots$$

e ogni volta troviamo l'ampiezza dell'intorno per due punti del quale si verificano sempre le condizioni espresse dell'enunciato del teorema. Sieno $x_1, x_2, x_3, \dots$ punti compresi rispettivamente in tali intorni; possiamo dire che per ogni altro punto compreso nel primo intorno si ha

$$|f(x) - f(x_1)| < \sigma_1$$

cioè che $f(x)$ sarà *compreso* fra i due valori

$$f(x_1) - \sigma_1 = a_1 \quad , \quad f(x_1) + \sigma_1 = b_1$$

di cui il primo è certamente minore del secondo (non in valore assoluto) qualunque sia il segno di $f(x_1)$, e la cui differenza è $2\sigma_1$. Nella stessa maniera possiamo dire che per un punto $x$ del secondo intorno, la $f(x)$ sarà sempre compresa fra i due valori

$$f(x_2) - \sigma_2 \quad , \quad f(x_2) + \sigma_2.$$

Chiamiamo $a_2$ il maggiore fra i due numeri

$$f(x_1) - \sigma_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) - \sigma_2$$

e $b_2$ il minore fra i due numeri

$$f(x_1) + \sigma_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) + \sigma_2;$$

possiamo allora dire che esisterà anche un intorno, e che sarà formato della parte comune al primo intorno, e al secondo, per un punto di cui la $f(x)$ è maggiore di $a_2$ ed è minore di $b_2$; da ciò si ricava anche che $b_2$ deve essere maggiore di $a_2$, mentre poi:

$$b_2 - a_2 \leqq 2\sigma_2.$$

Possiamo così costruire una serie di numeri

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots .$$

e un'altra serie

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots .$$

soddisfacenti alle disuguaglianze indicate, e tali *che esista sempre* un intorno del punto limite, per ogni punto del quale la $f(x)$ è *compresa* fra $a_n$ e $b_n$, di cui il primo è minore del secondo, e di cui la differenza è minore o eguale a $2\sigma_n$.

È facile inoltre mostrare che ogni numero $a$ è inferiore ad un qualunque numero $b$, p. es. $a_k < b_h$.

Giacchè si ha, se $h > k$,

$$a_k \leqq a_h < b_h$$

e se $h < k$,

$$b_h \geqq b_k > a_k.$$

La successione dei numeri $a$ è dunque formata di numeri di cui l'uno non è mai minore del precedente, e che d'altra parte non crescono all'infinito perchè si mantengono sempre minori dei numeri $b$, i quali alla loro volta sono decrescenti, o, nella peggiore ipotesi, stazionarii, e non però decrescono indefinitamente mantenendosi sempre maggiori dei numeri $a$. Per un teorema del paragrafo precedente i numeri $a$ e i numeri $b$ tenderanno dunque a due limiti determinati. Ora io dico che tali due limiti sono tra loro eguali. Se infatti $\alpha$ è il limite dei numeri $a$, esso dovrà essere maggiore di tutti gli $a$ e dovrà inoltre essere inferiore a qualunque $b$ giacchè i $b$ sono maggiori di tutti i numeri $a$ (v. teor. paragrafo precedente); e così $\beta$ (limite dei numeri $b$) dovrà essere inferiore a tutti i $b$ e superiore a tutti gli $a$; quindi per un qualunque indice $n$ deve aversi

$$a_n < \alpha < b_n$$
$$a_n < \beta < b_n$$

e quindi

$$\beta - \alpha < b_n - a_n < 2\sigma_n$$

cioè, essendo $2\sigma_n$ piccola a piacere, la differenza dei due limiti si può rendere minore di qualunque quantità assegnabile, perciò essa è zero, e i due limiti sono eguali.

Una dimostrazione perfettamente analoga si farebbe per mostrare che *condizione necessaria e sufficiente perchè una $y$ ammetta un limite A per $x=\infty$, è che dato $\sigma$ piccolo a piacere si possa trovare un punto $x'$ tale che per due $x$ maggiori di $x'$, la differenza delle $y$ corrispondenti sia minore di $\sigma$.*

Con considerazioni assai simili a quelle di questo § potrebbe completarsi la dimostrazione cui abbiamo accennato nel § 1 sull'esistenza dei punti-limiti di un gruppo infinito di punti.

In effetti i numeri $a_n$, $b_n$ che abbiamo costruiti nel § 1, godono delle medesime proprietà di quelli costruiti di sopra, e quindi coi medesimi ragionamenti possiamo dedurre che essi tendono ad un *medesimo* limite $\alpha$.

Si assuma un intorno di $\alpha$ piccolo per quanto si vuole; in esso saranno compresi due punti $a_n$, $b_n$ di *eguale* indice e quindi il segmento $(a_n\, b_n)$, e quindi infiniti punti del gruppo dato.

**§ 7. Continuità delle funzioni di una o più variabili. Serie convergenti in egual grado. Serie di potenze.** — Noi abbiamo considerato nei paragrafi precedenti, il limite dei valori che una funzion può avere quando colle variabili indipendenti avviciniamo in un qualunque *modo* a valori fissati, cioè il limite di $y$ per

$$x_1=a_1\quad,\quad x_2=a_2\dots$$

Prendiamo ora in considerazione il valore che la funzione stessa ha nel punto $x_1 = a_1, x_2 = a_2 \ldots.$ Tale valore può essere quello stesso che si è chiamato *limite* della funzione, oppure può essere un valore diverso.

Nel primo caso la funzione si dirà *continua* in quel tale punto che si considera; nel secondo caso si dirà *discontinua*.

Occorre appena osservare che definendo la continuita in tal maniera, cioè basandosi sulla considerazione dei limiti, tutte le varie distinzioni che si aveano per questi, si potranno ripetere anche per la continuità delle funzioni; così trattandosi di funzioni di una sola variabile, esse potranno essere *continue a destra* o *continue a sinistra* di un punto, o *continue da ambo le parti;* trattandosi di funzioni di più variabili, esse potranno essere continue avvicinandosi in una certa maniera al punto rappresentativo del sistema di variabili indipendenti, e non essere continue avvicinandosi in altre maniere.

In seguito dicendo che una funzione è *continua* in un punto, senz'altra aggiunta, si intenderà sempre che la continuità sussiste qualunque sia la maniera colla quale si giunge alle variabili limiti.

Per *funzione continua in tutto un intervallo*, o più generalmente *in tutto un campo*, si intenderà poi una funzione continua in tutti i punti del campo.

Ritornando sulla definizione di funzione continua, noi possiamo dire che: *funzione continua è quella in cui il limite della funzione è uguale alla* *funzione del limite delle variabili,* cioè

$$\lim_{x=a} f(x) = f(\lim_{x=a} x) = f(a).$$

Per una *funzione continua* abbiamo dunque che *i due segni di funzione e di limite sono fra loro invertibili.*

Le prime funzioni continue che ci si presentano sono quelle in cui le variabili sono assoggettate alle sei operazioni fondamentali dell'aritmetica.

La somma di due variabili è evidentemente tale che, col variare di una delle due variabili o di ambedue, essa si può far variare di tanto poco quanto ci piace, e lo stesso si verifica ancora per la differenza, il prodotto, il quoziente di due variabili (di cui il denominatore non sia zero), la potenza *positiva* (intera o frazionaria) di una variabile.

Così per esempio il quoziente $\frac{x_1}{x_2}$ di due variabili, alterando queste variabili di due quantità $\delta_1\ \delta_2$, diventa

$$\frac{x_1 + \delta_1}{x_2 + \delta_2}$$

da cui sottratto il valore primitivo si ha

$$\frac{x_1 + \delta_1}{x_2 + \delta_2} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2\,\delta_1 - x_1\,\delta_2}{x_2\,(x_2 + \delta_2)}$$

e, se $x_2$ *è diverso da zero,* potranno sempre sce gliersi $\delta_1, \delta_2$ in modo che tale espressione sia minoı di una quantità fissata $\sigma$, perchè $\delta_1, \delta_2$ compariscon come fattori nel numeratore di questa frazione.

Come conseguenza immediata di questo noi *caviamo che quelle* sei operazioni, rappres funzioni continue delle quantità su cui sono applicate, i segni che le rappresentano sono *invertibili* col segno di limite, cioè che *il limite della somma o del prodotto, o del quoziente di due quantità (di cui quella che fa da denominatore non abbia per limite zero) è eguale alla somma, al prodotto, o al quoziente dei limiti delle quantità stesse;* e che *il limite di una potenza positiva di una funzione è eguale alla potenza del limite della funzione.*

Questi teoremi non sono così che casi particolari del principio che il limite di una funzione *continua* di una o più quantità è eguale alla funzione del limite delle quantità stesse.

Altri esempi di funzioni continue ci sono dati dalla funzione esponenziale $e^x$, oppure $a^x$, e dalle funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, etc., e le funzioni inverse di queste, cioè la funzione *logoritmica*, e le funzioni *arco seno, arco coseno, arco tangente*, ecc.

Tutte queste funzioni sono continue non solo in un punto $x$, ma per qualunque valore della variabile indipendente reale pel quale esse sono state definite. La proprietà della loro continuità è assai evidente e risulta dalla stessa loro definizione.

Raccogliendo tutte queste considerazioni si ha dunque: *le funzioni che occorrono nelle matematiche elementari e che non sono che combinazioni in numero finito di quelle citate, sono funzioni continue.*

Prima di chiudere questo paragrafo e passare alle proprietà più fondamentali delle funzioni continue, ci si presenta questa quistione: *Abbiamo visto che una somma di un numero finito di ter-*

mini è una funzione continua dei suoi termini, e quindi che il limite di una tal somma è eguale alla somma dei limiti dei termini.

Ma si può dire lo stesso se si tratti di un numero *infinito* di termini? se si tratti cioè di *una serie*?

Immaginiamo di avere una serie i cui termini dipendano da una variabile $x$ e sieno $u_1(x)$, $u_2(x)$,.... e la serie:

$$\Sigma u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots. + u_n(x) + \ldots.$$

sia convergente per un certo campo dei valori di $x$, cioè definisca in tale campo una funzione di $x$ che chiameremo $f(x)$.

La domanda che ci facciamo è questa: facendo accostare $x$ ad un valore $a$ possiamo dire che

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim u_1(x) + \lim u_2(x) + \ldots. ?$$

cioè che il *segno di serie* è invertibile col *segno di limite?* O in altri termini: il simbolo di *serie* è il simbolo di una funzione *continua* o no?

Per passare a questa ricerca dobbiamo ricordare un concetto riguardante lo cosiddetta *equiconvergenza* o *convergenza in ugual grado* di una serie i cui termini sono funzioni di una o più variabili.

Se la serie $\Sigma u_n(x)$ è convergente per i valori di $x$ compresi in un certo campo, ciò significa che dato $\sigma$ piccolo a piacere si può sempre trovare un indice $n$ in modo che chiamando $R_n(x)$ la somma di un numero qualunque di termini dopo l'$(n-1)^{mo}$ si abbia $|R_n(x)| < \sigma$.

Se è dato il numero $\sigma$ e il punto $x$, si potrà trovare l'indice $n$, e per ogni punto $x$ vi sarà naturalmente un diverso indice $n$. Trovato un indice $n$, evidentemente ogni altro indice superiore a $n$ soddisferà alla stessa condizione.

Se si considerano tutti i punti $x$ del campo dato, si hanno infiniti indici $n$; ora si domanda: potrà trovarsi un indice $n$ che valga nella stessa maniera per *tutti* i punti $x$? Se tale indice $n$ può effettivamente trovarsi, la serie si dirà *convergente in egual grado*, ovvero *equiconvergente.*

Si può far vedere facilmente che *una condizione sufficiente* (non però *necessaria*) *per la convergenza in egual grado di una serie, è che la serie dei massimi valori assoluti che i diversi termini acquistano nel campo in cui si vogliono far variare le variabili sia una serie convergente.*

Infatti se $U_n$ è il massimo valore assoluto di $u_n(x)$ in tutto l'intervallo, sarà per qualunque $x$,

$$| u_n(x) | < U_n ;$$

ora, essendo convergente la serie delle $U$, si avrà che, dato $\sigma$, potrà trovarsi $n$ in modo che sia:

$$U_n + U_{n+1} + \ldots . < \sigma ;$$

quindi sarà per qualunque $x$:

$$| u_n(x) | + | u_{n+1}(x) | + \ldots . < \sigma$$

e perciò anche per qualunque $x$:

$$| R_n(x) | = | u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots . | < \sigma,$$

*il che dimostra* che la serie data è equiconvergente.

Fissato ciò passiamo a far vedere che ***se una serie è equiconvergente in un campo comunque piccolo attorno un punto $a$, e se i limiti per $x=a$ dei varii termini della serie sono determinati e finiti, il limite della serie esiste ed è uguale alla serie dei limiti.***

Osserviamo peraltro che la condizione posta della equiconvergenza della serie, se è *una condizione sufficiente* per fare che il segno di serie sia permutabile col segno di limite, non è però *una condizione necessaria.*

Per dimostrare questo teorema facciamo vedere prima di tutto, che la serie

$$\sum_1^\infty u_n(x)$$

ha un limite per $x=a$.

Infatti, per la posta condizione della sua equiconvergenza, si potrà sempre trovare un indice $m$ in modo che per qualunque $x$ appartenente al campo sia sempre

$$\left|\sum_{m+1}^\infty u_n(x)\right| = \left|R_m(x)\right| < \sigma,$$

o anche $R_m(x)=\theta\sigma$, essendo $\theta$ un numero compreso fra $-1$ e $+1$.

Ora

$$\sum_1^\infty u_n(x) = \sum_1^m u_n(x) + \sum_{m+1}^\infty u_n(x),$$

quindi può dirsi che per qualunque $x$ del cam sarà sempre

$$\sum_1^\infty u_n(x) = \sum_1^m u_n(x) + \theta\sigma.$$

Avendo inoltre supposto che i limiti dei varii termini della serie esistono e sono finiti, ne viene che esisterà e sarà finito il limite di

$$\sum_{1}^{m} u_n(x),$$

che è la somma di un numero *finito* di termini della serie. Di qui risulta (per la condizione necessaria per l'esistenza del limite; v. Cap. I, § 6) che si potrà sempre trovare un intorno del punto $a$ tale che la differenza dei valori di

$$\sum_{1}^{m} u_n(x)$$

in due punti di tale intorno, p. es. $x_1$ e $x_2$, sia minore di $\sigma$:

$$\left|\sum_{1}^{m} u_n(x_1) - \sum_{1}^{m} u_n(x_2)\right| < \sigma.$$

Intanto dalla uguaglianza di sopra possiamo risiamo ricavare l'altra:

$$\sum_{1}^{\infty} u_n(x_1) - \sum_{1}^{\infty} u_n(x_2) = \sum_{1}^{m} u_n(x_1) - \sum_{1}^{m} u_n(x_2) + \\ + \theta\sigma - \theta'\sigma,$$

donde si ha la disuguaglianza:

$$\left|\sum_{1}^{\infty} u_n(x_1) - \sum_{1}^{\infty} u_n(x_2)\right| < \left|\sum_{1}^{m} u_n(x_1) - \sum_{1}^{m} u_n(x_2)\right| + 2\sigma.$$

E per effetto dell'altra disuguaglianza soprascritta, possiamo perciò anche scrivere

$$\left|\sum_{1}^{\infty} u_n(x_1) - \sum_{1}^{\infty} u_n(x_2)\right| < 3\sigma.$$

Onde può trovarsi sempre un intorno tale che la differenza dei valori della serie

$$\sum_1^\infty u_n(x),$$

in due dei punti dell'intorno, sia minore di una quantità piccola a piacere e ciò basta per conchiudere che la serie ammette un limite.

Chiamiamo $A$ tale limite; resta a dimostrare che

$$A = \sum_1^\infty \lim_{x=a} u_n(x).$$

Sottragghiamo infatti da ambo i membri della uguaglianza

$$\sum_1^\infty u_n(x) = \sum_1^m u_n(x) + \theta\sigma$$

la espressione $\sum\limits_1^m \lim u_n(x)$: si ha

$$a)\quad \sum_1^\infty u_n(x) - \sum_1^m \lim u_n(x) = \sum_1^m [u_n(x) - \lim u_n(x)] + \theta\sigma.$$

Ora essendo $A$ il limite di

$$\sum_1^\infty u_n(x)$$

si può trovare un intorno del punto $a$ tale che per ogni $x$ in esso compreso, si abbia

$$A - \sum_1^\infty u_n(x) = \theta'\sigma,$$

essendo $\theta'$ un numero, non fisso, compreso fra $-1$ e $+1$; e così anche potrà trovarsi un intorno per ogni $x$ del quale si abbia

$$\sum_1^m [u_n(x) - \lim u_n(x)] = \theta'' \sigma,$$

essendo $\theta''$ altro numero, non fisso, compreso fra $-1$ e $+1$; e ciò perchè questa somma risulta di un numero *finito* di termini; nel minore di tali due intorni si verificheranno ambedue queste uguaglianze, le quali insieme alla *a*) danno infine:

$$A - \sum_1^m \lim u_n(x) = (\theta + \theta' + \theta'') \sigma,$$

cioè:

$$\left| A - \sum_1^m \lim u_n(x) \right| < 3\sigma.$$

Data dunque la quantità $3\sigma$ piccola a piacere si può sempre trovare un indice $m$, tale che per esso e per *tutti* gli indici superiori ad esso valga la precedente disuguaglianza; ciò basta per conchiudere che la serie

$$\sum_1^\infty \lim u_n(x)$$

è convergente ed il suo valore è precisamente $A$.

È utile osservare che potrebbe accadere che

$$\sum_1^\infty \lim u_n(x)$$

non sia più una serie propriamente detta, ma la somma di un numero *finito* di termini, potendosi distruggere fra loro tutti gli altri termini; in ogni caso però il suo valore è sempre $A$.

Ricordiamo inoltre che la condizione che abbiamo posta nel teorema ora dimostrato, cioè la condizione della equiconvergenza è solo una *condizione sufficiente*, ma non è necessaria.

Dal teorema dimostrato risulta quest'altro:

*Se i termini di una serie equiconvergente sono funzioni continue della variabile o delle variabili, anche la serie è una funzione continua.*

---

Possiamo ora applicare queste considerazioni a quelle serie particolari i cui termini procedono secondo le potenze intere positive della variabile $x$, e che perciò si chiamano *serie di potenze*, e che hanno una particolare importanza nelle cose che avremo a dire in seguito.

Indicando con $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots.$ delle quantità costanti, queste serie possono rappresentarsi con

$$\sum_0^\infty a_n\, x^n\,.$$

Cominciamo col ricordare che una serie convergente si dice *assolutamente convergente* quando è convergente la serie dei valori assoluti dei singoli termini; in altro caso si dice *semplicemente convergente.*

Sulle serie di potenze dimostreremo i seguenti teoremi:

*Se una serie di potenze è convergente per un valore $a$ di $x$, sarà convergente assolutamente per ogni valore di $x$ tale che $|x| < |a|$.*

In effetti se la serie converge per $x = a$, il limite del termine generale cioè $a_n\, a^n$ converge a zero, e perciò può trovarsi un $n$ tale che per esso e per tutti i numeri ad esso superiori sia

$$|a_n\, a^n| < \sigma.$$

*Sia ora* $|x| < |a|$ e poniamo $\frac{x}{a} = t$; sarà $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, e se $M$ è un valore maggiore del massimo fra i valori assoluti dei termini $a_n a^n$, si avrà che i termini della serie

$$\Sigma \mid a_n x^n \mid$$

sono rispettivamente minori di quelli della serie

$$M \Sigma \mid t^n \mid$$

la quale è notoriamente convergente per $\mid t \mid < 1$. Quindi, per un noto teorema sulle serie, anche la prima serie è convergente, e con ciò il teorema è dimostrato.

Da esso risulta che il *campo di convergenza di una serie di potenze* (l'assieme di tutti i punti $x$ in cui essa è convergente) *è sempre costituito da un segmento avente per punto medio il punto-zero*; non si può però affermare che la serie è anche convergente per i due estremi del campo; anzi possono darsi degli esempii di serie di potenze che sono convergenti in un estremo e divergenti nell'altro, o divergenti in ambedue, o convergenti in ambedue. Nel caso poi che la serie sia convergente in un estremo, tale convergenza può essere semplice o assoluta, secondo i casi, mentre per un punto *interno* al campo la convergenza è sempre *assoluta*.

Così p. es. la serie

$$\frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots$$

è convergente *assolutamente* per $x = 1$, mentre la serie

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

lo è, per tal valore di $x$, solo *semplicemente*, cioè l'altra serie

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

è divergente per $x = +1$, che è uno degli estremi del suo campo di convergenza.

*Se ammettiamo che la serie sia tale che esista il limite*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

*il suo campo di convergenza è dato da tutti i punti $x$ per cui sia*

$$|x| < \lim_{n=\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Infatti il rapporto di un termine al precedente nella serie data è

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} x,$$

il cui limite per $n = \infty$ esiste, in conseguenza della ipotesi fatta. Ora dalla teoria generale delle serie è noto che secondochè il valore assoluto di tal limite è maggiore o minore di 1, la serie è divergente o convergente, e che quando tal limite è 1, nulla può asserirsi sulla natura della serie. Applicando questo principio, si vede perciò che se noi poniamo

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right| < 1,$$

cioè

$$|x| < \lim_{n=\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

abbiamo precisamente tutti i punti $x$ pei quali la serie è convergente.

*Una serie di potenze è equiconvergente in tutto un qualunque intervallo compreso nel campo di convergenza, tale cioè che gli estremi dell'intervallo sieno interni al campo medesimo.*

Giacchè evidentemente il massimo valore assoluto di un termine qualunque della serie nell'assegnato intervallo, si ha per quel punto di questo cui corrisponde il massimo valore assoluto di $x$; perciò la serie dei massimi è la serie dei valori assoluti dei termini della serie data per un certo punto $x$ *interno* al campo di convergenza, e poichè per un punto di tal fatta la serie di potenze è sempre *assolutamente convergente*, ne risulta che la serie dei massimi è convergente. Per un teorema dimostrato di sopra (vedi pag. 31) ne risulta allora la equiconvergenza della serie data.

Applicando alle serie di potenze il teorema dimostrato in generale per il limite di una serie qualunque (vedi pag. 36) possiamo infine dedurre il teorema:

*Se $a$ è un punto interno al campo di convergenza di una serie di potenze, in tal punto la serie rappresenta una funzione continua.*

Questo teorema vale anche quando $a$ è un estremo del campo di convergenza, ammesso che in esso la serie sia convergente; ciò costituisce un teorema conosciuto sotto il nome di Abel, ma per la dimostrazione rimanderò alla mia Opera, altre volte citata: *Note critiche di Calcolo infinitesimale,* Milano 1895, pag. 62 e seg.

**§ 8. Teoremi sulle funzioni continue di una sola va-**

riabile. **Funzioni uniformemente continue.** — Nello stesso modo con cui considerando le serie i cui termini sono funzioni di variabili, e quindi definite in tutti i punti di un certo campo, si presenta la necessità di introdurre il concetto di serie *equiconvergenti*, così considerando funzioni continue in tutti i punti di un campo, occorre introdurre il concetto di *continuità uniforme*. I due concetti hanno fra loro molta somiglianza.

Se la funzione è continua in un punto $a$, ciò vuol dire che dato $\sigma$ piccolo a piacere si può trovare un intorno di $a$, per ogni punto del quale la differenza fra il valore della funzione e quello della medesima nel punto $a$, è minore di $\sigma$.

Per fissare le idee supponiamo che si tratti di funzioni di una variabile sola; allora l'intorno, di cui si parla, sarà un certo segmento della retta rappresentativa, di lunghezza $\varepsilon$. Per ogni punto del campo vi sarà, dato uno stesso $\sigma$ fisso, un valore per $\varepsilon$; si domanda: può trovarsi uno stesso $\varepsilon$ che valga per *tutti* i punti del campo. Se si trattasse di un numero finito di punti allora basterebbe calcolare l'$\varepsilon$ per ciascuno, e considerare poi il minore di tutti, il quale naturalmente varrà per tutti i punti; ma trattandosi di un numero infinito di punti non si può più fare la stessa considerazione.

Una continuità cosiffatta si chiamerà *continuità uniforme*, o *equicontinuità*; e a prima vista parrebbe che essa rappresenti per la funzione una condizione più ristretta che non la semplice continuità, nello stesso modo che la convergenza in *ugual grado* per la serie è una condizione più ristretta della semplice convergenza. Però si può dimostrare che la *continuità uniforme non è altro che la stessa continuità ordinaria* (teorema di CANTOR).

Supponiamo la funzione $f(x)$ continua da $x = a$ sino a $x = b$.

Troviamo un intervallo a destra del punto $a$ tale che per un punto $x$ di esso sia

$$f(x) - f(a) \leqq \sigma$$

L'ampiezza $\varepsilon$ di tale intervallo può essere varia perchè, trovatane una, tutte le altre minori soddisfano sempre alla stessa condizione.

Fra tutte le varie $\varepsilon$ prendiamo la *massima* di tutte o il *limite superiore* di esse.

Sia $x_1$ il punto che rappresenta l'estremo di tale intervallo $\varepsilon$; è facile far vedere che in $x = x_1$ la differenza $f(x) - f(a)$ è esattamente eguale a $\sigma$ *in valore assoluto*, cioè che

$$f(x_1) - f(a) = \pm \sigma.$$

Cominciamo infatti coll' osservare che, essendo per ipotesi $f(x)$ una funzione continua, lo sarà anche la funzione $f(x) - f(a)$.

Si può far vedere che il valore di questa differenza in $x_1$ non può essere nessuna delle quattro quantità

$$+\sigma - \eta, \qquad +\sigma + \eta, \qquad -\sigma - \eta, \qquad -\sigma + \eta,$$

essendo $\eta$ una qualunque quantità diversa da zero.

Se fosse $+\sigma - \eta$, allora, per effetto della continuità della funzione, si potrebbe trovare a destra di $x_1$ un segmento tale che per ogni punto di esso *il valore assoluto* di $f(x) - f(a)$ sia differente da

$\sigma - \eta$ di una quantità $\varepsilon_1$ minore di $\varepsilon$, cioè sia minore di $\sigma$, e ciò è contro la ipotesi che il segmento che ha per estremo $x_1$ sia il limite superiore di tutti i segmenti in cui $f(x) - f(a) < \sigma$.

Se $f(x_1) - f(a)$ fosse eguale a $+\sigma + \eta$ allora, per effetto della supposta continuità, si potrebbe trovare a sinistra di $x_1$ un segmento tale che in un punto di esso il valore assoluto di $f(x) - f(a)$ sia differente da $\sigma + \eta$ di una quantità $\varepsilon_1 < \varepsilon$, e quindi sia maggiore di $\sigma$, e ciò contraddice anche all'ipotesi fatta per $x_1$, perchè per un qualunque punto alla sinistra di $x_1$ il valore di $f(x) - f(a)$ deve essere minore di $\sigma$; similmente si dimostrerebbe la cosa per gli altri due casi.

Fissato dunque che in $x_1$ si ha

$$| f(x_1) - f(a) | = \sigma,$$

procediamo nella stessa maniera da $x_1$ verso destra sino ad un punto $x_2$, in cui sia

$$| f(x_2) - f(x_1) | = \sigma,$$

e cosi di seguito.

Possiamo cosi stabilire una serie di punti

$$a, x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n, x_{n+1}, \ldots.$$

tali che sia sempre

$$| f(x_{n+1}) - f(x_n) | = \sigma.$$

Fra due di questi punti consecutivi, per esempio $x_n$ e $x_{n+1}$, intercede un segmento, per due punti qualunque del quale la differenza dei valori della funzione è *minore* di $2\sigma$, mentre per due punti appartenenti a due intervalli consecutivi la *medesima differenza* non può superare $3\sigma$.

Giacchè sieno $x'$, $x''$ due punti qualunque e diversi di un medesimo intervallo $(x_n\, x_{n+1})$; uno di essi potrebbe anche coincidere con $x_{n+1}$, ma l'altro p. es. $x''$ non vi coinciderà, e si avrà perciò:

$$| f(x') - f(x_n) | \leqq \sigma$$
$$| f(x'') - f(x_n) | < \sigma,$$

e quindi

$$| f(x') - f(x'') | < 2\sigma.$$

Sieno invece $x'$ e $x'''$ due punti appartenenti a due segmenti consecutivi $(x_n\, x_{n+1})$ e $(x_{n+1}\, x_{n+2})$: si avrà

$$| f(x''') - f(x_{n+1}) | \leqq \sigma$$
$$| f(x_{n+1}) - f(x_n) | = \sigma$$
$$| f(x') - f(x_n) | \leqq \sigma$$

e quindi

$$| f(x') - f(x''') | \leqq 3\sigma.$$

Ora *se* percorrendo tutto l'intervallo da $a$ sino a $b$ il numero di tali punti intermedi è *finito*, allora tutto l'intervallo da $a$ a $b$ resterà diviso in tanti intervalli *in numero finito*, ognuno dei quali avrà la indicata proprietà.

Prendiamo allora in considerazione il più piccolo fra tutti questi intervalli e sia $\varepsilon$ la sua ampiezza. Se attorno a ciascun punto $x$ formiamo un intervallo $\delta$ di ampiezza uguale ad una quantità minore di $\varepsilon$, è certo che non veniamo ad occupare più di due intervalli consecutivi e perciò il valore assoluto della differenza dei valori della funzione in $x$ e in un qualunque punto di $\delta$ non potrà superare in ogni caso $3\sigma$; si ha perciò esattamente la *equicontinuità della funzione.*

Resta però ancora a far vedere che i punti $x_1, x_2 \ldots$ *non possono essere in numero infinito.* Infatti se fossero in numero infinito, allora ammetterebbero, fra $a$ e $b$, un punto limite e sia $u$. Per effetto della continuità della funzione in $u$ si potrà trovare un intorno di $u$ tale che per due punti qualunque in esso sia

$$| f(x') - f(x'') | < \frac{\sigma}{2}.$$

Intanto per la natura stessa del punto limite, in tale intorno, per quanto piccolo esso sia, esisterebbero sempre infiniti punti $x_n$, $x_{n+1}$, $x_{n+2} \ldots$ e dovrebbe essere

$$| f(x_{n+1}) - f(x_n) | = \sigma$$

mentre d'altra parte, essendo $x_n$, $x_{n+1}$ due punti di quell'intorno, dovrebbe essere

$$| f(x_{n+1}) - f(x_n) | < \frac{\sigma}{2}.$$

La contraddizione fa vedere che non è ammissibile l'ipotesi che i punti $x_1, x_2, x_3 \ldots$ sieno in numero infinito. Resta con ciò completamente dimostrato il teorema di Cantor.

Come corollario di questo teorema si ricava che *data una funzione continua in un intervallo da* a $a$ b, *si può dividere tale intervallo in un numero finito di altri intervalli parziali, tali che in ognuno di essi la differenza fra due qualunque valori della funzione sia minore di una quantità piccola a piacere.*

Chiamando *oscillazione* della funzione in un *intervallo* la differenza fra il limite superiore e il limite inferiore dei valori della funzione in quell'intervallo, si può dire che *può sempre farsi la divisione in un numero finito di intervalli parziali in modo che in ognuno di questi la oscillazione della funzione sia minore di una quantità piccola a piacere.*

---

Possiamo ora passare a dimostrare alcuni teoremi fondamentali sulle funzioni continue.

*Se una funzione continua é determinata in un numero infinito di punti, essa lo è anche nei punti limiti di essi.*

Sia $x'$ uno di tali punti limiti; dovendo la funzione essere continua in $x'$ essa dovrà avere un limite determinato quando $x$ si avvicina ad $x'$, ed in $x'$ la funzione non può che avere per valore il valore di tal limite.

Ricordando che i punti *irrazionali* sono punti limiti dei punti *razionali*, ne ricaviamo allora anche che:

*Se una funzione continua è determinata in tutti i punti razionali di un segmento è determinata anche nei punti irrazionali.*

Considerando tutti i valori che una funzione ha in un intervallo, si hanno infiniti numeri che avranno un *limite superiore* e un *limite inferiore*. Per una funzione qualunque potrà accadere che *non* esista alcun valore della variabile per il quale il valore della funzione sia proprio il limite superiore; ma se questo non accade, allora il limite superiore è uno dei valori della funzione e propriamente è il valore *massimo*. Ora si può far vedere che *per le funzioni continue esiste effettivamente il val* *massimo e il valore minimo, cioè la funzione prende effettivamente in due punti il valore rappresentato dal limite superiore e quello rappresentato dal limite inferiore.*

Giacchè se $\lambda$ è il limite superiore dei valori della funzione, esiste, pel teorema di **Weierstrass**, (v. § 4) un punto $x'$ tale che in un intorno comunque piccolo del punto $x'$ il limite superiore dei valori della funzione è anche $\lambda$.

In $x'$ la funzione deve avere un limite perchè essa è continua in tutto l'intervallo. Se questo limite fosse $\lambda'$ potrà essere o $\lambda' < \lambda$, o $\lambda' > \lambda$, o $\lambda' = \lambda$.

Se fosse $\lambda' \lessgtr \lambda$, allora potendosi trovare un intorno di $x'$ tale che per *tutti* i suoi punti, la differenza $| \lambda' - f(x) |$ sia minore di un qualunque $\sigma$, scegliendo tale $\sigma$ minore di $\left|\frac{\lambda - \lambda'}{2}\right|$, evidentemente non si potrà avvicinarsi a $\lambda$ per quanto si vuole, e perciò $\lambda$ non sarebbe più il limite superiore dei valori di $f(x)$; deve dunque essere necessariamente $\lambda' = \lambda$, con che il teorema è dimostrato.

*Se una funzione continua in un intervallo ha in due punti a, b di questo, due valori, l'uno positivo e l'altro negativo, vi sarà un punto compreso fra i due a, b in cui la funzione avrà il valore zero.*

Consideriamo infatti tutti i valori positivi che la funzione ha nell' intervallo; di questi valori vi sarà il limite inferiore e sia $A$.

Dividiamo l'intervallo totale in un numero finito di intervalli parziali in ognuno dei quali l'oscillazione della funzione sia minore di A (e ciò per uno dei teoremi precedenti). Il primo di tali intervalli parziali, a cominciare da $a$, sia $(a, a+\varepsilon_1)$. Se in $a$ la funzione ha il valore positivo e quindi non minore di $A$, in $a+\varepsilon_1$ avrà anche il valore positivo, perchè in tutto l'intervallo l'oscillazione della funzione è minore di $A$, e quindi in quell'intervallo non ci potrà essere alcun valore negativo; essendo poi positivo, il valore in $a+\varepsilon_1$ sarà, a sua volta, non minore di $A$. Nella stessa maniera in tutto il secondo intervallo e anche all'estremo la funzione avrà un valore positivo e quindi non minore di $A$. Così continuando si concluderebbe che in $b$ la funzione ha un valore positivo, contro l'ipotesi.

Dunque non si può ammettere che $A$ sia diverso da zero.

Essendo poi esso il limite inferiore dei valori positivi della funzione, ed essendo questa continua, per un teorema precedente, vi sarà perciò un punto in cui la funzione acquista il valore zero, e con ciò il teorema è dimostrato.

Da esso si può ricavare subito quest'altro:

*Una funzione continua che in due punti $a$, $b$ di un intervallo acquista due valori $A$, $B$, in un punto intermedio fra i due acquisterà qualunque valore $C$ compreso fra $A$ e $B$.*

Basta applicare alla funzione $f(x) - C$ il teorema precedente.

§ 9. **Considerazioni sulle funzioni continue di più variabili.** — Molte delle considerazioni del § precedente possono estendersi alle funzioni di più variabili.

*Per semplicità* consideriamo solo le funzioni di *due* sole variabili; ma le considerazioni che faremo possono applicarsi, opportunamente modificate, anche al caso generale.

Usiamo sempre la rappresentazione delle coppie di variabili $x_1, x_2$ mediante i punti del piano aventi per coordinate $x_1, x_2$.

La funzione $y$ delle due variabili $x_1, x_2$ si dirà *continua* nel punto $(a_1\, a_2)$ quando data una quantità qualunque $\sigma$, si potrà trovare un'area piana nel cui interno c'è il punto $(a_1\, a_2)$ e tale che per *ogni punto* di tale area il valore di $f(x_1\, x_2)$ differisca dal valore di $f(a_1\, a_2)$ di una quantità minore di $\sigma$.

Possiamo porre questa definizione sotto un'altra forma. Se infatti esiste l'area piana di cui si parla nella precedente definizione, è chiaro che si potrà sempre disegnare un rettangolo, coi lati paralleli agli assi coordinati, col centro in $(a_1\, a_2)$ e compreso tutto intero nell'area di cui si parla.

Siano $h_1, h_2$, le lunghezze dei semilati di tale rettangolo; è chiaro che le coordinate di un punto qualunque interno ad esso saranno sempre della forma

$$a_1 + \theta_1 h_1 \quad , \quad a_2 + \theta_2 h_2$$

indicando con $\theta_1, \theta_2$ due numeri arbitrari compresi fra $-1$ e $+1$.

Possiamo allora dire che la funzione è continua quando si possono trovare le quantità $h_1, h_2$ in modo che per valori *qualunque* di $\theta_1, \theta_2$, compresi fra $-1$, e $+1$ si abbia sempre

$$(1) \qquad | f(a_1 + \theta_1 h_1 \,.\, a_2 + \theta_2 h_2) - f(a_1\, a_2) | < \sigma.$$

Ricordando ora la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione ammetta un limite, (v. § 6) possiamo dire che deve anche accadere che la differenza fra i valori della funzione in due qualunque punti del rettangolo dove potersi rendere minore di qualunque quantità $\delta$; scegliendo i punti di coordinate

$$a_1 + \theta_1 h_1 \quad , \quad a_2 + \theta_2 h_2$$

e

$$a_1 + \theta_1 h_1 \quad , \quad a_2,$$

deve dunque aversi

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} | f(a_1 + \theta_1 h_1 , a_2 + \theta_2 h_2) - f(a_1 + \theta_1 h_1 , a_2) | < \delta \\ \text{e analogamente} \\ | f(a_1 + \theta_1 h_1 , a_2 + \theta_2 h_2) - f(a_1 , a_2 + \theta_2 h_2) | < \delta \end{array} \right.$$

e queste disuguaglianze debbono sussistere per qualunque coppia di valori di $\theta_1, \theta_2$ compresi fra $-1$ e $+1$.

Viceversa se, dato $\delta$ si possono sempre trovare valori di $h_1, h_2$ pei quali si verificano le (2), si potrà sempre verificare la (1), dato $\sigma$ a piacere. Infatti prendiamo prima di tutto $\delta = \frac{\sigma}{2}$ e troviamo gli $h_1, h_2$ corrispondenti. Dovendo la prima delle (2) sussistere per qualunque $\theta_1$, prendiamo $\theta_1 = 0$ e allora si ha

$$| f(a_1 , a_2 + \theta_2 h) - f(a_1 a_2) | < \delta$$

che insieme colla seconda delle (2) (sommandone cioè i primi membri se sono dello stesso segno, o sottraendoli se sono di segno contrario, e in ogni *caso sommando* i secondi membri) dà:

$$|f(a_1+\theta_1 h_1\,,\ a_2+\theta_2 h_2)-f(a_1\,a_2)|<2\delta$$
$$<\sigma.$$

Le relazioni (2) ci dicono un fatto notevole sulla natura della continuità di $f$. Esse ci dicono che $f(a_1+\theta_1 h_1, x_2)$ considerata come funzione di $x_2$, è continua nel punto $x_2=a_2$, e ciò per qualunque valore di $\theta_1$, cioè $f(x_1, x_2)$ è funzione continua di $x_2$ per tutti i valori di $x_1$, da $a_1$ sino a $a_1 \pm h_1$; e similmente $f(x_1, a_2+\theta_2 h_2)$ è funzione continua di $x_1$ per qualunque valore di $\theta_2$.

---

Considerando una funzione continua in tutto un campo, si presenta naturalmente anche qui l'idea della *continuità uniforme* di cui abbiamo discorso nel § precedente a proposito delle funzioni di una sola variabile; si può cioè domandare se, dato $\sigma$, si possono trovare dei valori $h_1, h_2$, tali che, per *tutti* i punti $x$ del campo, si verifichi una disuguaglianza analoga alla (1).

Si riconosce che anche qui *la continuità ordinaria è contemporaneamente una continuità uniforme.*

La dimostrazione di ciò si farebbe estendendo in modo facile quella data nel § precedente per le funzioni di una sola variabile.

Similmente si possono estendere alle funzioni continue di due variabili in tutto un campo molti dei teoremi del § precedente. Così per esempio:

*Se in un punto del campo la funzione continua ha un valore positivo e in un altro punto ha un valore negativo, e se possiamo congiungere* [q]*uesti due punti* con una linea compresa tutta nel *campo, esisterà su questa linea almeno un punto in cui la funzione ha il valore zero,* etc. etc.

§ 10. **Variabili aventi per limite zero o per limite l'infinito. Infinitesimi ed infiniti.** — Le variabili che hanno per limite zero si chiamano *infinitesimi* o *zeri*, e le quantità che hanno per limite l'infinito si chiamano *infiniti*.

Avendosi due quantità $\alpha, \beta$, il cui valore dipenda dai valori di una o più variabili indipendenti, e aventi per limite zero o l'infinito per un *medesimo* sistema di valori di tali variabili, se se ne fa il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$, e si cerca poi il limite di tal rapporto, può accadere o che tal limite esista oppure che non esista.

Applicando il teorema che il limite del rapporto è eguale al rapporto dei limiti, si vede che il limite del rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, se $\alpha$, $\beta$ sono infinitesimi, ovvero $\frac{\infty}{\infty}$ se $\alpha$, $\beta$ sono infiniti. Ora queste espressioni sono di quelle cosidette *indeterminate* (v. Cap. V, § 1), e nulla ci dicono sul valore di quel limite.

Se il limite del rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ esiste, esso può essere o zero, o l'infinito, o una quantità finita; esaminiamo separatamente i tre casi. Se il limite è zero, ed $\alpha$ e $\beta$ sono infinitesimi, vuol dire che fra i due zeri, del numeratore e del denominatore del rapporto $\frac{0}{0}$ (sotto cui si presenterebbe direttamente *il limite di* $\frac{\alpha}{\beta}$ applicando il teorema che il limite del rapporto è eguale al rapporto dei limiti) prevale in certo modo lo zero del numeratore, e quindi siamo condotti a dire che lo zero di $\alpha$ è di un ordine *superiore* rispetto allo zero di $\beta$; avvertiamo però che ciò non è naturalmente che una definizione.

Se invece $\alpha$, $\beta$ fossero due infiniti, allora, se il limite del rapporto è anche zero, diciamo che l'infinito del denominatore prevale sull'infinito del numeratore, e quindi che $\beta$ è un infinito di ordine *superiore* rispetto ad $\alpha$.

Se il limite del rapporto di $\alpha$, $\beta$, è infinito allora, se si tratti di infinitesimi, noi diremo reciprocamente che $\beta$ è infinitesimo di ordine ***superiore*** rispetto ad $\alpha$, e, se si tratti di infiniti, noi diremo che $\alpha$ è infinito di ordine *superiore* rispetto a $\beta$.

Se poi finalmente il limite del rapporto è una quantità finita diversa da zero, noi, continuando il medesimo ordine di idee nel quale ci siamo messi, diremo che nessuno dei due infinitesimi, o dei due infiniti *prevale* sull'altro, e cioè che essi sono dello *stesso ordine*.

Facciamo intanto un'altra considerazione dalla quale potrà risultare con maggior precisione questo concetto di *ordine di infinitesimi o di infiniti* che noi siamo stati condotti a introdurre.

Sia $\alpha$ un infinitesimo, e facciamone il quadrato $\alpha^2$; anche $\alpha^2$ sarà infinitesimo.

Quale sarà il suo ordine rispetto all'ordine di $\alpha$?

Fatto il rapporto $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ risulta che tale rapporto *tende* a zero, dunque $\alpha^2$ è un infinitesimo di ordine *maggiore di* $\alpha$. Si vede così che l'ordine di una

***potenza*** di un infinitesimo o infinito non è lo stesso dell'ordine dell'infinitesimo o dell' infinito stesso.

In generale $\alpha^n$ è di ordine maggiore di $\alpha$ se $n > 1$, è di ordine minore se $n < 1$, ed inoltre $\alpha^n$ è di ordine maggiore o minore di $\alpha^m$ secondochè

$$n > m \quad \text{o} \quad n < m.$$

Siamo dunque naturalmente condotti a caratterizzare l'ordine di $\alpha^n$ rispetto all' ordine di $\alpha$, secondo la grandezza dell'esponente $n$, cioè, in altri termini, a dire che l'ordine di $\alpha^n$ rispetto ad $\alpha$ è *misurato* dal numero $n$.

Ciò posto, possiamo passare ad un più preciso paragone degli ordini di due infinitesimi o infiniti diversi; giacchè se $\alpha$, $\beta$ sono per es., due infinitesimi, di cui l' uno è di ordine maggiore che l'altro, e se inoltre si trova che il limite del rapporto $\frac{\alpha}{\beta^n}$ è una quantità finita diversa da zero (il che se accade, può accadere, per un unico valore di $n$ e mai per due valori diversi) noi potremo dire che $\alpha$ è dello stesso ordine di $\beta^n$, e poichè inoltre $\beta^n$ è di ordine $n$ rispetto a $\beta$, così infine noi *diremo* che anche $\alpha$ è di ordine $n$ rispetto a $\beta$.

Si vede dunque che se il limite del rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ esiste, e se si può trovare un numero $n$ maggiore, uguale o minore di $1$ tale che $\frac{\alpha}{\beta^n}$ abbia un limite finito, allora i due infinitesimi o infiniti $\alpha$, $\beta$ si possono paragonare fra loro in modo preciso, e si può calcolare in un modo preciso l'ordine dell'uno rispetto all'altro.

Se non esistono invece i limiti di cui si parla, non sarà più possibile il paragone dei due infinitesimi o infiniti.

Può accadere p. es., che pur esistendo ed essendo zero il limite del rapporto dei due infinitesimi $\alpha$ e $\beta$, non si possa però mai trovare un $n$ tale che $\frac{\alpha}{\beta^n}$ abbia un limite finito, che cioè questo rapporto, per qualunque $n$, abbia sempre per limite zero; allora evidentemente il concetto di ordine che abbiamo introdotto, non potrà più esserci utile per definire con un numero l'ordine di $\alpha$ rispetto all'ordine di $\beta$.

Potrà poi anche avvenire che il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ non ammetta limite, e allora non sarà più possibile il paragone preciso degli infinitesimi o infiniti nel modo con cui lo abbiamo fatto sinora.

Si potrebbero fare alcune altre considerazioni pel caso in cui, non esistendo il limite, il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ oscilla fra due limiti determinati, ma le tralasciamo.

In relazione agli esposti concetti di *ordine* di infinitesimi e di infiniti possiamo stabilire alcuni teoremi.

*Se $\alpha$ è un infinitesimo o un infinito, esso resterà tale e del medesimo ordine anche quando si moltiplica o si divide per una quantità finita A diversa da zero.*

*Una somma algebrica di un numero finito di infinitesimi è anche un infinitesimo il cui ordine è quello dell'infinitesimo* di ordine minimo fra i dati.

Sieno infatti $\alpha_1$, $\alpha_2$ due infinitesimi, e l'ordine $n_1$ del primo sia minore dell'ordine $n_2$ del secondo. Sia $\alpha$ l'infinitesimo rispetto cui si calcolano gli ordini dei dati. Allora evidentemente $\alpha_1 \pm \alpha_2$ è anche una quantità tendente a zero, quindi un infinitesimo. Facendo il rapporto

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\alpha^{n_1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha^{n_1}} \pm \frac{\alpha_2}{\alpha^{n_1}},$$

si trova che tal rapporto tende ad una quantità finita, perchè per ipotesi il primo termine di questa espressione tende ad una quantità finita e il secondo converge a zero. Dunque $\alpha_1 \pm \alpha_2$ è un infinitesimo di ordine $n_1$.

Un teorema che ha molta affinità con questo è quest'altro:

*Se un infinitesimo $\alpha$ è la somma algebrica di un numero finito di altri infinitesimi*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

*dove $\alpha_1$ sia di ordine minimo, e tutti dipendenti dal medesimo sistema di variabili, si può sempre trovare un intorno dei valori limiti delle variabili, tale che per ogni suo punto il segno di $\alpha$ sia lo stesso del segno di $\alpha_1$.*

Infatti essendo $\alpha_2 \dots \alpha_n$ di ordine superiore ad $\alpha_1$ il rapporto

$$\frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$$

tende a zero. Si può dunque trovare un intorno dei punti limiti delle variabili, pel quale tal rapporto sia in valore assoluto minore di una quantità $\sigma$ piccola a piacere, cioè che il valore di

$\alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ sia in valore assoluto *minore* del valore assoluto di $\alpha_1$, e quindi che nella somma

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

prevalga il segno di $\alpha_1$.

Così p. es., in un'espressione della forma

$$a\, x^k + b\, x^{k+1} + \ldots + q\, x^{k+h},$$

che è zero per $x = 0$, si può trovare un tale intorno del punto zero che il segno di tutta l'espressione sia eguale al segno di $a\, x^k$.

*Il limite del rapporto di due infinitesimi non muta se ad essi aggiungiamo infinitesimi rispettivamente di ordine superiore.*

Sieno $\alpha_1$, $\alpha_2$ due infinitesimi e $\beta_1$, $\beta_2$ altri due rispettivamente di ordini superiori ai primi: il rapporto

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2}$$

può scriversi

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}}{1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

e poichè il limite del secondo fattore è *1* si vede che il teorema è dimostrato.

In quanto agli infiniti, cominciamo coll'osservare che essi possono (v. § 5) essere *positivi* o *negativi*, distinzione che non ha luogo per gli infinitesimi.

Hanno poi luogo i seguenti teoremi:

*Una somma algebrica di un numero finito di infiniti tutti di ordine diverso fra loro, è un infi-*

*nito il cui ordine è il massimo degli ordini degli infiniti dati.*

*Se un infinito $\alpha$ è la somma algebrica di un numero finito di altri infiniti, tutti di ordine diverso, si può fare che il segno di tutta la somma coincida col segno dell'infinito di ordine più alto.*

*Il limite del rapporto di due infiniti non muta aggiungendo ad essi infiniti di ordine rispettivamente inferiore o in particolare quantità finite.*

Questi teoremi possono facilmente dimostrarsi come gli altri dimostrati sopra per gli infinitesimi.

Possiamo aggiungere l'osservazione che, mentre la differenza di due infinitesimi diversi è sempre un infinitesimo, la differenza di due infiniti diversi può essere una quantità finita. Come esempio semplicissimo di questo fatto possiamo considerare i due infiniti,

$$a + x \quad , \quad b + x \quad , \quad \text{per } x = \infty.$$

La loro differenza è $b - a$, cioè una quantità finita anche nel limite per $x = \infty$.

La espressione $\infty - \infty$ è un espressione *indeterminata*, (v. Cap. V, § 1) può cioè avere un valore piuttosto che un altro secondo la natura delle quantità che diventano infinite.

Possiamo però dimostrare *che se la differenza di due infiniti tende ad una quantità finita, i due infiniti sono dello stesso ordine e il limite del loro rapporto è l'unità*. Se infatti

$$\lim (\alpha - \beta) = a$$

si ha

$$\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = \lim \frac{a}{\beta} = 0$$

cioè

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

---

Tornando ora ancora per poco sullo studio degli infinitesimi, noi possiamo farci questa domanda: La somma algebrica di un numero finito di infinitesimi è anche un infinitesimo; ma può dirsi lo stesso della somma algebrica di un numero *infinito* di infinitesimi?

Si può subito vedere che ciò non è. Si consideri infatti la somma degli infinitesimi

$$x + 2x + 3x + \ldots. + nx + \ldots.$$

Ognuno dei termini di questa somma è un infinitesimo per $x = 0$; ma alla somma di essi non si può assegnare il valore zero.

Possiamo dimostrare un teorema nel quale si contiene una condizione *sufficiente* perchè la somma di infiniti infinitesimi sia un infinitesimo.

Questa condizione si ottiene introducendo un concetto nuovo che ha molta relazione con altri concetti che noi abbiamo dovuto introdurre nei §§ precedenti a proposito della convergenza delle serie, e della continuità delle funzioni.

Si abbiano infiniti infinitesimi,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n, \ldots.$$

Diremo che essi sono *infinitesimi convergenti a zero in ugual grado* ovvero *equiconvergenti a zero*, quando, dato un numero $\sigma$ piccolo a piacere, si *può trovare* un tale intorno del valore limite o dei valori limiti delle variabili da cui dipendono quegli infinitesimi, che per tutti i punti di quell'intorno, i valori *di tutte* le $\alpha$ sieno minori di $\sigma$.

Si possono immaginare degli infinitesimi in cui questo non accada. Per es. le espressioni

$$x^{\frac{1}{2}}, \, x^{\frac{1}{3}}, \, x^{\frac{1}{4}}, \ldots\ldots, \, x^{\frac{1}{n}}, \ldots\ldots$$

sono infinitesimi per $x=0$. Ma è chiaro che assegnato un *qualunque* valore ad $x$ prossimo a zero e quindi minore di 1, quelle quantità sono distribuite in maniera che la seguente è sempre maggiore della precedente, e il limite della loro successione è $x^0 = 1$, e quindi, fissato $x$ qualunque, si potrà coll'aumentare del numero $n$, avvicinarsi al valore 1 finchè ci piace, e superare perciò qualunque quantità $\sigma < 1$ assegnata; per nessun $x$ si potrà cioè ottenere che *tutte* quelle quantità sieno minori di $\sigma$.

Si dirà poi che gli infinitesimi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n, \ldots\ldots$$

sono *uniformemente di ordine superiore* rispetto agli infinitesimi

$$\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n, \ldots\ldots$$

quando i rapporti

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots\ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

sono infinitesimi *convergenti a zero in ugual grado.*

Ciò premesso, si può subito far vedere che *se si ha una somma di infiniti infinitesimi*

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n + \ldots\ldots$$

*la quale sia finita, e se i termini*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

*di un'altra somma di infiniti infinitesimi sono, rispetto ai* $\beta$, ***uniformemente di ordine superiore**, la seconda somma è un infinitesimo.*

Giacchè ponendo

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \varepsilon_1 \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \varepsilon_2 \ldots \quad \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \varepsilon_n \ldots$$

si ha

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \beta_1 \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 \beta_2 \ldots \quad \alpha_n = \varepsilon_n \beta_n \ldots$$

e quindi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots =$$
$$= \varepsilon_1 \beta_1 + \varepsilon_2 \beta_2 \ldots + \varepsilon_n \beta_n + \ldots$$

e siccome si può fare, per ipotesi, che *tutte* le $\varepsilon$ diventino *minori* di una quantità $\sigma$ piccola a piacere, così possiamo scrivere

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots < \sigma (\beta_1 \beta_2 \ldots + \beta_n + \ldots)$$

Ma la somma delle $\beta$ tende ad una quantità *finita*, dunque il secondo membro, impiccolendo $\sigma$, può rendersi piccolo a piacere, e perciò possiamo conchiudere che la somma delle $\alpha$ tende a zero.

§ 11. **Calcolo di alcuni limiti particolari.** — Nell'Analisi occorre spesso la conoscenza di alcuni limiti, al cui calcolo noi perciò vogliamo qui dedicare un paragrafo a parte.

1. Si voglia calcolare

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!}$$

per $n$ intero positivo e convergente all'infinito, e per un valore di $h$ qualunque.

Supposto $h$ compreso fra i due numeri interi $p$ e $p+1$, possiamo scrivere, per $n > p+1$,

$$\frac{h^n}{n!} = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdots \frac{h}{p} \cdot \frac{h}{p+1} \cdots \frac{h}{n}$$

ed essendo le frazioni

$$\frac{h}{p+1}, \frac{h}{p+2}, \cdots \frac{h}{n}$$

decrescenti, possiamo scrivere

$$\frac{h^n}{n!} < \frac{h^p}{p!}\left(\frac{h}{p+1}\right)^{n-p}.$$

Per $n = \infty$, essendo $\frac{h}{p+1}$ minore di 1,

$$\left(\frac{h}{p+1}\right)^{n-p}$$

tende a zero, e quindi

$$\lim \frac{h^n}{n!} = 0.$$

2. Si voglia calcolare

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Cominciamo coll'osservare che un arco minore di $\frac{\pi}{2}$ è sempre *compreso* fra il suo *seno*, e la sua *tangente*, cioè

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tang} x,$$

donde, dividendo per *sen* $x$,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

e tale disuguaglianza si conserva in tutti gli stadi successivi mentre $x$ tende a zero. Per un teorema del § 5 si ha che *se le due quantità estreme tendono allo stesso limite*, anche la quantità intermedia tenderà al medesimo limite. Ora effettivamente per $x=0$, $\frac{1}{\cos x}=1$, e quindi possiamo conchiudere che $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ tende ad 1, cioè che

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

3. Si voglia calcolare

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Si sa dalla trigonometria che

$$1-\cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x,$$

onde

$$\frac{1-\cos x}{x} = 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x}.$$

Poichè il secondo fattore tende ad 1, e il primo tende a zero, possiamo conchiudere che il prodotto tende a zero, cioè

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

4. Si voglia calcolare

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tang} x}{x}.$$

Essendo $\operatorname{tang} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, si ha

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim \frac{1}{\cos x} \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

5. Passiamo ora a calcolare il limite di

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

per $n = \infty$. *Noi dimostreremo che tale limite non è altro che il valore della serie convergente*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

che si chiama la *serie esponenziale* per una ragione che vedremo in seguito.

Cominciamo col fissare per $n$ un valore finito, e chiamiamo $\varphi_n$ la somma dei primi $n+1$ termini delle serie, cioè poniamo

$$\varphi_n = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Essendo

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n \, . \, n-1}{2!} \frac{x^2}{n^2} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

si ha

$$\varphi_n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\frac{x^2}{2!} +$$

$$+ \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right]\frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

I coefficienti del secondo membro sono evidentemente tutti positivi; cosicchè se $x$ è positivo, il secondo membro è la somma di tanti termini positivi, mentre che se $x$ è negativo, i termini del secondo membro sono alternativamente positivi e negativi.

Ma in quest'ultimo caso se noi convertiamo in positivi tutti i termini negativi, verremo ad accrescere il secondo membro, per modo che indicando con $|x|$ il valore assoluto di $x$, possiamo scrivere

$$\varphi_n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{h=2}^{h=n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\left(1-\frac{h-1}{n}\right)\right]\frac{|x|^h}{h!}.$$

Ora evidentemente

$$\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{n}\right)\right]$$
$$<\left[1-\left(1-\frac{h-1}{n}\right)^{h-1}\right]$$

mentre

$$\left[1-\left(1-\frac{h-1}{n}\right)^{h-1}\right]=\frac{h-1}{n}\left[1+\left(1-\frac{h-1}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{h-1}{n}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{h-1}{n}\right)^{h-2}\right]<\frac{(h-1)^2}{n},$$

onde abbiamo:

$$\varphi_n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{h=2}^{h=n}\frac{(h-1)^2}{n}\frac{|x|^h}{h!}.$$

Il secondo membro risulta di $n-1$ termini positivi; aggiungiamo tutti gli altri infiniti termini che risultano dalla stessa formola ponendo per $h$ valori superiori ad $n$.

Allora evidentemente la disuguaglianza continuerà a sussistere con più ragione, e si ha

$$\varphi_n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{1}{n} \sum_2^\infty \frac{(h-1)^2}{h!} |x|^h .$$

La serie del secondo membro è una serie convergente, perchè si può subito vedere che il rapporto del termine generale

$$\frac{(h-1)^2}{h!}|x|^h$$

al termine precedente

$$\frac{(h-2)^2}{(h-1)!}|x|^{h-1}$$

è

$$\frac{(h-1)^2}{(h-2)^2}\frac{|x|}{h}$$

e converge a zero per $h = \infty$; dunque la serie di cui si parla ha un valore *finito* $A$: possiamo perciò scrivere

$$\varphi_n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{A}{n}.$$

Passando ora al limite per $n = \infty$, si vede che il secondo membro converge a zero, e quindi per $n = \infty$ si può conchiudere la eguaglianza dei due termini del primo membro. Per la dimostrazione fatta, $n$ deve convergere all'infinito passando per valori *interi positivi;* ma si può dimostrare che *in qualunque* modo $n$ converga all'infinito, si ha sempre lo stesso risultato. Per brevità tralasciamo però questa dimostrazione.

Per $x = 1$ la serie esponenziale diventa

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

e *il suo valore è un numero irrazionale compreso fra 2 e 3*, che si suole indicare colla lettera *e*, ed è la base dei *logaritmi neperiani. Si ha quindi*

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Possiamo dedurre di qui una notevole relazione fra il numero *e*, e la serie esponenziale per $x$ qualunque. Possiamo infatti scrivere

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}} \right\}^x$$

e ponendo

$$\frac{n}{x} = m$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^x = e^x .$$

Conchiudiamo dunque che *la serie esponenziale generale non è che la potenza $x^{ma}$ del numero e.*

6. Dalla formola

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

*se ne possono* ricavare altre.

Poniamo

$$\frac{1}{n} = m$$

e abbiamo

$$\lim_{m=0} (1 + m)^{\frac{1}{m}} = e.$$

Prendiamo i logaritmi neperiani dei due mem-
e otteniamo

$$\lim_{m=0} \frac{\log (1 + m)}{m} = 1. \tag{a}$$

E se invece partiamo dalla formola

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

collo stesso procedimento otteniamo

$$\lim_{m=o} \frac{\log (1 + m\,x)}{m} = x. \tag{b}$$

Poniamo ora infine nella $(a)$

$$m = a^y - 1$$

donde

$$1 + m = a^y$$

$$\log (1 + m) = y \log a$$

e si ha con facili trasformazioni

$$\lim_{y=o} \frac{a^y - 1}{y} = \log a. \tag{c}$$

Ponendo invece nella $(a)$:

$$m = (1 + y)^\mu - 1$$

$$1 + m = (1 + y)^\mu$$

$$\log (1 + m) = \mu \log (1 + y),$$

si ha

$$\lim_{y=o} \frac{(1+y)^\mu - 1}{\log(1+y)} = \mu.$$

Ma per (*a*)

$$\lim_{y=o} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

dunque possiamo scrivere

$$\lim_{y=o} \frac{(1+y)^\mu - 1}{y} = \mu. \tag{d}$$

## CAPITOLO II.

### Derivate di una funzione.

§ 1. **Derivata di una funzione di una sola variabile.** — Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un certo intervallo $(a, b)$, e sia $x$ un punto di tale intervallo *in cui la funzione sia finita.* Consideriamo un altro punto prossimo ad $x$, e sia il punto $x \pm h$.

La funzione nel punto $x \pm h$ avrà in generale un valore diverso che nel punto $x$; se la funzione è *continua*, come bisogna supporla in queste considerazioni, il valore della differenza o incremento

$$f(x \pm h) - f(x)$$

è una quantità che tende a zero quando $h$ tende a zero; ma può accadere che il rapporto

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h},$$

il quale è il rapporto di due differenze, quella dei valori della funzione, e quella dei valori della variabile, tenda ad un limite per $h = 0$; *se questo limite esiste, è finito, ed è indipendente dalla maniera colla quale h tende a zero, e indipendente* *dal segno di h*, esso si chiamerà *la derivata della funzione nel punto x*, o, per una ragione che vedremo in seguito, *quoziente differenziale* nel punto $x$.

Il rapporto

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

per $h$ finito si suol chiamare *rapporto delle differenze* ovvero anche *rapporto incrementale.*

Se il limite esiste solo a destra o solo a sinistra del punto $x$, allora si avrà la *derivata destra,* o la *derivata sinistra* di $f$ nel punto $x$ Si parlerà però di *derivata* senz'altra aggiunta, quando esistono ambedue le derivate, destre e sinistre, e inoltre sono fra loro eguali.

Se la funzione data ha valore *costante* in qualunque punto, è chiaro che la sua derivata è *zero.*

Immaginando che, data una funzione $f(x)$, per ciascun punto di un intervallo ne esista la *derivata,* l'assieme di tutti gli infiniti valori di questa, costituisce a sua volta una nuova funzione che si chiama la *prima funzione derivata*, e si indica col simbolo $f'(x)$.

Cominciamo a vedere quali sono le condizioni per l'esistenza della derivata finita e determinata in un punto. Prima di tutto è chiaro che *la funzione deve essere continua nel punto*; altrimenti il numeratore non converge a zero, mentre il denominatore converge a zero. Quindi il limite del rapporto in tal caso, se anche esiste, non potrà essere finito.

Inoltre *la funzione, la quale, per ipotesi, è finita in x, non potrà essere infinita in infiniti punti di* *un qualunque intervallo attorno al punto $x$;* perchè se lo fosse, avvicinandosi al punto $x$, passando per tutti questi tali supposti punti nei quali la $f(x \pm h)$ è infinita, il limite che si otterrebbe dovrebbe essere lo stesso di quello ottenuto avvicinandosi in qualunque altra maniera al punto $x$; ma il limite che si ottiene è evidentemente l'infinito, perchè il numeratore risulta costantemente infinito in tutti i successivi stadii del passaggio al limite, dunque il limite del rapporto incrementale non potrebbe essere finito.

Raccogliendo queste considerazioni possiamo dire: *se in un punto in cui una funzione è finita, la derivata della medesima esiste ed è finita, la funzione deve essere continua e finita nel punto, e inoltre deve esistere un intorno del punto in cui la funzione non sia mai infinita.*

Possiamo anche far vedere che *almenochè il valore della derivata non sia zero, la funzione non deve nell'intorno del punto $x$, essere tale che la espressione $f(x \pm h) - f(x)$ cambi infinite volte di segno.*

Noi cioè possiamo bensì immaginare delle funzioni per le quali, in un qualunque intorno del punto $x$, piccolo a piacere, esistano sempre dei punti in cui $f(x \pm h) - f(x)$ abbia valore positivo, e altri punti in cui abbia valore negativo, ma una funzione cosiffatta o ha la derivata zero, oppure non ha derivata determinata.

Un esempio di ciò è la funzione definita dalle due formole

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

La funzione $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ha valore determinato per ogni $x$, diverso da zero, ma per $x=0$ essa ci si presenta come indeterminata perchè tale è $\operatorname{sen} \infty$; è questa la ragione per cui noi stabiliamo a parte il valore che la nostra funzione vogliamo che abbia per $x=0$; propriamente fissiamo il valore zero. Così facendo veniamo a costruire una funzione *continua* anche per $x=0$, giacchè è facile riconoscere che *il limite di $f(x)$ per $x=0$, è anche zero.* Infatti per qualunque $x$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ sarà sempre compreso fra $-1$ e $+1$, e quindi $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è una quantità che si può rendere piccola a piacere, diminuendo il valore di $x$, e perciò per $x=0$ tenderà a zero.

La funzione così costruita è della suindicata specie: avvicinandosi infatti con $x$ al valore zero, il $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ cambia di segno infinite volte, e non si può mai trovare un intervallo, per quanto piccolo, attorno $x=0$, in cui la funzione $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ sia *sempre* positiva o *sempre* negativa.

È facile dimostrare ciò che abbiamo sopra asserito in quanto alla *non esistenza di una derivata diversa da zero* per una funzione cosiffatta.

Giacchè per effetto della supposta continuità della funzione, noi possiamo dire che anche la differenza

$$f(x \pm h) - f(x),$$

*considerata* come funzione di $h$, è una funzione continua; e quindi se col diminuire di $h$ tale espressione cambia infinite volte di segno, essa passerà infinite volte per zero; vi saranno perciò in qualunque intorno del punto $x$, infiniti punti, in cui

$$f(x \pm h) = f(x).$$

Noi intanto possiamo far convergere $h$ a zero facendo che il punto $x+h$ venga a coincidere successivamente con ciascuno di tutti questi infiniti punti: e allora in tutti gli stadi del passaggio al limite, essendo il numeratore del rapporto sempre zero, il limite di esso, se esiste, non potrà che essere zero. Quindi la derivata della funzione o è effettivamente zero, oppure non esiste determinata.

Così per esempio la funzione da noi sopra considerata non ha derivata in $x=0$, mentre l'altra funzione

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ha per derivata zero.

La *continuità* della funzione, è, come si è detto, condizione *necessaria* perchè esista la derivata nel senso sopra definito; essa però non è condizione *sufficiente*, e ciò risulta immediatamente dall'esempio trattato di sopra; *le funzioni derivabili formano cioè una classe di funzioni più ristretta, e compresa in quella delle funzioni continue*.

Una volta si credeva che tutte le funzioni continue fossero derivabili; in seguito si vide che ciò *non era, e che si* potevano invece trovare funzioni che *sono continue in tutto un intervallo senza essere mai derivabili.*

Diffusi particolari su ciò possono trovarsi nel mio volume: *Note critiche di calcolo infinitesimale* Milano 1895, pag. 85 e seg.

Vogliamo ora accennare ad un'interessante rappresentazione geometrica della derivata di una funzione di una sola variabile, in un punto.

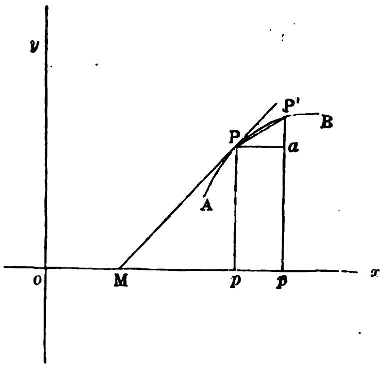


Fig. 1.

Si abbia una funzione $y$ di $x$ che sia rappresentabile geometricamente mediante un arco ordinario di curva piana come $A\,B$ (il che del resto non è possibile per tutte le funzioni: vedi Cap. 1, § 2).

Per ogni valore di $x$, il valore dell'ordinata $y$ rappresenta la funzione. Consideriamo le ordinate corrispondenti alle ascisse $o\,p$, $o\,p'$.

La differenza fra le ordinate, sia rappresentata da $P'\,a$, mentre la differenza delle ascisse è rappresentata da $pp' = P\,a$.

Il rapporto incrementale è dato da

$$\frac{P'a}{Pa}$$

che, per le ordinarie nozioni di trigonometria, è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la corda $PP'$ della curva fa con $Pa$, ovvero coll'asse di $x$. Quando $p'$ si avvicina a $p$, $P'$ si avvicina a $P$ sulla curva, e la corda $P\,P'$ diventa la *tangente* alla curva nel punto $P$; dunque: *la derivata di una funzione per un valore $x$ della variabile, rappresenta, se la funzione è rappresentabile geometricamente mediante una curva, la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica alla curva nel punto di questa che ha per ascissa $x$, fa coll'asse delle ascisse.*

Si vede di qui che il problema della ricerca della posizione della tangente in un punto della curva si risolve col calcolo della derivata della funzione che rappresenta l' ordinata della curva espressa mediante l'ascissa. Ed è appunto il problema famoso e fondamentale della ricerca delle tangenti che dette occasione a LEIBNITZ e NEWTON di scoprire i fondamenti del Calcolo differenziale.

La definizione di derivata, data di sopra, presuppone che sia il punto in cui si considera la derivata, sia il valore della funzione in esso, sieno *finiti;* per completare allora le considerazioni di questo paragrafo, bisognerebbe stabilire ciò che conviene assumere per definizione di *derivata* quando o il punto in cui essa si vuol considerare, *o la funzione,* o ambedue sono *infiniti.*

Restando a nostro arbitrio il fissare la definizione per il valore della derivata in tali casi, noi la fisseremo in modo che la funzione derivata riesca possibilmente una funzione *continua;* così ci saremo serviti nel modo più semplice dell'arbitrarietà di cui possiamo disporre e avremo anche conservata una proprietà fondamentale della funzione derivata di cui tratteremo più avanti (v. § 4).

Perciò calcoleremo, quando ci sarà possibile, il limite della funzione derivata, e tal limite lo assumeremo come valore della stessa in ciascuno dei casi suindicati.

La discussione rigorosa del calcolo di tali limiti ci porterebbe però troppo lontano dal piano propostoci in queste lezioni; ci limiteremo perciò a qualche breve considerazione, specialmente di indole geometrica, senza la pretesa di stabilire dei teoremi generali.

Immaginiamo una funzione rappresentabile mediante una curva ordinaria continua e a tangente determinata, in un intorno a sinistra di un punto $a$, e in tal punto l'ordinata della funzione abbia il valore $\infty$. Geometricamente appare che se la tangente alla curva deve tendere ad una posizione limite quando l'ascissa del punto di contatto tende al valore $a$, tale posizione limite non può essere che quella dell'ordinata nel punto $a$, e quindi *il limite della derivata della funzione in questo caso è l'infinito.*

Supponiamo p. es. che l'ordinata della curva sia espressa dalla funzione

$$y = \frac{1}{x - a}$$

che tende ad $\infty$ per $x = a$. La derivata è espressa da (v. § 3)

$$-\frac{1}{(x-a)^2}$$

e, come si vede, tende anche ad $\infty$ per $x = a$.

Supponiamo ora il caso di una funzione il cui limite per $x = \infty$ sia finito, eguale ad $A$, e che abbia, da un certo $x$ in poi sino a $x = \infty$, derivata determinata e tendente ad un limite. Geometricamente appare che la retta parallela all'asse $x$ e distante da questo della quantità $A$, dovrà incontrare la curva nel punto all'$\infty$, ed è da considerarsi come tangente alla curva stessa; il limite della posizione della tangente è dunque una parallela all'asse delle $x$, e perciò *il limite della derivata è zero.* Per es. la funzione $x = A + \frac{1}{x}$, per $x = \infty$ tende ad $A$, e la sua derivata $-\frac{1}{x^2}$ per $x = \infty$ tende a zero.

Resta a considerare il caso del limite per $x = \infty$ della derivata, supposto che per $x = \infty$, la funzione tenda anche all'infinito.

Si abbia una curva che abbia un ramo estendentesi all'infinito, e la tangente tenda ad una posizione limite, quando il punto di contatto si allontani su tal ramo.

Consideriamo la tangente alla curva in un punto $P$, di ascissa $x$, del ramo all'infinito. Tale tangente incontrerà l'asse di $x$ in un punto di ascissa $x_0$.

*Essendo la derivata* la tangente trigonometrica dell'angolo $PMp$, essa sarà eguale al rapporto $\frac{Pp}{Mp}$ cioè a $\frac{f(x)}{x - x_0}$. Facciamo ora tendere il punto $P$ all'infinito; allora se la tangente tende ad una posizione limite, tale posizione segherà l'asse di $x$ in un punto a distanza finita di ascissà $X_0$.

Nel rapporto $\frac{f(x)}{x - x_0}$ vi compariscono due infiniti $f(x)$ e $x$, mentre $x_0$ tende alla quantità finita $X_0$. Per un teorema sugli infiniti (vedi Cap. I, § 10) si ha che il limite di tale rapporto è eguale al limite di $\frac{f(x)}{x}$, perchè aggiungendo al denominatore, che è un *infinito*, una quantità $x_0$ tendente ad una quantità *finita*, il limite del rapporto non si altera.

Si ha così per risultato che *nel caso indicato il limite della funzione derivata si ottiene calcolando il limite*:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Per es. se $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, la sua derivata è (v. § 3)

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

il cui limite, per $n = \infty$, è 1, ed anche 1 è il limite di $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

Ripetiamo però che le considerazioni geometriche qui fatte non sono in alcun modo da considerarsi come delle soddisfacenti dimostrazioni degl indicati teoremi, i quali del resto, a loro volta, non valgono che con opportune restrizioni, sulle quali non crediamo conveniente dilungarci.

§ 2. **Teoremi di derivazione per le funzioni esplicite. Derivazione per serie.** — Le prime quistioni che si presentano nel calcolo delle derivate delle funzioni sono quelle relative all'espressione della derivata di una funzione composta di altre funzioni fra loro riunite dai segni di operazioni analitiche, mediante le derivate di queste.

Si suppone naturalmente che ognuna delle funzioni, mediante cui è composta la data, abbia derivata determinata.

In primo luogo è evidente che *la derivata di una costante è zero;* sia inoltre $f(x)$ eguale al prodotto di una costante per una funzione di $x$, cioè

$$f(x) = c\,\varphi(x).$$

Avendosi

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

si deduce che *in tal caso la derivata si calcola moltiplicando la costante per la derivata della funzione.*

Si abbia la somma di più funzioni, in numero finito

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$$

Diamo ad $x$ l'incremento $h$ e si ha:

$$f(x+h) = \varphi_1(x+h) + \varphi_2(x+h) + \ldots$$

donde

$$f(x+h)-f(x)=\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)+\\ +\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)+\dots$$

e dividendo per $h$ e poi passando al limite per $h=0$ si ha infine

$$f'(x)=\varphi_1'(x)+\varphi_2'(x)+\dots$$

Possiamo cioè conchiudere che *il segno di derivazione è invertibile col segno di somma.*

Come caso particolare: *Se due funzioni differiscono per una costante, le loro derivate sono eguali.*

L'invertibilità del segno di derivazione col segno di operazione non più sussiste per il prodotto e il quoziente. Sia

$$f(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x).$$

Dando ad $x$ l'incremento $h$ si ha

$$f(x+h)=\varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x+h)$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x+h)-\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\\ &= \varphi_2(x+h)\,[\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)]+\\ &\quad+\varphi_1(x)\,[\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)]. \end{aligned}$$

Dividendo per $h$ e passando al limite per $h=0$ si ha

$$f'(x)=\varphi_2(x)\,\varphi_1'(x)+\varphi_1(x)\,\varphi_2'(x)$$

cioè *la derivata del prodotto di due funzioni è eguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per l'altra funzione.*

Applicando ripetutamente questa regola si può ottenere la regola generale: *per fare la derivata del prodotto di n funzioni, si fa la derivata di ciascuna funzione e si moltiplica per tutte le altre, e poi sommansi tutti gli n prodotti così formati.*

Si abbia ora

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

donde

$$f(x+h) = \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)}$$

e quindi

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} =$$

$$= \frac{\varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\,\varphi_2(x+h)}{\varphi_2(x)\,\varphi_2(x+h)} =$$

$$= \frac{\varphi_2(x)\,[\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)] - \varphi_1(x)\,[\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)]}{\varphi_2(x)\,\varphi_2(x+h)}.$$

Dividendo per $h$ e passando al limite per $h = 0$ resta

$$f'(x) = \frac{\varphi_2(x)\,\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\,\varphi_2'(x)}{[\varphi_2(x)]^2},$$

cioè *la derivata del quoziente di due funzioni si fa sottraendo dal prodotto del denominatore per la derivata del numeratore, il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore, e dividendo il tutto per il quadrato del denominatore.*

Supponiamo ora che $y$ sia una funzione di un'altra funzione $z$ di $x$; sia $y = \varphi_1(z)$, $z = \varphi_2(x)$; sarà $y$ *una funzione di* $x$, $f(x)$; come si esprimerà la sua derivata rispetto ad $x$, mediante le derivate di $f$ e $\varphi$?

Quando $x$ riceve l'aumento $h$, allora $z$ riceverà un certo aumento che chiamiamo $k$, mentre $y$ riceverà l'aumento $l$.

Ora si ha identicamente:

$$\frac{l}{h} = \frac{l}{k} \cdot \frac{k}{h},$$

facendo perciò convergere $h$ a zero, anche $k$ ed $l$ convergono a zero, e i limiti dei rapporti

$$\frac{l}{h}, \frac{l}{h}, \frac{k}{h}$$

sono rispettivamente le derivate di $y$ rispetto ad $x$, di $y$ rispetto a $z$, e di $z$ rispetto ad $x$; quindi nel limite otteniamo

$$f'(x) = \varphi_1'(z)\,\varphi_2'(x)$$

cioè *la derivata rispetto ad $x$ di una funzione $y$ che sia data esplicitamente come funzione di una variabile $z$, la quale sia poi a sua volta funzione di $x$, è eguale al prodotto della derivata di $y$ rispetto a $z$, per la derivata di $z$, rispetto ad $x$.*

Consideriamo finalmente il caso delle funzioni *inverse*. Sia $y$ funzione di $x$, $\varphi(x)$, e sia tale che si possa, come si dice, *invertire*, cioè si possa considerare anche $x$ funzione di $y$; una tale funzione sappiamo che si chiama la funzione *inversa* della data. Come si esprime la derivata della funzione inversa mediante quella della funzione diretta?

Si dia ad $x$ l'incremento $h$ con che $y$ acquisti *l'incremento $k$;* è chiaro che se si dà viceversa ad

$y$ l'incremento $k$, la $x$ riceverà l'incremento $h$; per modo che il limite del rapporto di $\frac{h}{k}$ è la derivata della funzione inversa, come il limite del rapporto inverso $\frac{k}{h}$ è la derivata della funzione diretta.

Ma identicamente

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{k}{h}}$$

dunque: *la derivata di una funzione inversa ha per valore l'inversa aritmetica della derivata della funzione diretta.*

L'inversione *analitica* della funzione si riduce ad un'inversione puramente *aritmetica* della derivata.

La derivata così ottenuta non viene espressa in funzione della variabile indipendente ma della funzione. Per esprimerla in funzione della variabile indipendente occorrerebbe effettuare la inversione analitica della funzione; ma finchè ci vogliamo limitare alla conoscenza del valore della derivata in un punto nel quale si conosca il valore della variabile e della funzione, non occorre però affatto la previa effettiva inversione analitica della funzione stessa.

---

Prima di terminare questo paragrafo dobbiamo esaminare un caso di una funzione composta di un numero *infinito* di altre funzioni.

*Nel teorema* dato in questo paragrafo sulla derivata di una somma, noi abbiamo dovuto supporre che la somma risultasse di un numero finito di termini. Se si trattasse invece di un numero infinito di termini, cioè di una serie, allora noi dobbiamo naturalmente fare delle considerazioni a parte.

Si abbia la serie convergente

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{1}^{n} u_n(x) + R_n(x)$$

*i cui termini sieno tutti derivabili.*

Formiamo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \sum_{n=1}^{n} \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} + \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}.$$

Passando al limite per $h = 0$ si ha

$$f'(x) = \sum_{1}^{n} u_n{}'(x) + R_n{}'(x).$$

Quindi *se data una quantità $\sigma$ si potrà sempre trovare un indice $n$ tale che $R'_n(x)$ sia minore di $\sigma$, allora possiamo dire che la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} u_n{}'(x)$$

*è convergente e il suo valore è proprio $f'(x)$.*

Un teorema importante e semplice sulla derivazione per serie è il seguente che ci limiteremo solo ad enunciare, anche perchè per ora non abbiamo ancora il mezzo di compirne la dimostrazione:

*Se esiste un intorno del punto che si considera, in cui la serie delle derivate è equiconvergente, il valore di questa é proprio la derivata della serie data in quel punto.*

Possiamo subito far l'applicazione di questo teorema alle serie di potenze di cui abbiamo già trattato nel Cap. I, § 7.

Si abbia la serie di potenze

$$f(x) = a^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_0^\infty a_n x^n ,$$

e sia $x$ un punto interno del suo campo di convergenza, che, come si sa, risulta di un segmento (inclusi o no gli estremi) avente per punto medio il punto zero.

Formiamo la serie delle derivate e si ha (v. § 3)

$$\sum_0^\infty n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Nel punto $x$ questa serie (che è a sua volta un'altra serie di potenze) è anche convergente assolutamente, come lo è la data.

Ripigliamo infatti le stesse notazioni adoperate nel Cap. I, § 7 e indichiamo con $a$ un punto tale che $|\, a \,| > |\, x \,|$ e in cui la serie data sia anche convergente. Ponendo $\frac{x}{a} = t < 1$, e indicando con $M$ un numero maggiore del massimo dei termini $|\, a_n\, a^n \,|$, si vede facilmente che i termini della serie

$$\sum_0^\infty n \left| a_n\, x^{n-1} \right|$$

sono rispettivamente minori di quelli della serie

$$\frac{M}{|a|}\sum_0^\infty n\,t^{n-1},$$

che è convergente perchè $t < 1$; dunque anche la serie precedente è convergente, e perciò è assolutamente convergente in $x$ quella delle derivate.

Il punto $x$ appartiene certamente perciò al campo di convergenza della serie di potenze rappresentata dalle serie delle derivate; anzi è facile riconoscere che esso è un punto interno a tal campo; esso potrà perciò sempre circondarsi con un intervallo in cui la medesima serie è equiconvergente; per il teorema di sopra si ha quindi che *la derivata di una serie di potenze convergente in un campo determinato per un punto interno al medesimo si fa formando la serie delle derivate dei singoli termini.*

§ 3. **Calcolo delle derivate delle funzioni esplicite più semplici.** — In questo paragrafo calcoleremo le derivate di alcune funzioni che possiamo considerare come *elementari*, nel senso che mediante esse possono poi comporsi la maggior parte delle funzioni che si incontrano nei calcoli ordinarii.

1. *Derivata della potenza di una variabile.*

Se

$$f(x) = x^m$$

si ha

$$f(x+h) = (x+h)^m$$

donde

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^m-x^m}{h}$$

$$=\frac{x^m+m\,h\,x^{m-1}+\ldots-x^m}{h}$$

$$=m\,x^{m-1}+\frac{m\,.\,m-1}{2}\,h\,x^{m-1}+\ldots$$

Notiamo che in quest' ultima espressione gli altri termini contengono tutti per fattore $h$, e quindi facendo $h=0$, si ha

$$f'(x)=m\,x^{m-1},$$

donde la regola: *per fare la derivata di una potenza rispetto alla sua base si moltiplica l' esponente per quella potenza della base stessa, che ha per esponente quello di prima diminuito di un'unità.*

Questa regola vale *qualunque* sia $m$, positivo, o negativo, razionale o irrazionale; infatti la formola dello sviluppo di $(x+h)^m$, di cui ci siamo serviti, vale per qualunque $m$, potendo sempre scegliere $h$ così piccolo che $\frac{h}{x}$ sia minore di 1, nel qual caso è valido, come si sa dall'Algebra lo *sviluppo* cosiddetto *binomiale* (v. anche Cap. III, § 3).

Se $m$ è negativo eguale $-n$, allora

$$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n},$$

e applicando la regola di sopra si ha:

$$f'(x)=-n\,\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Se $m=\frac{1}{2}$ la funzione è $\sqrt{x}$, e la sua derivata è:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

e se $m=\frac{1}{n}$ la funzione è $\sqrt[n]{x}$ e la sua derivata è eguale a

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}.$$

Mediante la formola di sopra può calcolarsi infine la derivata di qualunque funzione razionale, composta di una frazione il cui numeratore e denominatore sieno dei polinomi interi in $x$.

Basterà perciò applicare i teoremi sulle derivate delle somme e dei quozienti esposti nel § precedente.

2. *Derivate delle funzioni circolari.* Se

$$f(x)=\operatorname{sen} x$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h}\\ &= \operatorname{sen} x\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\frac{\operatorname{sen} h}{h}.\end{aligned}$$

Per $h=0$ sappiamo che i limiti di

$$\frac{\cos h-1}{h} \qquad \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

sono rispettivamente 0, e 1 (v. Cap. I, § 10) dunque possiamo scrivere

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \cos x$$

cioè *la derivata della funzione seno di un arco $x$, è il coseno del medesimo arco.* Col medesimo procedimento possiamo trovare che *la derivata della funzione coseno è eguale alla funzione seno del medesimo arco ma col segno negativo.*

Se $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, applicando la regola di derivazione del quoziente sviluppata nel § precedente si ha:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

cioè *la derivata della funzione tangente è eguale all'inverso del quadrato del coseno del medesimo arco.*

Così analogamente *la derivata della funzione cotangente è eguale all'inverso del quadrato del seno col segno negativo.*

Consideriamo ora le altre due funzioni circolari cioè la secante e la cosecante.

Si sa dalla trigonometria che

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

onde la derivata di sec $x$ sarà

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x$$

cioè *la derivata della secante si forma moltiplicandola per la tangente del medesimo arco.*

Analogamente per la derivata di

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

si ha

$$-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$

cioè *la derivata della cosecante si forma moltiplicandola per la cotangente dello stesso arco, e ponendo il segno negativo al prodotto.*

3. *Derivate delle funzioni logaritmiche ed esponenziali.*

Si abbia $f(x)$ eguale al logaritmo *neperiano* di $x$, cioè

$$f(x) = \log_e x.$$

Si ha:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log_e (x+h) - \log_e x}{h}$$

$$= \frac{\log_e \left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x}$$

Ma per $h = 0$

$$\lim \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = 1 \qquad \text{(v. Cap. I, § 10)}$$

*unque* la derivata di $\log_e x$ è $\frac{1}{x}$ cioè *la deriva'* *della funzione logaritmica neperiana di una variabile, è uguale all'inversa della variabile stessa.*

Si tratti ora del logaritmo di base qualunque $a$ (non neperiano); sia cioè $f(x) = \log_a x$.

Ricordando la formola [1]

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \log_a e \log_e x$$

si ha, derivando:

$$\frac{1}{x} \log_a e$$

cioè *la derivata rispetto ad $x$ del logaritmo di base $a$ di $x$ è eguale al logaritmo di base $a$ di $e$* $\Big($*base dei logaritmi neperiani* (v. Cap. I, § 10)$\Big)$ *diviso per $x$.*

Si abbiano ora da derivare le esponenziali $a^x$ ed $e^x$.

Per $f(x) = a^x$ il rapporto incrementale è

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Ma per la formola (c) del Cap. I § 11, si ha che

$$\lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = \log_e a$$

---

(1) Se poniamo $a^y = x$ cioè $y = \log_a x$, prendendo i logaritmi dei due membri si ha

$$y \log_e a = \log_e x$$

donde

$$\log_a x \log_e a = \log_e x.$$

Per $x = e$ si ha

$$\log_a e \,.\, \log_e a = 1.$$

dunque la derivata di $a^x$ è

$$a^x \log_e a$$

cioè la *derivata rispetto all' esponente, dell' esponenziale di base qualunque a è eguale allo stesso esponenziale moltiplicato per il logaritmo neperiano della base.*

Per $a = e$ si ha *che la derivata rispetto all' esponente dell'esponenziale neperiano è eguale allo stesso esponenziale.*

Le funzioni esponenziali essendo le inverse delle funzioni logaritmiche, delle quali abbiamo già calcolato la derivata, potremmo anche giungere più facilmente a questi medesimi risultati, applicando il teorema della derivata delle funzioni inverse (v. § 2).

Così sapendo che la derivata di

$$y = \log_a x$$

è

$$\log_a e \,.\, \frac{1}{x},$$

la derivata, rispetto a $y$, di

$$x = a^y$$

sarà

$$\frac{x}{\log_a e},$$

cioè

$$a^y \log_e a,$$

che è lo stesso risultato di prima, salvo lo scambio di $x$ con $y$.

*4. Derivate delle funzioni circolari inverse.*

Chiamiamo funzioni circolari inverse le funzioni inverse delle funzioni circolari sen $x$, cos $x$, tg $x$, etc.

Vediamo prima di tutto se è possibile e come, considerare l'arco come funzione del suo seno.

È chiaro che dato il seno di un arco, vi sono infiniti archi che hanno tutti quel medesimo seno, quindi dato il seno di un arco, questo non è determinato univocamente. Però se noi poniamo che l'arco debba essere compreso sempre fra i due valori

$$\frac{2m+1}{2}\pi, \qquad \frac{2m+3}{2}\pi,$$

dove $m$ possa essere un qualunque numero *intero* positivo o negativo, allora è chiaro che vi sarà un unico arco che ha per seno la quantità data, perchè, come si sa dalla trigonometria, fra tali due valori non esistono due archi aventi lo stesso seno. La funzione così formata la indichiamo col simbolo

$$y = \text{arc sen } x$$

che significa *l'arco, compreso fra i limiti detti, il cui seno è $x$*. La variabile $x$ è data da $x = \text{sen } y$.

Per trovare la derivata di una tale funzione ci serviamo del teorema delle funzioni inverse (§ 2).

La derivata della funzione diretta sen $y$ è cos $y$; dunque la derivata di $y$ rispetto ad $x$ è (espresso in $y$) eguale ad $\dfrac{1}{\cos y}$.

Se vogliamo esprimere tale derivata mediante *la variabile $x$*, non c'è che ricavare il valore di cos $y$ dalla relazione $x = \operatorname{sen} y$. Si ricava

$$\sqrt{1-x^2} = \cos y,$$

e quindi *la derivata di arc sen $x$ è*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

A prima vista tale espressione ha una indeterminazione nel segno. Ma si può subito riconoscere che, per le ipotesi fatte, resta fissato univocamente il segno da prendere per il radicale; infatti se l'arco $y$ deve prendersi fra i limiti indicati il suo coseno sarà sempre positivo, se $m$ è un numero dispari, e sempre negativo se $m$ è un numero pari; onde secondo il valore che si fissa per $m$ bisognerà prendere per il radicale un segno piuttosto che l'altro.

Considerazioni analoghe possiamo fare per l'inversa della funzione *coseno*. Se è $x = \cos y$, colle analoghe considerazioni di sopra, si può vedere che $y$ può definirsi come funzione di $x$, in un campo di variabilità di $y$ che si estenda

$$\text{da } m\pi \quad \text{sino a} \quad (m+1)\pi$$

dove $m$ sia un numero *intero* positivo o negativo.

Una tale funzione la indichiamo con

$$y = \operatorname{arc} \cos x$$

e la sua derivata rispetto a $x$ sarà

$$-\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Anche qui la indeterminazione del segno del radicale si risolve osservando che per tale campo di variabilità di $y$, la funzione sen $y$ è sempre positiva se $m$ è pari, ed è sempre negativa se $m$ è dispari.

Si vede quindi che, a meno del segno, *le derivate delle due funzioni.*

$$\text{arc sen } x, \qquad \text{arc cos } x$$

*sono eguali in valore assoluto;* questo risultato si potea prevedere, perchè è facile vedere che per uno stesso $x$, o la somma o la differenza di quelle due funzioni è una quantità costante del tipo $(2r+1)\frac{\pi}{2}$, dove $r$ è un numero intero.

Per la funzione inversa di

$$x = \text{tg}\, y$$

possiamo fare le stesse considerazioni, e ricavare che tale funzione inversa che indicheremo con

$$y = \text{arc tg}\, x$$

è definita in un campo di variabilità che si estenda o

$$\text{da} \quad \frac{2m+1}{2}\pi \quad \text{sino a} \quad \frac{2m+3}{2}\pi$$

ovvero anche

$$\text{da } m\pi \text{ sino a } (m+1)\pi.$$

Da tali intervalli bisogna poi ancora togliere i *punti in cui la $x$* diventa infinita; cioè gli estremi del primo intervallo, o il punto medio del secondo $\left[y=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$, nel quale ultimo punto la $x$ diventa infinita di segno indeterminato, secondochè la $y$ si avvicina a tal valore da destra o da sinistra.

Colle analoghe considerazioni si trova infine che *la derivata di arco tangente di $x$ è* $\frac{1}{1+x^2}$.

Così similmente *la derivata di arco cotangente $x$ è* $-\frac{1}{1+x^2}$.

Possiamo fare l'osservazione importante che *mentre il logaritmo, e le funzioni circolari inverse sono funzioni trascendenti, le loro derivate sono invece funzioni algebriche.*

---

Facciamo ora alcune applicazioni delle formole sviluppate in questo paragrafo e nel precedente.

Dalla nota formola

$$\text{sen}\,(x+a)=\text{sen}\,x\cos a+\cos x\,\text{sen}\,a,$$

derivando rispetto ad $x$ si ha

$$\cos(x+a)=\cos x\cos a-\text{sen}\,x\,\text{sen}\,a$$

che è un'altra nota formola di trigonometria.

Consideriamo la serie esponenziale (v. Cap. I, § 11).

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots.+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

*la quale* è una serie di potenze (v. Cap. I, § 7) convergente per qualunque $x$, quindi equiconvergente in un qualunque intervallo.

La serie delle derivate è

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

cioè la stessa serie data, e quindi è equiconvergente; per un teorema del paragrafo precedente essa sarà allora esattamente la derivata della serie data. Ciò significa che la derivata di $e^x$ è la stessa $e^x$, risultato che per altra via già conosciamo.

**§ 4. Funzioni aventi derivata in un intervallo; teorema di Rolle; teorema del valore medio e suoi corollari.**

Immaginiamo *una funzione* $y=f(x)$, *sempre finita e che abbia derivata determinata e finita in un intervallo da* $x_0$ *sino ad* $x_0+h$.

Noi vogliamo esaminare in questo paragrafo certe relazioni fondamentali che esistono fra i valori della funzione e i valori della derivata.

Consideriamo i valori che la funzione ha nell'intervallo, e di essi consideriamone il limite superiore che, per effetto della continuità della funzione, sarà precisamente un *massimo* per la funzione, cioè vi sarà nell'intervallo (compresi gli estremi) un punto in cui la funzione acquista tal valore. Avendo supposto che la funzione è sempre *finita*, questo massimo non potrà essere l'infinito.

Nella stessa maniera consideriamo il *minimo* della funzione.

Ora possono accadere questi casi: o questo minimo e *questo massimo* sono situati l'uno in un estremo e l'altro nell'altro estremo dell'intervallo; ovvero, uno è situato in un estremo, e l'altro in un punto intermedio, ovvero finalmente ambedue in punti intermedi.

È chiaro però che se nei due estremi la funzione ha il medesimo valore, allora, almenochè la funzione non sia costante, uno dei due almeno, o il minimo o il massimo, deve certamente essere situato in un punto intermedio dell'intervallo.

Ora possiamo subito far vedere che se un minimo o un massimo sta in un punto *intermedio* la derivata in quel punto è *zero*.

Giacchè se $x_1$ è un tale punto, p. es. di massimo, e se consideriamo le due differenze

$$f(x_1 - h) - f(x_1), \qquad f(x_1 + h) - f(x_1),$$

è evidente che esse sono negative o zero, perchè $f(x_1)$ non è minore di alcun altro valore della funzione; dunque dividendo la prima differenza per $-h$, e la seconda per $+h$, si hanno due rapporti che, per tendere di $h$ a zero, si conservano costantemente di segno contrario; ma i loro limiti devono essere eguali, perchè debbono rappresentare la derivata, che supponiamo esistente, della funzione in $x_1$, dunque tali limiti non possono che esser zero, perchè se il limite del primo rapporto fosse p. es. una quantità positiva, esso non potrebbe anche essere limite del secondo rapporto, il quale in qualunque stadio del valore di $h$ è sempre di segno negativo.

Consideriamo ora il caso in cui la funzione abbia lo stesso valore nei due punti estremi dell'*intervallo*.

Da una osservazione fatta di sopra, risulta che allora nell'*interno* dell'intervallo esisterà certamente un punto in cui la funzione è massima o minima, e, quindi, per il teorema ora dimostrato, *esisterà un punto in cui la derivata della funzione è zero.*

Dunque: *Se una funzione è, in un intervallo, sempre finita, e derivabile, e la sua derivata è anch'essa sempre finita, e se la funzione ammette il medesimo valore negli estremi dell'intervallo, esisterà nell'interno di questo almeno un punto in cui è zero la derivata della funzione stessa.*

Questo teorema è conosciuto sotto il nome di *teorema di Rolle.* Nell'Algebra esso si dimostra per le semplici funzioni razionali intere, ed equivale al teorema, che *fra due radici di un'equazione algebrica esiste sempre una radice della prima derivata.*

Un'altra forma di questo teorema da luogo a quello cosidetto del *valore medio. Supposta una funzione $f(x)$ sempre finita e derivabile in un intervallo, e la derivata sempre finita, il rapporto delle differenze della funzione e della variabile nei punti estremi dell'intervallo si può esprimere mediante la derivata in un punto intermedio dell'intervallo stesso.*

In effetti la funzione

$$f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),$$

formata mediante la data e mediante la funzione lineare semplicissima $x - x_0$, gode evidentemente delle stesse proprietà della data in quanto è anche finita, derivabile e con derivata finita. Inoltre essa si annulla nei due punti estremi dell'intervallo cioè nei punti $x = x_0$, $x = x_0 + h$. Per il teorema di Rolle si ha dunque che nell'interno dell'intervallo esisterà un punto in cui la derivata di essa è zero.

L'ascissa di tal punto sarà compresa fra le due ascisse $x_0$, $x_0 + h$; rappresentando con $\theta$ un numero compreso fra 0 e 1, questa ascissa sarà perciò della forma $x_0 + \theta h$. Intanto la derivata della funzione soprascritta è

$$f'(x) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

dunque possiamo scrivere

$$f'(x_0 + \theta h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

donde

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h),$$

formola che dimostra il *teorema del valor medio.*

Da questa formola, che ci servirà spesso in seguito si possono ricavare alcune conseguenza.

*Immaginiamo che una funzione in tutto un intervallo da* a *a* b *abbia la sua derivata sempre eguale a zero.* Allora è chiaro che scegliendo due qualunque punti di tale intervallo, e applicando la formola superiore, il secondo membro è sempre zero, qualunque sieno i due punti $x_0 + h$, $x_0$ scelti; quindi qualunque sieno tali punti si ha sempre

$$f(x_0) = f(x_0 + h)$$

cioè: *la funzione è costante in tutto l' intervallo.*

*Se quindi due funzioni* $f(x)$, $g(x)$ *hanno derivate eguali in tutti i punti di un intervallo,* poichè la loro differenza ha allora derivata zero, *le due funzioni date differiranno per una costante.*

E così: *se la derivata di una funzione è costante eguale a* $A$, poichè la funzione lineare $Ax$ ha anche per derivata $A$ in qualunque punto $x$, si ha che *la funzione data sarà eguale ad* $Ax$ *più una costante.*

Dalla stessa formola si può ricavare quest'altro risultato: *se in tutto un intervallo la derivata di una funzione non è mai negativa, non si potranno mai trovare due punti* $x_0$, $x_0 + h$ (*il secondo più a destra del primo, cioè* $h$ *essenzialmente positivo*) *tali che* $f(x_0)$ *sia maggiore di* $f(x_0 + h)$. Altrimenti applicando la formola superiore, si troverebbe un punto in cui $f'(x)$ sarebbe negativa.

Vogliamo ora notare quale significato geometrico hanno i teoremi fondamentali di questo paragrafo.

Per una funzione che ammette una rappresentazione geometrica mediante una curva, il teorema di Rolle viene a dire che, *fra due punti di una curva continua, in cui l'ordinata ha lo stesso valore, esiste certamente almeno un punto in cui la tangente è parallela all'asse di* $x$.

Il teorema del valore medio si può poi facilmente interpretare come segue: *su di un arco di una curva continua esiste certamente almeno un punto nel quale la tangente alla curva è parallela alla corda.* Si vede così che questo teorema non è che come un caso più generale di di quello di **Rolle**, il caso cioè in cui la corda dell'arco che si considera anzichè essere parallela all'asse delle $x$, è in posizione qualunque.

---

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo fare un'osservazione riguardo alla continuità della derivata di una funzione continua.

Se la funzione $f(x)$ ammette derivata in tutto l'intervallo da $a$ a $b$, ciò non basta naturalmente per conchiudere che la derivata è una funzione continua.

Per es. la funzione che per $x=0$ è zero, e per $x$ diversa da zero è data dalla formola $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, ha per derivata in un punto $x$ diverso da zero la espressione

$$2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

mentre che nel punto $x=0$ ha per derivata

$$\lim_{h=0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h=0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

e il valore zero *non* è il limite della prima espressione per $x=0$, perchè quella per $x=0$ non ha alcun limite determinato.

Ora si potrebbe credere che la formola del valore medio, cioè

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

possa dimostrare che $f'$ è continua al punto $x$; perchè passando al limite per $h=0$ il primo membro diventa la derivata di $f(x)$ in $x$, e il secondo il limite della derivata. Questa deduzione sarebbe erronea, giacchè bisogna osservare che nel secondo membro c'è la espressione numerica ignota $\theta$, sulla quale non sappiamo altro se non che è compresa fra 0 e 1; ora se facendo convergere $h$ a zero con continuità, anche il $\theta h$ convergesse con *continuità* a zero, allora noi ne potremmo dedurre effettivamente la continuità della derivata; ma in generale il $\theta h$ col convergere di $h$ a zero, convergerà a zero *saltuariamente*, potendo ritenere che $\theta$ non sia in generale una funzione continua di $h$; e allora ciò che possiamo solo dedurre è che *la derivata di $f$ in $x$, è eguale al limite dei valori che la derivata ha in una certa successione di punti che hanno per punto limite $x$.*

Ora ciò non basta per poter conchiudere che la derivata è una funzione continua in $x$; perchè se ciò fosse, il suo valore in $x$ dovrebbe essere non solo il limite dei suoi valori in una *certa speciale* successione di punti, ma in *qualunque* successione di punti.

Se invece ammettiamo che esista il limite della derivata, cioè esista, e sia sempre lo stesso, qualunque sia la successione di punti coi quali ci avviciniamo ad $x$, allora dallo stesso ragionamento di sopra si deduce che il valore di tal limite è quello della derivata in $x$, cioè *la derivata ha la proprietà che se dei suoi valori esiste il limite per $x=a$, in $a$ essa è una funzione continua.*

Questa costituisce una importante proprietà della funzione derivata.

§ 5. **Differenziali. Notazione fondamentale per la derivata. Derivate e differenziali di ordine superiore.** — Da ora in poi per indicare un incremento dato ad una variabile adopereremo la lettera $\Delta$ messa davanti alla variabile; quindi $\Delta x$ rappresenterà un incremento finito e determinato assegnato alla variabile $x$, cioè la differenza fra due valori di $x$.

Indicheremo con $\Delta f(x)$ la differenza dei due valori corrispondenti di $f(x)$; per modo che il *rapporto incrementale o delle differenze*, di cui si parla nel § 1, resta espresso in simboli colla formola

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Il limite di questo rapporto per $\Delta x = 0$ è la derivata della funzione; se vogliamo esprimere tale derivata come quoziente di due quantità, che indicheremo rispettivamente con $dy$ e $dx$, una di tali quantità, p. es. $dx$ resta a nostro arbitrio; intenderemo che $dx$ rappresenti proprio l'incremento dato alla variabile indipendente, cioè che sia lo stesso $\Delta x$, e lo chiamiamo il *differenziale della variabile indipendente;* il $dy$ resta allora determinato e definito dalla formola

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ovvero

$$dy = f'(x)\, dx,$$

cioè come *il prodotto della derivata della funzione per il differenziale della variabile indipendente*

Tale $dy$ lo chiameremo il *differenziale della funzione*, osservando però che esso, a differenza del differenziale della variabile indipendente, non rappresenta in generale propriamente l'incremento della funzione.

*La derivata resta così espressa come il quoziente del differenziale della funzione per il differenziale della variabile indipendente*, $\frac{dy}{dx}$, e la notazione $\frac{dy}{dx}$ per la derivata di $y$ rispetto ad $x$, è una notazione fondamentale che sarà da noi continuamente adoperata da ora in poi.

Se però il differenziale della funzione non rappresenta proprio l'incremento della funzione quando ad $x$ si dà l'incremento $dx$, come lo rappresentava il simbolo $\Delta y$, esso d'altra parte ha un'assai intima relazione con tale incremento.

Dimostreremo infatti che: *il differenziale $dy$ della funzione differisce dall'incremento $\Delta y$ che questa riceve, quando alla variabile indipendente si dà un incremento eguale a $dx$, per infinitesimi di ordine superiore.*

In effetti essendo

$$\lim_{x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

si può scrivere

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \omega$$

essendo $\omega$ una quantità che tende a zero per $\Delta x = 0$, ed essendo poi $\Delta x = dx$, si ha:

$$\Delta f(x) = dx\, f'(x) + \omega\, dx.$$

Per la natura di $\omega$, il prodotto $\omega dx$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $dx$; ed essendo poi per definizione

$$dx f'(x) = dy$$

si ha infine

$$\Delta y = dy + \varepsilon$$

dove $\varepsilon$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $dx$. Possiamo dunque dire che *il differenziale $dy$ della funzione non rappresenta proprio l'incremento che riceve la funzione per l'incremento $dx$ della variabile, ma però differisce da tale incremento di un infinitesimo di ordine superiore.*

È utile osservare che se la funzione data è *lineare* allora l'incremento della funzione coincide col differenziale.

---

Se la prima derivata $f'(x)$ è una funzione continua di $x$, essa potrà essere anche derivabile in un punto, o anche in un intervallo, e allora si ha la seconda derivata della funzione che si indica con $f''(x)$, e così continuando si può ottenere la $n^{ma}$ derivata che si indica con $f^{(n)}(x)$.

Abbiamo detto a suo luogo che condizioni necessarie perchè esista la derivata finita di una funzione in un punto sono che la funzione sia continua nel punto, e sia finita *in un intorno* del punto.

Perchè dunque esista la derivata seconda finita *in un punto* è necessario che la derivata prima sia continua in quel punto, ed esista e sia finita in un intorno di quel punto.

Ma perchè la derivata prima esista e sia finita in un intorno, è necessario a sua volta che la funzione sia continua in tutto un tale intorno, dunque: *per l'esistenza della derivata seconda finita in un punto è necessario che la funzione e la derivata prima sieno finite in un intorno del punto; e inoltre che la funzione sia continua nello stesso intorno, e che la derivata prima sia continua nel punto.*

Così ragionando si trova analogamente che *le condizioni necessarie perchè esista in un punto e sia finita la derivata* $n^{ma}$ *sono: che la funzione e le sue derivate sino a quella di ordine* $n-1$ *sieno finite in un intorno del punto; che la funzione e le sue derivate sino a quella di ordine* $n-2$ *sieno continue in un intorno del punto, e finalmente che la derivata di ordine* $n-1$ *sia continua nel punto.*

---

In relazione al concetto di derivata $n^{ma}$, dobbiamo introdurre quello di *differenziale* $n^{mo}$.

Vediamo prima di tutto che cosa vogliamo intendere per differenziale di ordine superiore della variabile *indipendente.*

Per differenziale di $1^{o}$ ordine della variabile indipendente, noi intendiamo, come abbiamo detto, un incremento dato alla variabile indipendente. Per ogni valore di $x$ noi possiamo intendere di fissare arbitrariamente il differenziale $dx$, il quale viene così ad essere determinato come una funzione di $x$, arbitrariamente stabilita. Di tale funzione noi possiamo calcolare il differenziale, che sarà eguale alla derivata di $dx$ rispetto ad $x$, moltiplicata per $dx$, e sarà indicato con

$$d(dx) = d^2 x = \frac{d(dx)}{dx} dx;$$

si avrà così il *differenziale secondo di x.*

Ora se si immagina che per ogni punto $x$ il differenziale sia sempre costante, il che si può fare perchè è a nostro arbitrio la scelta di $dx$ per ogni $x$ dato, evidentemente, essendo allora zero la derivata di $dx$ rispetto a $x$, sarà zero il differenziale secondo.

Le definizioni del differenziale terzo, quarto, ecc. sono le analoghe di quelle date pel differenziale secondo; il differenziale terzo sarà il differenziale del differenziale secondo, e così di seguito.

Ciò posto passiamo ai differenziali di ordine superiore della funzione. Intenderemo per differenziale di 2° ordine della funzione il differenziale del differenziale primo che è

$$dy = f'(x)\, dx,$$

e quindi indicandolo con $d^2 y$ si ha

$$\begin{aligned} d(dy) = d^2 y &= \left[ f''(x)\, dx + f'(x) \frac{d(dx)}{dx} \right] dx \\ &= f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x. \end{aligned}$$

Scegliamo costante il differenziale primo della variabile indipendente; allora, come abbiamo detto avanti, il $d^2 y = 0$, e resta la formola semplice

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2$$

donde

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Si vede dunque che: *la derivata seconda della funzione è eguale al quoziente del differenziale secondo della funzione per il quadrato del differenziale primo della variabile indipendente, se è costante per tutti i punti $x$ tale ultimo differenziale primo.*

Nella stessa maniera si vede che, *se è costante il differenziale primo della variabile indipendente, il differenziale $n^{mo}$ della funzione, è eguale al prodotto della derivata $n^{ma}$, per la potenza $n^{ma}$ del differenziale primo della variabile indipendente.* In seguito di che la derivata $n^{ma}$ della funzione potrà indicarsi con

$$\frac{d^n y}{d x^n},$$

notazione che da ora in poi costantemente adopereremo.

---

Dimostriamo ora due teoremi sulle derivate di ordine superiore di una funzione composta di altre funzioni.

Sia in primo luogo $f(x)$ data come somma di più funzioni in numero finito

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_m(x).$$

Sappiamo che la derivata prima di $f(x)$ è eguale alla somma delle derivate prime di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$. *È evidente allora* che, riapplicando la derivazione, si ha che la derivata seconda di $f$, è eguale alla somma delle derivate seconde delle $\varphi$, e così in generale: *la derivata $n^{ma}$ di $f$ è eguale alla somma delle derivate $n^{me}$ delle $\varphi$.*

Sia in secondo luogo

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x).$$

Noi sappiamo come si forma la derivata prima del prodotto di due funzioni; domandiamo ora: c'è una formola per la derivata $n^{ma}$ del prodotto di due funzioni?

Applicando consecutivamente quella che già conosciamo sulla derivata prima, si ha:

$$f'(x) = \varphi_1'(x)\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2'(x)$$

$$f''(x) = \varphi_1''(x)\,\varphi_2(x) + 2\,\varphi_1'(x)\,\varphi_2'(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2''(x)$$

$$f'''(x) = \varphi_1'''(x)\,\varphi_2(x) + 3\,\varphi_1''(x)\,\varphi_2'(x) + 3\,\varphi_1'(x)\,\varphi_2''(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2'''(x)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Da queste formole si intravede già quale sarà la legge di formazione della formola generale; noi dimostreremo che in generale

$$f^{(n)}(x) = \varphi_1^{(n)}(x)\,\varphi_2(x) + (n)_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x)\,\varphi_2'(x) + \ldots.$$

dove i coefficienti numerici $(n)_1\,(n)_2\ldots$ non sono altro che i coefficienti binomiali del numero $n$; questa è la cosiddetta *formola* di LEIBNITZ.

Per dimostrare ciò facciamo vedere che se questa formola vale per l'ordine $n-1$, varrà per l'ordine $n$, se cioè si ha

$$f^{(n-1)}(x) = \varphi_1^{(n-1)}(x)\,\varphi_2(x) + (n-1)_1\,\varphi_1^{(n-2)}(x)\,\varphi_2'(x) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} (n-1)_k\,\varphi_1^{(n-1-k)}(x)\,\varphi_2^{(k)}(x),$$

si avrà anche la formola analoga a questa mutando $n-1$ in $n$; essendo poi essa valida per $n=1, 2, \ldots$ sarà vera sempre.

Derivando infatti primo e secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \varphi_1{}^{(n)}(x)\,\varphi_2(x) + \\ &+ [1 + (n-1)_1]\,\varphi_1{}^{(n-1)}(x)\,\varphi_2{}'(x) + \\ &+ [(n-1)_1 + (n-1)_2]\,\varphi_1{}^{(n-2)}(x)\,\varphi_2{}''(x) + \ldots . \\ &= \sum_{k=o}^{k=n} [(n-1)_{k-1} + (n-1)_k]\,\varphi_1{}^{(n-k)}(x)\,\varphi_2{}^k(x). \end{aligned}$$

Ora dalla teoria dei coefficenti binomiali si sa la relazione, che del resto si verifica facilmente:

$$(n-1)_{k-1} + (n-1)_k = (n)_k,$$

dunque

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=o}^{k=n} (n)_k\,\varphi_1{}^{(n-k)}(x)\,\varphi_2{}^{(k)}(x),$$

che è appunto una formola dello stesso tipo di quella che abbiamo supposta per l'ordine $n-1$.

---

Formiamo le derivate di ordine superiore di alcune delle ordinarie funzioni.

Per

$$f(x) = x^m$$

è chiaro che

$$f^{(n)}(x) = m\,.\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$$

Se $m$ è intero positivo, la derivata $m^{ma}$ è eguale a $m!$ e le altre derivate di ordine maggiore di $m$ sono zero.

Per

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

si ha, pei risultati già noti,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f''''(x) &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

cioè alla quarta derivazione si riproduce la funzione dalla quale siamo partiti. Lo stesso si verifica per la *funzione coseno,* come è facile riconoscere.

Possiamo porre la derivata di ordine $n$ della funzione *seno*, sotto una forma che valga qualunque sia il numero $n$. Perciò osserviamo che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) &= -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

in generale si avrà dunque

$$\frac{d^n \operatorname{sen} x}{d x^n} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

e analogamente

$$\frac{d^n \cos x}{d x^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 6. **Derivate parziali e differenziali delle funzioni di più variabili indipendenti. Il teorema del differenziale totale.** — Si abbia una funzione $y$ continua di più variabili $x_1\ x_2 \ldots .\ x_n$. Poniamo per $x_2\ x_3 \ldots x_n$ dei valori determinati $a_2\ a_3 \ldots a_n$; la $y$ resta funzione solo della variabile $x_1$, e possiamo *trovare la* derivata di $y$ rispetto ad $x_1$ nel punto

$x_1 = a_1$. Tale derivata, se esiste, la chiameremo la *derivata parziale* di $y$ rispetto alla variabile $x_1$ e la indicheremo col simbolo:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}$$

che si differenzia dal simbolo $\frac{dy}{dx_1}$ relativo alla derivata di una funzione di una variabile sola, per la diversa forma delle $\partial$ e $d$. Questa notazione fu introdotta da JACOBI.

Si può anche adoperare la notazione $f'_{x_1}, f'_{x_2}$, ecc

Si noti che per il calcolo delle derivate parziali in un punto bisogna seguire la via indicata, cioè porre prima, per tutte le altre variabili i valori delle coordinate corrispondenti del punto, e poi eseguire la derivazione rispetto all'unica variabile rimasta. Facendo diversamente si potrebbe trovare un valore diverso e quindi erroneo. Il più delle volte però basterà eseguire la derivazione rispetto ad una variabile considerando semplicemente le altre come costanti senza curarsi di sostituire per queste ultime i valori delle coordinate del punto in cui si vuole la derivata; nella formola generale così avuta sostituendo poi i valori di tutte le coordinate del punto si ha il valore richiesto della derivata. Questo metodo però, lo abbiamo già detto, potrebbe dar luogo ad un risultato non esatto.

Per mostrare ciò consideriamo la funzione

$$y = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Le derivate parziali di questa funzione in un *punto di coordinate* qualunque $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ (diverse da zero) sono

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+a_2^2}}\right)_{x_1=a_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=\left(\frac{x_2}{\sqrt{a_1^2+x_2^2}}\right)_{x_2=a_2}$$

cioè

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},$$

e queste formole, come si vede, si potrebbero ricavare procedendo con ambo i metodi indicati di sopra.

Ma se invece vogliamo la derivata parziale rispetto ad $x_1$ nel punto $(x_1=0, x_2=0)$, e tale derivata la ricaviamo dalla formola

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

sostituendo per le variabili i valori 0, 0, abbiamo il valore indeterminato $\frac{0}{0}$; se però procediamo col metodo indicato nella definizione, cioè poniamo prima, nella funzione, $x_2=0$, e poi nella funzione di $x_1$ così ottenuta cioè in $y=x_1$ eseguiamo la derivata rispetto ad $x_1$, si ha il valore 1, che è da considerarsi come il vero valore della derivata parziale.

---

Dobbiamo ora introdurre, anche per le funzioni di più variabili, il concetto di differenziale.

Il prodotto della derivata parziale per il differenziale della variabile $x$, cui essa si riferisce, si chiamerà *il differenziale parziale della funzione rispetto a quella variabile*. Dalle cose dette sulle unzioni di una sola variabile, si deduce che tal .ifferenziale parziale della funzione, differirà per nfinitesimi di ordine superiore dall'incremento he riceve la funzione quando $x_1$ riceve l'incre- nento $d\,x_1$.

In generale chiameremo *differenziale parziale* ispetto alle $r$ variabili $x_1\,x_2\ldots\,x_r$ la somma di utti i differenziali parziali rispetto a ciascuna va- iabile e *differenziale totale* della funzione la somma li tutti i differenziali parziali rispetto a tutte le va- iabili.

Ciò posto, possiamo dimostrare che, *quando le lerivate parziali sono delle funzioni continue di utte le variabili, il differenziale totale della fun- ione gode della proprietà fondamentale, di rap- resentare, a meno di infinitesimi di ordine supe- iore, l'incremento che riceve la funzione quando lle variabili si danno gli incrementi rappresen- ati dai proprii differenziali.*

Per semplicità consideriamo il caso di due sole ariabili $x_1\ x_2$ indipendenti, e consideriamo l'in- remento

$$\Delta f = f(x_1 + d\,x_1\ ,\ x_2 + d\,x_2) - f(x_1\,x_2)$$

lella funzione quando alle variabili si danno gli ncrementi $d\,x_1$, $d\,x_2$.

Tale differenza può scriversi

$$f(x_1 + d\,x_1\ ,\ x_2 + d\,x_2) - f(x_1\ ,\ x_2 + d\,x_2)]$$
$$+ [f(x_1\ ,\ x_2 + d\,x_2) - f(x_1\,x_2)].$$

Per il teorema del valore medio per le funzioni li una sola variabile, la quantità racchiusa nella *rima parentesi*, che è la differenza fra i valo della funzione quando si fa variare solo il primo argomento, può scriversi:

$$d\,x_1 f'_{x_1}(x_1+\theta\,d\,x_1\;,\;x_2+d\,x_2);$$

e analogamente la quantità racchiusa nella seconda parentesi può scriversi

$$d\,x_2 f'_{x_2}(x_1\;,\;x_2+\theta'\,d\,x_2)$$

Supponendo ora che *le due derivate parziali sieno delle funzioni continue di* $x_1$, $x_2$, noi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1+\theta\,d\,x_1,\;x_2+d\,x_2) &= f'_{x_1}(x_1\,x_2)+\alpha \\ f'_{x_2}(x_1\;,\;x_2+\theta'\,d\,x_2) &= f'_{x_2}(x_1\,x_2)+\beta \end{aligned}$$

dove $\alpha$, $\beta$ sono delle quantità che tendono a zero insieme con $dx_1$ $dx_2$, per modo che $\alpha\,dx_1$, $\beta\,dx_2$ sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a $dx_1$, $dx_2$.

Sostituendo, si ha

$$\Delta f=[d\,x_1 f'_{x_1}(x_1\,x_2)+d\,x_2 f'_{x_2}(x_1\,x_2)]+ \\ +\alpha\,d\,x_1+\beta\,d\,x_2,$$

la quale formola dimostra l'assunto.

Questa formola costituisce il teorema cosiddetto *del differenziale totale.*

Osserviamo che la condizione da noi posta per la sussistenza di questa formola cioè la condizione della *continuità* delle derivate parziali, rappresenta una condizione *sufficiente* ma *non* una condizione *necessaria*, potendo aversi delle funzioni per le quali questa formola sussista senza che le derivate parziali sieno delle funzioni continue. Per una raccolta di esempi su ciò si può con profitto vedere il n.º 75 e seguenti del mio libro, altre volte citato, *Note critiche di Calcolo infinitesimale,* Milano 1895.

§ 7. **Derivate e differenziali di ordine superiore per le funzioni di più variabili indipendenti. Teorema d'inversione delle derivazioni.** — Se una funzione di più variabili ammette le derivate parziali di primo ordine in tutti i punti di un campo, queste formeranno a loro volta $n$ nuove funzioni delle stesse $n$ variabili.

Potranno dunque derivarsi a loro volta, e si hanno così *le derivate parziali di secondo ordine* della funzione data.

Consideriamo per es. la derivata parziale

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}.$$

Questa la possiamo derivare parzialmente rispetto a ciascuna delle variabili e abbiamo $n$ derivate parziali di secondo ordine che indicheremo rispettivamente coi simboli:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\,\partial x_1},\ldots.$$

o anche $f''_{x_1x_2}$, $f''_{x_2x_1}$, ....

Col simbolo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\,\partial x_1} \quad \text{ovvero} \quad f''_{x_2x_1},$$

intenderemo che si debba prima fare la derivazione rispetto a $x_1$ e poi quella rispetto a $x_2$. Se invece deriviamo la $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ rispetto a $x_1$ abbiamo la derivata $f''_{x_1x_2}$ o $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2}$; ora viene subito l'idea: *c'è un legame fra* queste due derivate, le quali differiscono solo per l'ordine con cui si effettuano le due derivazioni?

Noi dimostreremo che *supposto che una di queste due derivate seconde esista finita in tutto un intorno del punto $x_1\, x_2$, e sia continua nel punto medesimo rispetto ad ambo le variabili, esisterà per quel punto anche l'altra derivata seconda, e sarà eguale alla precedente*; *in altri termini nella indicata ipotesi è arbitrario l'ordine delle due derivazioni*, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$. Questo teorema fondamentale si chiama *il teorema della inversione delle derivazioni.*

La espressione $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ è

$$\lim_{\Delta x_1 = 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1\,,\ x_2) - f(x_1\, x_2)}{\Delta x_1}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} =$$

$$\lim_{\Delta x_2 = 0} \lim_{\Delta x_1 = 0} \frac{\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1} - \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1 x_2)}{\Delta x_1}}{\Delta x_2}$$

$$=$$

$$\lim_{\Delta x_2 = 0} \lim_{\Delta x_1 = 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1 + \Delta x_1, x_2) + f(x_1 x_2)}{\Delta x_1\, \Delta x_2}$$

$$= \frac{W(x_1\, x_2)}{\Delta x_1\, x_2 \Delta}$$

indicando, per brevità, con $W(x_1\, x_2)$ il numeratore di quel rapporto, e intendendo che bisogna prima *passare* al limite per $\Delta x_1 = 0$ e poi per $\Delta x_2 = 0$.

Se invece calcoliamo $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$ si trova un'espressione eguale, ma dove però bisogna passare al limite prima per $\Delta x_2 = 0$ e poi per $\Delta x_1 = 0$. In quali casi nell'espressione di sopra sarà indifferente l'ordine dei due limiti?

Poniamo per un momento

$$V(x_1 x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1 x_2)$$

donde otteniamo

$$\begin{aligned} W(x_1 x_2) &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1 + \Delta x_1 x_2) - \\ &\qquad - f(x_1 x_2 + \Delta x_2) + f(x_1 x_2) \\ &= V(x_1 , x_2 + \Delta x_2) - V(x_1 x_2). \end{aligned}$$

Ora supposto che la $f''_{x_1 x_2}$ esista finita in tutto un intorno del punto $x_1 x_2$, la derivata prima $f'_{x_2}$ deve esistere ed essere una funzione finita e continua di $x_1$ in tutto il medesimo intorno, e quindi anche $f$ deve essere in esso una funzione continua e derivabile di $x_2$, e con derivata finita; essendo poi $V$ formata in un modo semplice mediante $f$, le medesime proprietà spetteranno ad essa, e possiamo perciò applicare ripetutamente la formola del valor medio.

Possiamo cioè scrivere:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2 + \Delta x_2) - V(x_1 x_2) &= \Delta x_2 \, V'_{x_2}(x_1, x_2 + \theta' \Delta x_2) \\ &= \Delta x_2 \, [f'_{x_2}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \theta' \Delta x_2) - f'_{x_2}(x_1 x_2 + \theta' \Delta x_2)] \\ &= \Delta x_1 \, \Delta x_2 f''_{x_1 x_2}(x_1 + \theta \Delta x_1 , x_2 + \theta' \Delta x_2). \end{aligned}$$

Se ora supponiamo ancora che $f''_{x_1 x_2}$ sia una funzione continua di ambo le variabili $x_1 x_2$, si avrà

$$f''_{x_1 x_2}(x_1 + \theta \Delta x_1 , x_2 + \theta' \Delta x_2) = f''_{x_1 x_2}(x_1 x_2) + \omega,$$

essendo $\omega$ un infinitesimo per $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$ e quindi

$$\frac{W(x_1 x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2} = f''_{x_1 x_2}(x_1 x_2) + \omega.$$

Intanto abbiamo già di sopra osservato che se nell'espressione

$$\frac{W(x_1 x_2)}{\Delta x_1 \Delta x_2}$$

passiamo *prima* al limite per $\Delta x_1 = 0$ e *poi* per $\Delta x_2 = 0$ otteniamo la derivata $f'_{x_1 x_2}(x_1 x_2)$, e se invece passiamo *prima* al limite per $\Delta x_2 = 0$ e *poi* per $\Delta x_1 = 0$ otteniamo $f'_{x_1 x_2}(x_1 x_2)$, mentre il secondo membro della formola superiore sia nell'uno che nell'altro caso riceve sempre il valore e $f'_{x_1 x_2}(x_1 x_2)$, perchè stante la supposta continuità di $f''$ rispetto ad ambedue le variabili, $\omega$ va a zero in qualunque modo si passi al limite. Passando dunque al limite *prima* per $\Delta x_1 = 0$ e *poi* per $\Delta x_2 = 0$ si ha

$$f''_{x_2 x_1}(x_1 x_2) = f''_{x_1 x_2}(x_1 x_2)$$

come si volea dimostrare.

Al solito osserviamo che le condizioni poste nell'enunciato teorema sono *sufficienti*, ma non *necessarie.*

Alcuni esempii molto istruttivi su questo importante teorema si possono trovare nelle citate *Note critiche di Calcolo infinitesimale* (n.º 79 e seg.)

Vogliamo dare un esempio di funzione per la quale non sussiste il teorema della inversione dalle derivazioni.

Si consideri la funzione

$$f(x_1 x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2^2 + x_2^2}.$$

la quale è determinata e continua in ogni punto $(x_1\, x_2)$; il suo valore riesce indeterminato solo nel punto $x_1 = x_2 = 0$; ma noi assegniamo in tal punto alla funzione il valore *zero*. È facile vedere che allora essa riesce anche *continua* nel punto (0, 0).

Infatti segniamo un quadrato avente per punto medio il punto 0, coi lati paralleli agli assi e di lunghezza eguale a $2\sigma$, e consideriamo un qualunque punto interno a tale quadrato; per esso o la $x_1$ sarà minore di $x_2$ o sarà maggiore; ma ambedue saranno sempre minori in valore assoluto di $\sigma$. Se $x_1 < x_2$, il rapporto $\frac{x_1^2}{x_2^2}$ sarà compreso fra 0 e 1, e quindi scrivendo la funzione data sotto la forma equivalente

$$f(x_1\, x_2) = x_1\, x_2 \frac{\frac{x_1^2}{x_2^2} - 1}{\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1}$$

si riconosce che per tal punto la $f(x_1 x_2)$ è sempre in valore assoluto minore di $2\sigma^2$, perchè il massimo valore che può acquistare $\frac{x_1^2}{x_2^2} - 1$ è 2, e il minimo che può acquistare $\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1$ è 1. Se invece $x_2 < x_1$, scrivendo la funzione sotto l'altra forma equivalente

$$f(x_1\, x_2) = x_1\, x_2 \frac{1 - \frac{x_2^2}{x_1^2}}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}}.$$

*si giungerà ad* un analogo risultato.

Potendosi dunque trovare un intorno del punto (0, 0), per ogni punto del quale la funzione è sempre in valore assoluto minore di $2\sigma^2$ che possiamo rendere piccolo a piacere, si deduce che il limite della funzione per $x_1=0$, $x_2=0$ è zero, e perciò la funzione è continua.

Le derivate parziali di tale funzione sono

$$f'_{x_1} = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2^2 + x_2^2} + 4\, x_2 \frac{x_1^2\, x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$f'_{x_2} = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - 4\, x_1 \frac{x_1^2\, x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

in un punto $(x_1\ x_2)$ qualunque; mentre che nel punto (0, 0) esse sono eguali a zero, come risulta direttamente applicando la definizione. Tali derivate sono perciò, come è facile riconoscere, anch'esse continue nel punto origine e in qualunque altro punto.

Passiamo ora alle derivate seconde. Formiamo $f''_{x_2\, x_1}$ ponendo prima $x_1=0$ in $f'_{x_1}$ poi derivando rispetto a $x_2$, e poi ponendo $x_2=0$. Si ha $f''_{x_2\, x_1} = -1$; e analogamente, calcolando invece $f''_{x_1\, x_2}$ si trova $f''_{x_1\, x_2} = +1$; onde *le due derivate seconde sono fra loro disuguali.*

La derivata seconda $f''_{x_2\, x_1}$, per un qualunque punto $(x_1\ x_2)$, diverso dal punto (0, 0), è

$$f''_{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + 8\, x_1^2\, x_2^2 \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

e questa funzione *non è continua* nel punto (0, 0). Se al punto (0, 0) ci si avvicina nella direzione dell'asse di $x_1$, il limite della funzione è $+1$, mentre è $-2$ se ci si avvicina nella direzione dell' asse $x_2$.

Nello stesso modo come abbiamo formate le derivate parziali seconde, possiamo formare le derivate parziali terze, quarte, ecc.

Per queste si adopererà sempre la solita notazione

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \, \partial x_2}, \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \, \partial x_2}, \quad \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^2}. \quad \text{etc.}$$

dove il denominatore indica rispetto a quali variabili si è fatta la derivazione e quante volte si è derivato rispetto a ciascuna di esse.

Il teorema della inversione delle derivazioni si può naturalmente generalizzare per le derivate di ordine $k^{mo}$; possiamo cioè sempre dire che, se sono soddisfatte delle condizioni di continuità per la funzione e per le derivate, il valore di una derivata parziale di ordine $k^{mo}$ rispetto a $k$ variabili eguali o diverse, è indipendente dal modo col quale si fanno procedere le derivazioni; è per es.:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^\alpha \, \partial x_2^\beta \, \partial x_3^\gamma \ldots} = \frac{\partial^k f}{\partial x_3^\gamma \, \partial x_2^{\beta-1} \, \partial x_1^\alpha \, \partial x_2 \ldots}.$$

---

Passiamo ora ai differenziali di ordine superiore delle funzioni di più variabili indipendenti.

Dobbiamo qui ripetere considerazioni assai simili a quelle svolte per le funzioni di una sola variabile.

Noi possiamo intendere che per ogni punto $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ si sieno assegnati in modo arbitrario *i differenziali* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, e allora il differenziale totale di primo ordine

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial x_n$$

ha un valore determinato per ogni punto del campo; esso può dunque considerarsi a sua volta come funzione di $x_1 x_2 \ldots x_n$ e se ne può, colla solita regola, trovare il differenziale totale. Supposto che la funzione $f$ sia di quelle per le quali valga, senza eccezione, il teorema della inversione delle derivazioni, si ha:

$$\begin{aligned}
d(dy) = d^2 y = &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial_2} dx_2 + \ldots \right.\\
&\left. + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial (dx_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial (dx_2)}{\partial x_1} + \ldots \right] dx_1\\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \ldots \right.\\
&\left. + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial (dx_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial (dx_2)}{\partial x_2} + \ldots \right] dx_2\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots\\
+ 2 \frac{d^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & dx_1 \, dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \, dx_3 + \ldots\\
+ \left[\frac{\partial (dx_1)}{\partial x_1} dx_1 \right. & \left. + \frac{\partial (dx_1)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \right] \frac{\partial f}{\partial x_1} +\\
+ \left[\frac{\partial (dx_2)}{\partial x_1} dx_1 \right. & \left. + \frac{\partial (dx_2)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \right] \frac{\partial f}{\partial x_2} +\\
+ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dove le quantità contenute nelle parentesi delle ultime righe sono rispettivamente i differenziali totali delle quantità $dx_1 \; dx_2 \ldots dx_n$, e potrebbero perciò *indicarsi* con

$$d^2 x_1, d^2 x_2, \ldots, d^2 x_n.$$

Se scegliamo i differenziali $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ funzioni costanti, cioè per ogni punto del campo diamo ad essi sempre lo stesso valore, il che lo possiamo fare perchè le variabili sono indipendenti, l'espressione del differenziale di 2° ordine di $y$ resta semplificata perchè $d^2 x_1 = 0$, $d^2 x_2 = 0 \ldots d^2 x_n = 0$; e resta

$$d^2 y = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots$$

di cui la legge di formazione è evidente.

Si può adoperare un comodo simbolo per rappresentare il secondo membro.

Se formiamo la potenza seconda di

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)$$

e se i quadrati e i prodotti di $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{df}{dx_n}$ li interpretiamo, anzichè come veri quadrati, come derivate seconde di $f$, cioè nello sviluppo, in luogo di

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right)^2$$

poniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2}$$

e in luogo di

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

poniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s},$$

lo sviluppo di quel quadrato risulta esattamente il secondo membro del differenziale totale di 2° ordine; possiamo perciò scrivere

$$d^2 y = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n\right)\right)^2,$$

dove la doppia parentesi sta ad indicare che quel quadrato non è un vero quadrato, ma solo un quadrato simbolico.

Si intende di qui, per induzione, che il differenziale $r^{mo}$ di $y$ lo possiamo scrivere simbolicamente

$$d^r y = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n\right)\right)^r,$$

quando però si assumano i differenziali $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ costanti per tutti i punti del campo.

§ 8. **Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili dipendenti. Funzioni composte. Teorema del valore medio per le funzioni di più variabili indipendenti.** — Si abbia una funzione $y$ delle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ le quali non sieno fra loro indipendenti, ma siano a loro volta funzioni di una variabile unica $x$; la $y$ si chiamerà funzione di $x$ *composta* per mezzo delle funzioni $x_1 x_2 \dots x_n$.

Sarebbe facile dimostrare che *se $y$ è funzione continua di $x_1 x_2 \dots x_n$ e queste sono funzioni continue di $x$, anche $y$ è funzione continua di $x$.*

Possiamo inoltre far vedere che *se $y$ è funzione derivabile di $x_1 x_2 \dots x_n$ e queste sono funzioni derivabili di $x$, anche $y$ è funzione derivabile di $x$,* e il problema che ci proponiamo è naturalmente quello di trovare le formole per le derivate della funzione $y$ di $x$.

Diamo ad $x$ un incremento arbitrario $\Delta x$ o $dx$; allora le funzioni $x_1 x_2 \ldots x_n$ avranno certi aumenti che potremo chiamare $\Delta x_1$, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ coi quali incrementi la $y$ riceverà un incremento $\Delta y$. Gli incrementi che ricevono $x_1 x_2 \ldots x_n$ non sono arbitrari perchè dipendono dall' incremento che riceve $x$, il quale incremento solo è arbitrario.

Considerando $y$ come funzione delle variabili $x_1 x_2 \ldots, x_n$, alle quali si diano gli incrementi $dx_1$, $dx_2 \ldots dx_n$ e *supposto che le derivate di $y$ sieno funzioni continue*, l'incremento $\Delta y$ (v. § 6 Cap. II, è dato da

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d x_n + \omega$$

essendo $\omega$ una quantità infinitesima di ordine superiore rispetto agli infinitesimi $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Questa formola vale qualunque sieno gli incrementi $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$; prendendo in particolare tali incrementi eguali rispettivamente agli incrementi $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ che le funzioni $x_1 x_2 \ldots x_n$ ricevono quando ad $x$ si dà l'incremento arbitrario $\Delta x$, si ha la formola

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n + \omega$$

donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{\Delta x} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \frac{\Delta x_n}{\partial x} + \frac{\omega}{\Delta x}.$$

Facciamo ora tendere $\Delta x$ a zero; supposto che le funzioni $x_1 \ldots x_n$ abbiano *derivata determinata e finita*, gli incrementi $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$ tenderanno anche a zero, e i rapporti di essi con $\Delta x$ tenderanno a delle quantità determinate *diverse da infinito* (che sono le supposte derivate finite delle funzioni $x_1$ $x_2 \ldots x_n$ ); di qui intanto risulta che $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$ sono infinitesimi o dello stesso ordine o di ordine superiore a quello dell' infinitesimo $\Delta x$, ed essendo perciò $\omega$ un infinitesimo di ordine certamente superiore all'infinitesimo $\Delta x$ (perchè è già di ordine superiore a quello degli infinitesimi $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$) il rapporto $\frac{\omega}{\Delta x}$ tenderà a zero.

Passando al limite per $\Delta x = 0$ si ha quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}$$

che è *la formola della derivata di una funzione composta.* Con ciò resta anche dimostrato quello che abbiamo asserito che cioè *y é funzione derivabile di x.*

Questa formola ha una grande generalità e da essa potremo ricavare come casi particolari le derivate di certe speciali e semplici funzioni composte di cui abbiamo già trattato nel Cap. II, § 2.

Per es. noi già conosciamo la regola per formare la derivata del quoziente di due funzioni di $x$, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$; ora questa regola la possiamo subito ricavare dal teorema sopradetto.

Poniamo infatti $\varphi_1(x) = x_1$ $\varphi_2(x) = x_2$, e consideriamo la funzione

$$y = \frac{x_1}{x_2},$$

delle due variabili $x_1, x_2$ le quali a loro volta sono funzioni di $x$.

Si ha

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{1}{x_2}\;,\quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{x_2^2}$$

e quindi, applicando il teorema di sopra, si ha:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x_2}\frac{dx_1}{dx}-\frac{x_1}{x_2^2}\frac{dx_2}{dx}=\frac{x_2\frac{dx_1}{dx}-x_1\frac{dx_2}{dx}}{x_2^2}=$$
$$=\frac{\varphi_2(x)\,\varphi_1'(x)-\varphi_1(x)\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)},$$

che dà appunto la nota regola di derivazione di un quoziente.

---

Un'altra applicazione del teorema della derivata delle funzioni composte può ritenersi quella che si fa per trovare la formola per la derivata di un determinante, i cui elementi sieno delle funzioni derivabili di una variabile $x$.

*La derivata di un determinante di ordine n, è la somma di n determinanti ognuno dei quali si ottiene dal dato sostituendo a tutti gli elementi di ciascuna linea (o di ciascuna colonna) le rispettive derivate.*

Si abbia, in effetti, il determinante

$$U=\begin{vmatrix} y_{11} \cdots\cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1} \cdots\cdots y_{nn}\end{vmatrix}$$

dove le $y$ sieno delle funzioni di $x$.

Prima di tutto è evidente, ricordando lo sviluppo *di un determinante*, che *la derivata di* U rispetto *ad un suo elemento è eguale al complemento algebrico di quell'elemento,* che cioè in generale

$$\frac{\partial U}{\partial y_{rs}} = U_{rs},$$

se con $U_{rs}$ si indica il *complemento algebrico* dell'elemento $y_{rs}$.

Applicando allora il teorema delle funzioni composte possiamo scrivere

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{r,s} \frac{\partial U}{\partial y_{rs}} \frac{d y_{rs}}{dx} = \sum_{r,s} U_{rs} \frac{d y_{rs}}{dx} = \sum_{r} \left[ \sum_{s} U_{rs} \frac{d y_{rs}}{dx} \right]$$

e la quantità in parentesi è il determinante dato quando in luogo degli elementi della $r^{ma}$ linea si sostituiscono le derivate degli elementi stessi. Con ciò il teorema è dimostrato.

---

In quanto ai differenziali totali delle funzioni composte abbiamo da osservare ciò che segue.

Dalle stesse considerazioni sopra sviluppate si ricava che il differenziale di primo ordine si esprime colla stessa formola con cui si esprimerebbe se le variabili non fossero dipendenti; ma non è più lo stesso per i differenziali di ordine superiore.

Ed infatti noi non potremo più in generale, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, considerare come costanti gli incrementi di $x_1 x_2 \ldots x_n$; giacchè dando a $x$ un incremento $\Delta x$ costante e indipendente dal valore $x$ che si considera, gli incrementi che ricevono le funzioni $x_1 \ldots x_n$ non saranno in generale delle quantità costanti, indipendenti cioè dal valore di $x$; e quindi neanche costanti saranno i differenziali; così per es. il differenziale di $x_1$ sarà eguale a $\frac{dx_1}{dx}dx$, e per quanto $dx$ può supporsi costante, pure non potrà supporsi che in generale anche la derivata $\frac{dx_1}{dx}$ sia costante cioè indipendente da $x$. Non si può più quindi, come nel paragrafo precedente, dare per il differenziale di 2° ordine di $y$ una formola nella quale non entrino i differenziali secondi delle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$; la formola per il differenziale di 2° ordine e di ordine superiore di una funzione composta, sarà perciò quella che risulta facendo gli stessi calcoli che nel paragrafo precedente, ma senza potere introdurre più la semplificazione di considerare come costanti i differenziali di $x_1 \ldots x_n$.

Vi è un caso però in cui, pure essendo $x_1 \ldots x_n$ funzioni di $x$, nondimeno i loro differenziali possono prendersi per costanti, ed è quando $x_1 \ldots x_n$ sieno funzioni *lineari* di $x$, cioè:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + b_1 \\ x_2 &= a_2 x + b_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= a_n x + b_n. \end{aligned}$$

Prendendo allora costante il differenziale $dx$ della variabile indipendente, i differenziali $dx_1 \ldots dx_n$ risultano eguali a

$$a_1 dx, \quad a_2 dx, \ldots, a_n dx,$$

e quindi anche costanti. In questo caso è chiaro anche che i differenziali coincidono esattamente cogli incrementi (vedi Cap. II, § 5), e che le formole per i differenziali di ordine superiore per le funzioni di variabili indipendenti e per le funzioni composte possono fra loro coincidere.

---

Passiamo ora alla formola generale per la derivata di ordine $r^{mo}$ di una funzione composta.

Deriviamo rispetto ad $x$ ambo i membri della formola

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}.$$

Poichè il secondo membro è in generale una nuova funzione composta così noi dobbiamo riapplicare al secondo membro il teorema delle funzioni composte, e perciò bisognerà *supporre che le derivate parziali del secondo membro rispetto a $x_1 x_2 \ldots, x_n$ sieno funzioni continue*, condizione che resterà soddisfatta se noi supponiamo che *le derivate parziali seconde di $y$ sieno continue.*

*Sotto queste ipotesi* si ha, effettuando il calcolo:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} = &\left[\frac{\partial y^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}\left(\frac{dx_n}{dx}\right)^2\right] + \\ &\left[+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{dx_1}{dx}\frac{dx_2}{dx} + \ldots\ldots\ldots\right] \\ &+ \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{d^2 x_1}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{d^2 x_n}{dx^2}\right]\end{aligned}$$

e se noi supponiamo che si verifichi quel caso di cui abbiamo parlato, cioè che $x_1 x_2 \ldots x_2$ sieno funzioni *lineari* di $x$, evidentemente sparisce la *seconda* parte di questa formola e resta solo la prima parte che può scriversi simbolicamente

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d x} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d x}\right)\right)^2$$

intendendo, come altra volta (v. Cap. II, § 7), che nello sviluppo della potenza simbolica si sostituiscano ai quadrati e ai prodotti delle derivate parziali prime di $y$, le corrispondenti derivate parziali seconde.

Si vede così che la formola generale per la derivata $r^{ma}$ della funzione composta *nel caso che le* $x_1 x_2 \dots$ *sieno funzioni lineari di* $x$, *e che le derivate parziali* $r^{me}$ *di* $y$ *rispetto a* $x_1 x_2 \dots$ *sieno funzioni continue*, è simbolicamente espressa da

$$\frac{d^r y}{d x^r}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d x} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d x}\right)\right)^r.$$

---

Passiamo ora a generalizzare per le funzioni di più variabili *indipendenti* il teorema del valor medio già dimostrato per le funzioni di una sola variabile.

Per fissare le idee supponiamo due variabili sole.

Le variabili $x_1, x_2$ sieno fra loro indipendenti; a noi conviene però renderle per un momento dipendenti. La funzione $y = f(x_1 x_2)$ sia definita in tutti i punti di una certa area piana $A$, e sieno

$$\begin{matrix} a_1 & , & a_2 \\ a_1 + h_1 & , & a_1 + h_2 \end{matrix}$$

le *coordinate* di due punti di questa area.

Scegliamo $x_1$ $x_2$ funzioni di una nuova variabile $x$, e formiamo queste funzioni in tal maniera che per $x = x_0$ si abbia $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, e per $x = x_0 + h$ si abbia $x_1 = a_1 + h_1$, $x_2 = a_2 + h_2$ e che inoltre per tutti i valori di $x$ compresi fra $x_0$. $x_0 + h$, le $x_1$ $x_2$ sieno sempre comprese rispettivamente fra $a_1$, $a_1 + h_1$, e $a_2$, $a_2 + h_2$

Geometricamente ciò corrisponde alla seguente costruzione. Segniamo il rettangolo coi vertici $a_1$, $a_2$, $a_1 + h_1$, $a_2 + h_2$, e segniamo, *tutta interna a questo rettangolo*, una linea che parta dal primo vertice $(a_1\ a_2)$ e vada al vertice opposto; le coordinate $x_1$ $x_2$ di un punto di tale linea si esprimeranno in funzione di un parametro $x$, e le funzioni che le rappresentano godranno appunto delle indicate proprietà.

In particolare, invece di una qualunque linea, scegliamo propriamente la retta diagonale. Allora $x_1$, $x_2$ potranno esprimersi come funzioni *lineari* del parametro $x$ e saranno

$$x_1 = a_1 + x h_1$$
$$x_2 = a_2 + x h_2 ,$$

le quali per

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = 1$$

danno le coordinate dei due vertici opposti del rettangolo. In questo modo è dunque $x_0 = 0$, $h = 1$. La funzione $y$ resterà una funzione di una variabile sola $x$, e chiamandola $F(x)$, e, *supposto che la funzione data sia derivabile rispetto alle due variabili* $x_1$ $x_2$, la $F(x)$ sarà derivabile rispetto alla *variabile* $x$, e quindi ad essa potremo applicare il noto teorema del valore medio; si ha così

$$F(x_0+h)-F(x_0)=h\,F'(x_0+\theta h)$$
$$(\theta \text{ compreso fra } 0 \text{ e } 1)$$

donde, mutando i simboli e applicando il teorema della derivata delle funzioni composte, per applicare il quale noi supporremo ancora che *le derivate parziali di f sieno funzioni continue,* si ha:

$$f(a_1+h_1\ ,\ a_2+h_2)-f(a,a_2)=$$
$$=h\left[f'_{x_1}(a_1+\theta h_1\ ,\ a_2+\theta h_2)\frac{dx_1}{dx}+\right.$$
$$\left.+f'_{x_2}(a_1+\theta h_1\ ,\ a_2+\theta h_2)\frac{dx_2}{dx}\right]_{x=x_0+\theta h}$$

osservando che il punto cui corrisponde il parametro

$$x_0+\theta h$$

ha per coordinate

$$a_1+\theta h_1,\quad a_2+\theta h_2.$$

Ponendo ora per $x_1, x_2$ le funzioni lineari di sopra, facendo $h=1$ e osservando che

$$\frac{dx_1}{dx},\quad \frac{dx_2}{dx}$$

sono rispettivamente eguali, nel nostro caso, ad $h_1$, $h_2$ si ha

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=$$
$$=h_1 f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_2 h_2)+h_2 f'_{x_2}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_2 h_2)$$

che è la formola che volevamo trovare. Da essa è *scomparsa,* come si vede, ogni traccia della variabile $x$, che ci è servita solo come **ausiliaria** per la dimostrazione.

È utile far notare che per ottener questa formola si è supposta *la continuità delle derivate di $f$*, cosa che non era necessaria nel caso delle funzioni di una sola variabile.

Del risultato ottenuto possiamo ricavare una conseguenza interessante ed elementare analoga a un'altra trovata per le funzioni di una variabile.

*Se in un certo campo le derivate parziali della funzione sono zero in qualunque punto, la funzione è costante per tutti i punti del campo;* infatti, nelle ipotesi fatte, per ogni valore di $h_1\, h_2$ si ha sempre

$$f(a_1+h_1\ ,\ a_2+h_2)=f(a_1\, a_2)$$

§ 9. **Calcolo delle derivate delle funzioni implicite di una o più variabili.** — Abbiamo già detto a suo luogo che cosa si intenda per funzione implicita (v. Cap, I, § 2).

Uno dei modi per giungere al concetto di una tale funzione è il seguente:

Immaginiamo una funzione della due variabili $x$ e $y$ e poniamola eguale a zero: si ha ciò che si chiama un'*equazione:*

$$f(x\, y)=0$$

Questa equazione sia soddisfatta da una coppia di valori $x_0\, y_0$; io dico che *sotto certe condizioni sulla natura della funzione $f$, si può trovare sempre un intervallo finito attorno il punto $x_0$ tale che in tutti i punti di* esso sia definita, per mezzo *di quella equazione, una funzione $y$ di $x$, la quale diventi $y_0$ per $x = x_0$.*

Supponiamo che la funzione $f$ sia una *funzione derivabile rispetto alle due variabili* (e quindi anche continua) in tutto un intorno del punto $x_0\, y_0$, p. es., nel rettangolo in cui i vertici sono

$$x_0 \pm h_0\,, \quad y_0 \pm k_0\,,$$

che *le due derivate parziali $f'_x$, $f'_y$ sieno funzioni finite e continue, e che $f'_y$ non possa mai diventare zero in tutto il rettangolo*; applicando la formola del valore medio trovata nel § precedente. e chiamando

$$x_0 + h, \quad y_0 + k \qquad (h \leqq h_0\,, k \geqq k_0\,)$$

le coordinate di un punto qualunque del rettangolo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h,\, y_0 + k) - f(x_0\, y_0\,) = \\ & = h f'_x\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) + k f'_y\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) \end{aligned}$$

ed essendo per ipotesi

$$f(x_0\, y_0\,) = 0$$

si ha

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h,\, y_0 + k) = \\ & = h f'_x\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) + k f'_y\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k). \end{aligned}$$

Per le ipotesi stabilite sulle derivate di $f$, è chiaro che esisteranno due quantità finite $A$, $B$ tali che per qualunque punto del rettangolo sia sempre

$$\begin{aligned} f'_x &< A \\ f'_y &> B. \end{aligned}$$

Fissato ora un valore per $k$, è chiaro che si potrà sempre scegliere un $h$ così piccolo che sia

$$hA < kB$$

$\left(\text{basterà prendere } h < \frac{kB}{A}\right)$ e quindi che per qualunque punto del rettangolo sia in valore assoluto

$$hf'_x < kf'_y\,,$$

*e questa disuguaglianza sia soddisfatta per un $h$ e per ogni altro $h$ minore di esso;* nella espressione

$$hf'_x + kf'_y$$

per tali $h, k$ prevarrà perciò il segno del secondo termine. Non potendo ora, per le ipotesi fatte, $f'_y$ cangiare di segno, perchè altrimenti, a causa della supposta sua continuità, dovrebbe passare per zero, il segno di $kf'_y$ dipenderà dal segno di $k$. Se dunque lasciamo fisso $h$ e mutiamo il segno a $k$, muterà di segno la espressione

$$hf'_x + kf'_y$$

e quindi anche

$$f(x_0 + h, y_0 + k).$$

Perciò tale funzione, *per quel determinato $h$, e per tutti gli altri $h$ minori di esso,* col variare di $k$ passerà per il valore zero; cioè *dato un qualunque $h$ minore della quantità $\frac{kB}{A} = h_1$, vi sarà sempre, fra $-k$, e $+k$, compreso un valore $k'$ per cui quella funzione* si annulla; ciò significa che dato un qualunque valore $x\ (= x_0 + h)$ compreso fra $x_0 - h_1$ e $x_0 + h_1$, vi sarà sempre un $y = y_0 + k'$ tale che

$$f(x\,y) = 0.$$

Possiamo dimostrare che di tali $y$ non ve ne potrà essere che uno solo; perchè se ve ne fossero due, fra essi, in forza del teorema di Rolle, vi dovrebbe essere un valore di $y$ per cui la derivata di $f$ considerata come funzione della sola $y$, dovrebbe essere zero, e invece noi abbiamo supposto che $f'_y$ non si annulla mai.

Con ciò resta dimostrato il teorema enunciato.

Dimostriamo ora che *la funzione $y$ di $x$ così ottenuta è una funzione derivabile* (*e quindi anche continua*).

Supponiamo trovata una coppia di valori di $h'$ e $k'$ per cui sia

$$f(x_0 + h', y_0 + k') = 0;$$

sarà anche

$$h' f'_x (x_0 + \theta h', y_0 + \theta' k') + k' f'_y (x_0 + \theta h', y_0 + \theta' k') = 0$$

donde

$$\frac{k'}{h'} = -\frac{f'_x (x_0 + \theta h', y_0 + \theta' k')}{f'_y (x_0 + \theta h', y_0 + \theta' k')}.$$

Se $h'$ converge a zero, $k'$ non può che convergere a zero, perchè se convergesse ad una quantità $k_1$ sarebbe

$$f(x_0, y_0) = 0$$
$$f(x_0, y_0 + k_1) = 0$$

e quindi fra i due valori $y_0$, $y_0 + k_1$ vi dovrebbe essere un valore per cui $f'_y$ si annulla (per il teorema di ROLLE), e ciò è contro l'ipotesi.

E poichè $h'$, $k'$ sono gli incrementi di $x$, $y$, possiamo perciò dire che la funzione $y$ è continua; facendo poi convergere a zero tali incrementi, si vede che il loro rapporto converge a

$$-\frac{f'_x(x_0\, y_0)}{f'_y(x_0\, y_0)},$$

essendo, per ipotesi, continue le $f'_x$ e $f'_y$; ciò dimostra che *esiste la derivata di* $y$ *rispetto ad* $x$, ed è data dalla formola:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

A questa formola possiamo giungere anche per altra via, *dopo però che abbiamo già dimostrato che tale derivata esiste.*

Immaginiamo infatti di sostituire in

$$f(x\, y)$$

in luogo di $y$ il suo valore in funzione di $x$; siccome tal valore è ricavato proprio da $f(x\, y) = 0$, così si otterrà una funzione di $x$ il cui valore è certamente zero per tutti i punti $x$ pei quali si può definire la funzione $y$. Perciò la derivata di tale funzione di $x$ sarà zero; deriviamo allora la $f(x\, y)$ immaginando che questa sia una funzione composta delle due funzioni di $x$, cioè $x$ e $y$. Per il teorema delle funzioni composte si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y}{d x},$$

che noi porremo eguale a zero per le cose sopradette; di qui si ha la formola già scritta.

Da questa formola appare che noi possiamo trovare il valore della derivata della *funzione implicita* senza trovare prima effettivamente la forma *esplicita* della funzione; tal derivata verrà però in generale espressa non in funzione di $x$ sola, ma per mezzo di $x$ e $y$ contemporaneamente, per modo che se si volesse la derivata in funzione solo di $x$, bisognerebbe intendere che $y$ si sostituisca coll'espressione che si ricava risolvendo la equazione. Si vede così che il problema della risoluzione di $f(x\,y) = 0$ può essere *posposto* a quello della ricerca della derivata di $y$, il che in molti casi è sufficiente agli scopi della quistione che si sta trattando.

Un fatto analogo accade per le funzioni inverse (v. Cap. II, § 2) in cui si può trovare il valore della derivata indipendentemente dalla effettiva inversione analitica della funzione, inversione che potrebbe essere praticamente difficile o impossibile.

Per le derivate di ordine superiore della funzione implicita non c'è che adoperare sempre il medesimo principio che ci ha servito per la ricerca della prima derivata.

La espressione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d y}{d x}$$

è una funzione di due funzioni di $x$ che sono la $y$ e la $x$ stessa, ed è costantemente zero per ogni valore di $x$ compreso fra certi limiti (che sono quelli pei quali resta definita la funzione implicita). Derivando ancora rispetto ad $x$ si ha perciò anche zero; e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}=0$$

donde

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

Per la determinazione della funzione implicita noi abbiamo cominciato col considerare un punto $x_0\, y_0$ pel quale $f(x\, y)$ si annullava, e tale che in un suo intorno $\frac{\partial f}{\partial y}$ non si annullava mai; ora se $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annulla in un punto prossimo al punto $x_0\, y_0$ è chiaro che l'ultima condizione potrà sempre soddisfarsi, considerando un intorno del punto $x_0\, y_0$ che escluda quel tale punto.

Ma se $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annulla proprio nel punto $x_0\, y_0$, allora non potrà più soddisfarsi la condizione detta; e d'altra parte in quel caso la formola per la derivata avendo il denominatore zero, dà per valore l'infinito almenochè non sia zero anche il numeratore $\frac{\partial f}{\partial x}$.

*Si domanda* ora: si può anche nel caso in cui è

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ nel punto $x_0\, y_0$, determinare una funzione $y$ di $x$ la quali diventi $y_0$ per $x=x_0$?

Senza addentrarci in ulteriori dimostrazioni, che ci porterebbero troppo lontano dai limiti impostici in questo volume, noi diciamo solo che nel caso di cui si parla, colla $f(x\,y)=0$ si possono definire non *una* ma *due* funzioni $y$ di $x$ le quali diventino $y_0$ per $x=x_0$; può però anche accadere che tali due funzioni *reali* non esistano.

Se la $f(x\,y)$ è una funzione algebrica razionale e la equazione $f(x\,y)=0$ si rappresenta geometricamente mediante una curva del piano, come si fa in Geometria analitica, il caso in esame corrisponde al fatto geometrico che quella curva ha nel punto di coordinate $x_0\ y_0$ un cosidetto *punto doppio,* il quale potrà essere anche un *punto doppio isolato.*

Nel caso in cui le due funzioni di cui si parla esistono, le loro derivate prime si possono determinare colla formola

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{d\,y}{d\,x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2=0$$

cui si riduce allora la relazione da cui abbiamo, nel caso generale, ricavata la derivata seconda della funzione. Questa relazione è una equazione di $2^{\circ}$ grado in $\frac{d\,y}{d\,x}$, e darà perciò due valori per le due derivate delle funzioni; se tali due valori sono immaginarii, le due funzioni non esistono *nel campo delle* quantità reali.

Geometricamente i due valori per le derivate di $y$ rispetto ad $x$ corrispondono alle due tangenti nel punto doppio ai due rami della curva che si intersecano nel punto doppio stesso.

---

Dobbiamo ora passare alle funzioni implicite di più variabili.

Il modo più semplice per definirle è il seguente. Immaginiamo una funzione di tre variabili

$$f(x\,y\,z)$$

e eguagliamola a zero.

Anche qui potrebbe farsi vedere, in modo analogo a quello sopra tenuto, che *sotto certe condizioni per la natura di $f$, se la relazione $f=0$ è soddisfatta da una terna di valori*

$$x = x_0\,, \qquad y = y_0\,, \qquad z = z_0\,,$$

si può trovare un intorno dal punto del piano di coordinate $x_0\,y_0$, tale che in esso la variabile $z$ possa definirsi come funzione delle due variabili $x$, $y$.

Non crediamo però di addentrarci in queste considerazioni che del resto non sarebbero nel fondo molto dissimili da quelle già sviluppate. Vogliamo solo dire qualche cosa sul calcolo delle derivate parziali di una tal funzione.

Se in

$$f(x\,y\,z)$$

in luogo di $z$ si immagina posta l'espressione di *quella funzione* di $x, y$ che si ricava da $f(x\,y\,z)=0$

risolvendo questa equazione rispetto a $z$, si deve evidentemente ottenere una funzione di $x$, $y$ che è costantemente zero per tutti i valori di $x$ e $y$ pei quali è definita la funzione implicita; e allora saranno certamente zero le due derivate parziali rispetto a $x$ e $y$, cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

di qui si ricaverebbero i valori di

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

In modo analogo si procederebbe in ogni altro caso più complicato.

§ 10. **Proprietà di funzioni di più variabili rispetto alle loro derivate parziali. Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.** — Una funzione di piu variabili si dice *omogenea* rispetto a queste variabili quando gode delle proprietà che sostituendo in luogo delle variabili

$$x, y, z, \ldots,$$

le espressioni

$$t x, t y, t z \ldots,$$

cioè moltiplicando tutte le variabili per una indeterminata $t$, la funzione così modificata è eguale all'antica moltiplicata per una potenza di $t$, cioè che

(1) $$f(t x, t y, \ldots)=t^r f(x y \ldots).$$

Il numero $r$ si chiama *grado di omogeneità*. P. es. la funzione

$$\frac{x^3 - 5\,y^3 + 2\sqrt{x^6 + y^6}}{\sqrt{x - y}}$$

è una funzione omogenea di grado $^5/_2$ delle due variabili $x$, $y$.

Le funzioni *omogenee* soddisfanno ad una proprietà loro caratteristica che costituisce il cosidetto *teorema di* Eulero.

*Si formino le derivate parziali della funzione rispetto alle sue variabili, e si faccia la somma dei prodotti di tali derivate per le variabiti rispettive; tale somma è eguale alla funzione stessa moltiplicata per il suo grado di omogeneità; si ha cioè la formola*

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\,y + \ldots . = r\,f\,(x\,y\,\ldots).$$

Noi dimostreremo che questa proprietà è *caratteristica* per le funzioni omogenee, cioè che le eguaglianze (1), (2), si equivalgono perfettamente.

Deriviamo la (1) rispetto a $t$ considerando come costanti le altre variabili.

Si ha

$$\frac{\partial f(t\,x, t\,y, \ldots)}{\partial\,(t\,x)}\,\frac{d\,(t\,x)}{d\,t} + \frac{\partial f(t\,x, t\,y, \ldots)}{d\,(t\,y)}\,\frac{d\,(t\,y)}{d\,t} + \ldots$$
$$= r\,t^{r-1} f\,(x\,y\,\ldots).$$

Osserviamo ora che

$$\frac{d\,(t\,x)}{d\,t} = x, \qquad \frac{d\,(t\,y)}{d\,t} = y, \ldots$$

e inoltre che dovendo la (1) sussistere indipendentemente dal valore di $t$, cioè per qualunque $t$, questa formola dovrà anche sussistere per qualunque $t$, e quindi potrà in essa porsi anche $t = 1$.

Così facendo si ottiene esattamente la (2).

Vediamo ora viceversa come della (2) si possa passare alla (1).

Consideriamo la funzione di $t$ formata nel seguente modo

$$F(t) = \frac{f(t\,x\,, t\,y\,,\ldots)}{t^r}$$

e facciamone la derivata rispetto a $t$. Si ha

$$F'(t) = \frac{1}{t^{r+1}}\left\{\left(\frac{\partial f(t\,x\,, t\,y\,,\ldots)}{\partial(t\,x)}\,x + \frac{\partial f(t\,x\,, t\,y\,,\ldots)}{\partial(t\,y)}\,y + \ldots\right)t \right.$$
$$\left. - r\,f(t\,x\,, t\,y\,,\ldots)\right\}.$$

Osserviamo intanto che se sussiste la (2) identicamente cioè qualunque sieno i valori di $x, y, \ldots$, essa sussisterà anche quando in luogo di $x, y, \ldots$ si pongono $t\,x, t\,y, \ldots$. cioè sussisterà anche identicamente la relazione:

$$t\left(\frac{d\,f(t\,x\,,\ldots)}{d\,(t\,x)}\,x + \ldots\right) = r\,f(t\,x\,,\ldots)$$

e quindi, come conseguenza della (2), si ha che il numeratore di $F'(t)$ è identicamente zero per qualunque valore di $t$, e perciò la funzione $F(t)$ è costante; il suo valore è dunque eguale a quello che da essa si ottiene ponendo $t = 1$, cioè

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, \ldots)}{t^r} = F(1) = \frac{f(x, y, \ldots)}{1},$$

donde si ricava senz'altro la (1).

Resta con ciò dimostrato che *le* (1) *e* (2) *si equivalgono perfettamente.*

Passiamo ora a mostrare che *le derivate prime, seconde, etc. di una funzione omogenea di grado $r$ sono anche funzioni omogenee, e di gradi rispettivamente $r-1$, $r-2$, ....*

Derivando infatti la (1) rispetto a $x$ si ha

$$\frac{\partial f(tx, ty, \ldots)}{\partial (tx)} \frac{d(tx)}{dx} = t^r \frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial x}$$

ed essendo

$$\frac{d(tx)}{dx} = t$$

si ha

$$\frac{\partial f(tx, ty, \ldots)}{\partial (tx)} = t^{r-1} \frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial x}$$

la quale formola dimostra il nostro assunto in quanto alle derivate prime. Osservando poi che le derivate seconde sono le derivate prime delle derivate prime, si deduce che esse sono funzioni omogenee di grado $r-2$, e così di seguito.

In conseguenza di questo teorema si può riapplicare al primo membro di (2), lo stesso teorema d'Eulero, e facilmente si vede che, raccogliendo i termini simili, *si ha la formola*

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x y + \ldots = r(r-1) f.$$

Analogamente riapplicando $k$ volte di seguito lo stesso teorema *si ha in generale*

$$\left(\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots\right)\right)^{k}=r\,.(r-1)\ldots(r-k+1)f,$$

dove col simbolo del primo membro si intende al solito che bisogna formare la potenza $k^{ma}$ di quel polinomio, e sostituirvi poi, in luogo dei prodotti e delle potenze $k^{me}$ delle derivate, le corrispondenti derivate $k^{me}$, nello stesso modo che, per altra occasione, abbiamo fatto nel § 7 di questo Capitolo.

# CAPITOLO III.

## Sviluppabilità in serie delle funzioni.

§ 1. **Generalizzazione del teorema del valor medio per le funzioni di una o di più variabili. Formole di Lagrange e di Cauchy.** — Abbiamo visto che, ammettendo che una funzione di una variabile $f(x)$ abbia derivata in tutto un intervallo da $a = x_0$ sino a $b = x_0 + h$, la espressione

$$\Omega = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

si esprime mediante la derivata prima della funzione $f$ in un punto compreso nell' intervallo da $a$ a $b$.

Vogliamo ora generalizzare questo teorema e dimostrare che *se la $f$ ammette nell' intervallo le derivate sino a quella di ordine $n$* (il che porta poi con sè la condizione che le derivate sino a quelle di ordine $n-1$, sieno anche *continue*), *e se essa e le sue derivate sono finite, la espressione,*

$$\Omega = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(a)}{(b-a)^p}$$

***si esprime mediante la derivata n^ma^ in un punto compreso nell'intervallo da a a b.***

Consideriamo infatti la funzione (¹)

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) -$$
$$- \ldots\ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{n-1!}f^{n-1}(x) - (b-x)^p\,\Omega\,,$$

la quale per le ipotesi fatte, sarà finita e continua in tutto l'intervallo, e sarà anche derivabile. Essa inoltre si annulla negli estremi dell'intervallo; quindi per il teorema di ROLLE, vi sarà un punto nell'intervallo in cui la prima derivata di $\varphi$ sarà zero; ma

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{n-1!}f^n(x) + p\,(b-x)^{p-1}\,\Omega\,,$$

adunque, indicando al solito con

$$x_0 + \theta h = a + \theta(b-a) \qquad 0 < \theta < 1$$

il punto di cui si parla, compreso nell'intervallo, si ha

$$0 = \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{n-1!}f^n\Big(a+\theta(b-a)\Big) -$$
$$- p\,(b-a)^{p-1}(1-\theta)^{p-1}\,\Omega,$$

donde ricaviamo il valore di $\Omega$,

$$\Omega = \frac{(b-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\,(n-1)!}f^n(a+\theta(b-a)).$$

---

(¹) **È facile riconoscere in che modo è formata questa funzione. Essa si forma liberando dal denominatore la formola della $\Omega$, trasportando indi tutti i termini al secondo membro, e ponendo in questo dappertutto $x$ in luogo di $a$.**

colla quale formola resta dimostrato il teorema enunciato.

Sostituendo questo valore di $\Omega$ nella formola superiore e ponendo in luogo di $a$, $b$ le quantità $x_0$, $x_0 + h$, si ha la formola notevole

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \\ + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{n-1!\,p} f^n(x_0 + \theta h),$$

per giungere alla quale abbiamo dovuto supporre che la funzione e tutte le sue derivate sino a quella di ordine $n$-1 sieno finite in tutto l'intervallo, altrimenti non si sarebbe potuto applicare il teorema di Rolle e accertare l'esistenza del numero $\theta$. Ciò non toglie però che una formola simile possa in casi speciali sussistere anche senza fare questa supposizione,

Il numero $p$ nella formola superiore può avere un valore qualunque; poniamo in particolare $p = n$, e $p = 1$, e otterremo due formole che considereremo come *le formole fondamentali di questa teoria*. Esse sono:

$$(1)\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0) + \\ + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + \theta h)$$

$$(2)\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n-1!} f^{n-1}(x_0) + \\ + \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{n-1!} f^n(x_0 + \theta h)$$

La prima formola si dice di LAGRANGE, e la seconda di CAUCHY.

Notiamo che sul numero $\theta$ che compare in queste formole noi non possiamo dire altro se non che è un numero compreso fra 0 e 1. Il suo valore dipende dall'indice $n$, dal valore di $h$, dalla natura della funzione, e, se si tratti della formola fondamentale donde abbiamo ricavato le (1), (2), il valore di $\theta$ dipende naturalmente anche dal valore di $p$; poichè le formole (1), (2) si sono ottenute assegnando a $p$ due valori diversi, così è chiaro che il $\theta$ della formola (1) ha in generale un valore diverso del $\theta$ della formola (2).

In quanto al numero $\theta$, noi ci contenteremo di sapere che esso esiste sempre e che il suo valore è sempre compreso fra zero e uno.

---

Insieme alle due formole che abbiamo sopra ricavato ne dobbiamo, ricavare alcune altre che hanno però minore importanza.

Sieno $f(x)$, $F(x)$ due funzioni aventi derivata determinata in un intervallo $x_0$, $x_0+h$, e la derivata di $F$ non sia mai zero in tutto l'intervallo $(x_0, x_0+h)$; formiamo l'altra funzione

$$\varphi(x)=f(x_0+h)-f(x)-$$
$$-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}\Big[F(x_0+h)-F(x)\Big],$$

linearmente mediante le due date, e che si annulla per $x=x_0$ e $x=x_0+h$; pel teorema di ROLLE, fra *tali due estremi vi sarà almeno* un punto $x_0+\theta h$

in cui la prima derivata di $\varphi(x)$ si annulla. Formando tale prima derivata, ponendo poi per $x$ il valore $x_0 + \theta h$, e eguagliando a zero, si ha:

$$-f'(x_0 + \theta h) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} F'(x_0 + \theta h) = 0$$

donde, essendo $F'$ diversa da zero,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

Così *il rapporto degli incrementi delle due funzioni resta espresso per mezzo del rapporto delle derivate.* In questa formola il $\theta$ che comparisce al numeratore del secondo membro, è eguale a quello del denominatore.

Mediante il teorema del valor medio applicato alle due funzioni $f$ e $F$ separatamente si potrebbe ottenere una formola simile a quella adesso ottenuta per altra via, ma non potrebbe poi conchiudersi l'eguaglianza dei due valori di $\theta$.

Se ora supponiamo che *le due funzioni si annullino nel punto $x_0$, abbiamo la formola*:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}$$

*e se poi in generale supponiamo che le derivate prime, le derivate seconde, ecc., $n - 1^{me}$ soddisfino sempre alle stesse condizioni cui abbiamo supposto soddisfare $f$ e $F$, possiamo scrivere, applicando ripetutamente la stessa formola*:

$$\frac{x_0 + h)}{x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)} = \frac{f''(x_0 + \theta_1 h)}{F''(x_0 + \theta_1 h)} = \dots =$$
$$= \frac{f^n(x_0 + \theta_{n-1} h)}{F^n(x_0 + \theta_{n-1} h)}$$

e è

$$1 > \theta > \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_{n-1}.$$

---

assiamo ora alla generalizzazione del *teorema valor medio* per le funzioni di più variabili, Cap. II, § 8) e per ciò bisogna riprendere le siderazioni fatte nel luogo citato.

i abbia la funzione di due variabili $x_1\, x_2, f(x_1\, x_2)$, voglia ricercare il valore di $f(a_1 + h_1\, , a_2 + h_2)$ 'unzione delle derivate di $f$ sino a quelle di or- e $n$, con una formola analoga a quella data ra per le funzioni di una sola variabile.

oniamo $x_1$, $x_2$ funzioni lineari di una nuova iabile $x$, e propriamente

$$x_1 = a_1 + h_1 x$$
$$x_2 = a_2 + h_2 x,$$

uali funzioni sono tali che per $x = 0$ danno

$$x_1 = a_1 \quad , \quad x_2 = a_2$$

er $x = 1$ danno

$$x_1 = a_1 + h_1 \quad , \quad x_2 = a_2 + h_2,$$

er $x$ compreso fra 0 e 1 danno $x_1$, $x_2$ compresi i valori estremi sopra segnati.

a funzione data diventa allora una funzione di *variabile* sola, $F(x)$, cui può applicarsi ciascuna delle due formole di **Lagrange** e di **Cauchy**, e si ha

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{1}{n-1!} F^{n-1}(0) +$$

dove $R_n$ può avere una delle due forme

$$R_n = \frac{1}{n!} F^n(\theta) \qquad \text{(Lagrange)}$$

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{n-1!} F^n(\theta) \qquad \text{(Cauchy)}.$$

Per la validità di questa formola è necessario che *esistano le derivate rispetto ad $x$ sino a quella di ordine $n$ in tutto l'intervallo da 0 a 1; e quindi anche che sieno continue tali derivate sino a quella di ordine $n-1$; inoltre che la funzione e le derivate sino a quella di ordine $n-1$ sieno finite*; queste condizioni sono soddisfatte *se noi le supponiamo per la funzione data di due variabili e per le sue derivate parziali sino a quelle di ordine $n$.*

Per ridurci ora alla formola definitiva dobbiamo introdurre le variabili primitive $x_1$, $x_2$; e perciò dobbiamo esprimere le $F'$ $F''$.... mediante le derivate parziali della funzione $f(x_1\, x_2)$ data.

Essendo $x_1$, $x_2$ funzioni *lineari* di $x$ possiamo applicare la formola trovata al Cap. II, § 8, per la derivata di ordine $r$ della funzione composta, supposto che *le derivate parziali sino a quelle di ordine $n$ sieno funzioni continue.*

Si ha così *simbolicamente*:

$$F^r(0) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\right)^r_{\substack{x_1=a_1\\ x_2=a_2}}$$

e quindi infine la formola

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1 a_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\right)^2_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2}} + \cdots\cdots\cdots + $$

$$+ \frac{1}{n-1!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\right)^{n-1}_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2}} + R_n$$

essendo

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\right)^n_{\substack{x_1=a_1+\theta h_1 \\ x_2=a_2+\theta h_2}}$$

ovvero

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{n-1!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2\right)\right)^n_{\substack{x_1=a_1+\theta h_1 \\ x_2=a_2+\theta h_2}}.$$

Il significato di queste potenze simboliche ci è già conosciuto per quanto abbiamo detto al Cap. II, § 8.

§ 2. **Formola di Taylor-Maclaurin. — Condizione necessaria e sufficiente per la sua validità.** — Supponiamo che la funzione $f(x)$ abbia le derivate di qualunque ordine, ed essa e le sue derivate sieno sempre finite in un intervallo da $x_0$ a $x_0+h$.

Potremo applicare le formole sviluppate nel § precedente per un qualunque indice $n$. Consideriamo la serie di infiniti termini

$$f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h^r}{r!} f^r(x_0)$$

*e studiamo* la convergenza di questa serie ordinata secondo le potenze intere positive di $h$, e il suo valore.

La somma dei primi $n$ termini di tale serie cioè

$$\sum_{r=o}^{n-1} \frac{h^r}{r!} f^r(x_o)$$

differisce dal valore di $f(x_o + h)$, per la quantità

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x_o + \theta h)$$

ovvero

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{n-1!} f^n(x_o + \theta h).$$

*Se quindi la quantità $R_n$ col tendere di $n$ all'infinito, tende a zero, noi possiamo asserire che la serie di cui si parla è convergente e il suo valore è esattamente $f(x_o + h)$.*

*Se invece $R_n$ per $n = \infty$ tende ad una quantità determinata $R_\infty$ diversa da zero, noi possiamo asserire che il valore di $f(x_o + h)$ è eguale al valore di quella serie più la quantità $R_\infty$, e quindi anche che quella serie è convergente.*

*Se finalmente $R_n$ non tende ad alcun limite finito per $n = \infty$, la serie sarà divergente, o indeterminata.*

Come si vede dunque la convergenza della serie

$$\sum_{r=o}^{\infty} \frac{h^r}{r!} f^r(x_o) = \lim_{n=\infty} \sum_{r=o}^{n-1} \frac{h^r}{r!} f^r(x_o)$$

è intimamente legata colla natura della quantità $R_n$, *e la serie sarà o no convergente secondochè $R_n$ tende o no ad un limite finito.*

Questa serie si chiama *la serie di* TAYLOR-MACLAURIN; propriamente si usa chiamare serie di TAYLOR quella generale, e serie di MACLAURIN quella corrispondente al caso particolare in cui sia $x_0 = 0$; ma fra le due formole non c'è una differenza di sostanza, ma solo di forma.

Quando la serie è convergente e il limite di $R_n$ è zero, allora il suo valore è proprio il valore della funzione nel punto $x = x_0 + h$; abbiamo così *una espressione di tal valore mediante una serie di potenze, ordinata secondo le potenze intere positive di* $h$, *cioè di* $(x - x_0)$.

Si presenta ora naturalmente qui la quistione: data una funzione e un punto $x_0$; può svilupparsi in serie il valore della funzione nell'intorno del punto $x_0$?

Prima di tutto sarà necessario che la funzione nell'intorno di $x_0$ ammetta le derivate di tutti gli ordini. Inoltre che *in tutto l'intervallo sia la funzione che le sue derivate siano sempre finite*. Questa condizione ci si presenta come necessaria per lo speciale metodo di dimostrazione che abbiamo tenuto, perchè in fondo il teorema del *valor medio*, sia semplice, sia generalizzato, lo abbiamo fatto dipendere dal teorema di ROLLE il quale non può più applicarsi quando la funzione diventa infinita nell'intervallo (v. Cap. II, § 4).

Supposto che la funzione e le sue derivate di indice finito sieno sempre finite nell'intervallo, possono accadere questi casi: o che il limite della derivata $n^{ma}$ per $n = \infty$ sia infinito per uno o più punti dell'intervallo, ovvero che $f^n(x)$ per qualunque $x$ *dell'intervallo* e per qualunque $n$ si mantenga sempre inferiore in valore assoluto ad un numero finito $A$. Dimostriamo che *se si verifica quest'ultimo caso la funzione è sviluppabile secondo la formola di* TAYLOR; *cioè certamente il limite di $R_n$ è zero.* Consideriamo infatti l'espressione di LAGRANGE

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n (x_0 + \theta h)$$

e osserviamo che qualunque sia il valore ignoto di $\theta$, la $f^n$ è sempre minore di $A$ in valore assoluto, onde

$$| R_n | < \frac{h^n}{n!} A.$$

Ma

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0 \qquad \text{(v. Cap. I, § 11)},$$

dunque il limite di $R_n$ è zero.

Nell'altro caso dobbiamo ricercare se il limite di $R_n$ è zero. Ora $R_n$ dipende dalla quantità $\theta$ su cui noi non possiamo dire altro se non che è un numero compreso fra 0 e 1; il suo valore non lo conosciamo in funzione di tutte le quantità da cui esso dipende. In generale quindi non si presenta agevole il riconoscere se la funzione può svilupparsi in serie di TAYLOR.

L'idea che viene allora spontanea è di trasformare il criterio $\lim R_n = 0$ in un altro che sia indipendente dalla conoscenza del valore di $\theta$. Questo passo è stato fatto dal signor PRINGSHEIM. Egli ha trovato che la condizione *necessaria e sufficiente per la sviluppabilità* della funzione in *serie di* TAYLOR *in tutto un intorno da $x_0$ a $x_0 + k$ è che il resto sotto la forma di* CAUCHY *cioè*

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{n-1\,!} f^n (x_0 + \theta h)$$

*considerato come funzione delle due variabili $h$ e $\theta$ sia convergente a zero in ugual grado*; cioè che, dato $\sigma$ piccolo a piacere, si possa sempre trovare un indice $m$ in modo che per ogni $n > m$, $R_n$ sia minore di $\sigma$ qualunque sia il valore di $\theta$ compreso fra 0 e 1, e qualunque sia il valore di $h$ minore di $k$. Questo teorema è molto interessante, ma la sua dimostrazione ci porterebbe troppo lontano dal piano propostoci in queste lezioni. Per chi desiderasse maggiori particolari rimandiamo alla estesa trattazione fattane nei num. 83 e seguenti delle citate mie: *Note critiche di Calcolo infinitesimale,* Milano 1895.

Solo vogliamo osservare che con questo teorema ci appare sotto nuova luce la condizione da noi posta che cioè *la funzione e tutte le sue derivate di indice finito debbano essere finite in qualunque punto dell'intervallo*, condizione che eravamo stati costretti a porre per la necessità del metodo di dimostrazione, come a suo tempo abbiamo osservato (v. p. 159).

*Ora quella condizione ci appare come assolutamente necessaria per la sussistenza della formola di* TAYLOR. Perchè se in un punto qualunque dell'intervallo fosse infinita la derivata $m^{ma}$ della funzione, supposto che in tutto l'intervallo esistano le derivate di qualunque ordine della funzione, e *quindi che esse sieno continue*, tutte le derivate di ordine maggiore di $m$ dovranno anche essere infinite in quel punto. In tal caso dato $\sigma$, e ponendo in $R_n$ per $\theta$ quello speciale valore, corrispondente al punto in cui $f^m$ diventa infinita, per un qualunque $n > m$, $R_n$ non sarà minore di $\sigma$, e quindi non è applicabile la formola di TAYLOR.

Possiamo dare una forma più caratteristica alla formola di TAYLOR, ponendo $x_0 + h = x$, donde $h = x - x_0$; allora si ha

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

che rappresenta una serie ordinata secondo le potenze di $(x - x_0)$. *Se questo sviluppo di $f(x)$ vale per un certo valore di $x$, rappresenterà, per le cose dette, il valore della funzione in ogni altro $x$ compreso fra il primitivo e $x_0$; si può in certo modo dire che allora in tutto un intervallo la funzione resta espressa come un polinomio in $x$ di grado infinito.*

---

Colla formola di TAYLOR noi abbiamo lo sviluppo di una funzione in serie secondo le potenze ascendenti intere della variabile, sviluppo valido in un certo campo.

Ora è utile far vedere che non esiste un altro sviluppo simile della funzione e che sia diverso da quello che risulta dalla formola di TAYLOR, e valido nel medesimo campo.

Se infatti si suppone che nello stesso campo la funzione sia sviluppabile nella serie

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

si può dimostrare che i coefficienti di questa serie sono quelli stessi che compaiono nella serie di TAYLOR.

Il campo di validità di ambo le serie di potenze sarà un certo campo attorno il punto zero, (v. Cap. I, § 7).

Poniamo quindi $x = 0$, e abbiamo che il coefficiente $A_0$ non è altro che il valore della funzione nel punto zero, cioè

$$A_0 = f(0).$$

Formiamo ora la derivata della funzione data. Essendo essa sviluppata in una *serie di potenze* si sa (v. Cap, II, § 2) che si può applicare la derivazione per serie; si ha perciò

$$f'(x) = A_1 + 2 A_2 x + \dots$$

e per $x = 0$ si ha

$$A_1 = f'(0).$$

Cosi continuando, resta dimostrato il nostro assunto.

---

In quanto alle serie di TAYLOR per le funzioni di più variabili non ci resta, appoggiandosi sulle cose dette nel § precedente che ripetere, con convenienti e facili modificazioni, le medesime considerazioni generali fatte per le funzioni di una sola variabile; ecco perchè ci sembra inutile spendervi su altre parole.

**§ 3. Applicazione della formola di Taylor-Maclaurin.** — *La formola* di TAYLOR-MACLAURIN può applicarsi allo sviluppo in serie delle principali funzioni che si presentano nell'Analisi.

1. Se lo sviluppo di Taylor si applica ad una funzione razionale intera, evidentemente, essendo tutte zero le derivate di ordine superiore ad $n$ se $n$ è il grado della funzione, non si potrà avere uno sviluppo con un numero indefinito di termini, ma si otterranno al massimo $n+1$ termini, cioè si avrà un polinomio di grado $n$ ordinato secondo le potenze di $x$, se lo sviluppo si riferisce al punto $x=0$.

Se poi si applica lo sviluppo riferendolo ad un punto $x=a$ qualunque, allora si ha anche, per le stesse ragioni, un numero *finito* di termini, ma si ha uno sviluppo della funzione ordinato secondo le potenze intere positive di $(x-a)$.

Il primo termine di un tale sviluppo è $f(a)$ e quindi si ha

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,Q$$

chiamando $Q$ l'assieme di tutti i termini, in numero finito, che moltiplicano $(x-a)$.

Di qui si deduce il teorema noto di Algebra che: *dividendo un polinomio $f(x)$ per il binomio $x-a$ il resto della divisione è $f(a)$.*

2. Se lo sviluppo di Taylor si applica ad una funzione algebrica della forma

$$f(x)=(1+x)^m$$

dove $m$ è una quantità positiva o negativa, razionale o irrazionale, si ottiene uno sviluppo in serie di questa funzione che coincide collo sviluppo che si otterrebbe applicando la formola del binomio di Newton. Si ha la cosidetta serie binomiale.

Applichiamo lo sviluppo di TAYLOR riferendolo al punto $x=0$. Essendo

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x)=m.(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

si ha

$$f(0)=1, f'(0)=m, \ldots f^n(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

ed inoltre $R_n$ sotto la forma di CAUCHY è:

$$R_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}m.(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

Cominciamo col considerare la espressione

$$u_n=\frac{m.m-1\ldots m-n+1}{n-1!}x^n.$$

Questa può considerarsi come il termine generale di una serie i cui termini si otterrebbero facendo variare l'indice $n$. Una tal serie è convergente per qualunque $m$ se $x$ è minore di 1 in valore assoluto, perchè in essa il rapporto di un termine al precedente è

$$\frac{m-n}{n}x$$

che per $n=\infty$ tende ad $x<1$; di qui deduciamo che, *se* $|x|<1$, *il limite di* $u_n$ *è zero.*

*Se poi è* $x=\pm 1$ *allora si può far vedere che, se* $m$ *è positivo, la espressione* $u_n$ *tende anche a zero.*

Infatti in tal caso, a meno del segno, la $u_n$ può scriversi

$$|u_n|=m\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-1}\right).$$

Immaginiamo che il primo numero intero positivo maggiore di $m$ sia $r$. Allora la $u_n$ può scriversi

$$m\left(1-\frac{m}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{r-1}\right)\left(1-\frac{m}{r}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)$$

dove tutti i fattori a cominciare da $\left(1-\frac{m}{r}\right)$ in poi, sono tutti minori di 1 (se $m$ è positivo) e quindi il loro prodotto sarà minore di 1 anche per $n=\infty$. Dunque il limite di $u_n$ non può essere maggiore della quantità finita

$$m\left(1-\frac{m}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{r-1}\right).$$

Possiamo dimostrare che tende a zero; infatti possiamo scrivere

$$1-\frac{m}{r}=\frac{1-\frac{m^2}{r^2}}{1+\frac{m}{r}}<\frac{1}{1+\frac{m}{r}}$$

quindi

$$\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{m}{r+1}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-1}\right)<$$

$$<\frac{1}{\left(1+\frac{m}{r}\right)\left(1+\frac{m}{r+1}\right)\ldots\left(1+\frac{m}{n-1}\right)}.$$

Ma

$$\left(1+\frac{m}{r}\right)\ldots\left(1+\frac{m}{n-1}\right)>\frac{m}{r}+\frac{m}{r+1}+\ldots+\frac{m}{n-1}$$

$$>m\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

e la espressione in parentesi per $n = \infty$ tende a infinito, come si sa dall'Algebra, dunque

$$\left(1 - \frac{m}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{m}{n-1}\right)$$

tende a zero.

Consideriamo ora similmente il rapporto $\frac{u_n}{n}$.

Esso evidentemente tende a zero in tutti i casi già considerati. Dico che *tende anche a zero se* $x = \pm 1$ *e* $m + 1$ *è positivo*. Infatti in tal caso esso può scriversi

$$\pm \frac{u_n}{n} = \frac{m}{1}\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\left(1 - \frac{m+1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)$$

e ripetendo su questa espressione il ragionamento fatto sopra, si ricava appunto che *se* $m + 1$ *e positivo, essa tende a zero.*

Ciò premesso, scriviamo $R_n$ sotto la forma

$$(1 + \theta x)^{m-1} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^{n-1} u_n$$

e osserviamo che, per $|x| \leq 1$,

$$\left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^{n-1}$$

non può crescere indefinitivamente perchè il denominatore non è mai minore del numeratore.

Giovandoci quindi dei risultati ottenuti per $u_n$, possiamo dire che $R_n$ *tende a zero, se* $m$ *è qualunque positivo o negativo, e* $x$ *è in valore assoluto minore di 1, ovvero* $m$ *è* positivo e $x = \pm 1$.

*Concludiamo* perciò che *in* questi casi lo so-

*luppo di* TAYLOR

$$(1+x)^m = 1 + (m)_1\, x + (m)_2\, x^2 + \ldots;$$

*è valido.* Il secondo membro di questa formola è la cosiddetta *serie binomiale.*

Per considerare un altro caso in cui la serie binomiale converge, consideriamo l'altra forma del resto (la forma di LAGRANGE),

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\, m\,.\,(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

$$= \frac{1}{n}\, u_n\,(1+\theta x)^{m-n}.$$

*Se $x$ è eguale a $+1$, e $m+1$ è positivo,* evidentemente, per le cose dette, *questo $R_n$ converge a zero,* perchè $(1+\theta x)$ in tal caso è maggiore dell'unità, e $\frac{u_n}{n}$ converge a zero. Dunque *un altro caso in cui lo sviluppo di* TAYLOR *applicato alla funzione $(1+x)^m$ è valido, e quindi in cui è convergente la serie binomiale, si ha quando $x=+1$, e $m+1$ è positivo.*

Si hanno così tutti i casi nei quali la serie binomiale è convergente.

3. Passiamo ora alla *serie esponenziale.* Si abbia la funzione $e^x$. Tutte le derivate di questa funzione sono rappresentate dalla funzione stessa, e per $x=0$ si riducono ad 1. Il resto è dato da (sotto la forma di LAGRANGE)

$$\frac{x^n}{n!}\, e^{\theta x}$$

che converge a zero per qualunque valore di $\theta$ e di $x$, perchè $e^{\theta x}$ è sempre finito per $x$ finito. Onde *per qualunque valore di $x$ si ha la serie*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

che è la *serie esponenziale* da noi già studiata (v. Cap. I, § 11).

Se si tratti di

$$f(x) = a^x ,$$

potendo allora scrivere

$$a^x = e^{x \log a}$$

*si ha*

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 \log^2 a}{2!} + \dots$$

4. Si vogliano sviluppare in serie le funzioni *seno* e *coseno*. Le derivate successive sono, come sappiamo, rappresentate sempre dalle stesse funzioni seno o coseno, le quali restano sempre finite, e in valore assoluto non possono superare il valore 1.

Per un teorema del § precedente (v. pag. 160) possiamo allora dire che sarà senz'altro applicabile lo sviluppo di TAYLOR.

Per la funzione *seno*, avendosi per espressione delle derivate successive

$$\cos x, \quad -\operatorname{sen} x, \quad -\cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos x \dots$$

che per $x = 0$ hanno rispettivamente i valori

$$1, \; 0, \; -1, \; 0, \; +1, \dots$$

si ha lo sviluppo in serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \dots$$

e per la funzione coseno si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots;$$

queste serie si chiamano *le serie goniometriche.*

5. Si consideri ora la funzione

$$f(x) = \log(1 + x).$$

Le derivate successive di questa funzione sono

$$f'(x) = \quad + \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \quad - \frac{1!}{(1+x)^2}$$

. . . . . . . . . . . .

$$f^n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Il resto $R_n$ avrà per espressione (sotto la forma di Cauchy)

$$(-1)^{n-1} \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

È facile riconoscere che per ogni $|x| < 1$ questa espressione converge a zero per $n = \infty$, perchè $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n+1}$ non può, come sopra, crescere oltre *ogni limite*, $\frac{1}{1+\theta x}$, per un determinato $x$, minore ad

1 in valore assoluto, si manterrà sempre non maggiore di 1 se $x$ è positivo, e non maggiore di $\frac{1}{1-|x|}$, se $x$ è negativo, e d'altra parte per $|x|<1$, $x^n$ tende a zero.

Se poi $x=+1$, ricorrendo alla forma del resto di LAGRANGE, che è per il caso nostro:

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^n},$$

e, quindi per $x=+1$:

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+\theta)^n},$$

appare immediatamente la sua convergenza a zero, non potendo $\frac{1}{(1+\theta)^n}$ crescere indefinitivamente qualunque sia il variare di $\theta$, compreso fra 0 e 1.

Invece per $x=-1$ *non* si può dimostrare la convergenza a zero del resto.

Dunque *lo sviluppo di* TAYLOR *sarà applicabile alla funzione logaritmica* $log\,(1+x)$ *in tutto un campo attorno il punto zero esteso dal punto* $-1$ *al punto* $+1$ *escluso però l'estremo inferiore del campo.* Del resto in tal punto $x=-1$, la funzione stessa diventa infinita.

La serie cosi ottenuta

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

si dice *serie logaritmica.*

Per $x=1$ si ha la cosidetta *serie armonica*

$$log\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

Mutando il segno ad $x$ si ha

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

donde

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x} =$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

6. Consideriamo ora lo sviluppo della funzione *arc tg x*; la serie che si ottiene si chiama ***serie ciclometrica.***

Formiamo prima di tutto l'espressione generale della derivata $n^{ma}$ della funzione

$$y = f(x) = \operatorname{arc\,tg} x.$$

La prima derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

La seconda derivata è eguale a

$$f''(x) = y'\left[-\operatorname{sen} y \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= y' \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = (\cos y)^2 \operatorname{sen} 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Analogamente si troverebbe per la terza derivata

$$f'''(x) = 2!\,(\cos y)^3 \operatorname{sen} 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

in generale

$$f^n(x) = (n-1)!\,(\cos y)^n \operatorname{sen} n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen} n\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Potremmo ottenere invece una espressione tutta algebrica in $x$, e libera dalle funzioni trascendenti; ma allora si avrebbe una formola nella quale non è facile riconoscere la legge generale di formazione.

Per $x = 0$, *arc tg* $x = 0$ e quindi

$$f^n(x) = 0 \qquad \text{(se } n \text{ è pari)}$$

$$f^n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)! \qquad \text{(se } n \text{ è dispari)}.$$

La espressione di $R_n$ è (sotto forma di LAGRANGE)

$$R_n = \frac{x^n}{n(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen} n\left(\operatorname{arc\,tg} \theta x + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'ultimo fattore essendo un *seno* è sempre in valore assoluto non maggiore di 1, per qualunque valore di $\theta$; e il fattore

$$\left[\frac{x^2}{1+\theta^2 x^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

non può, per ogni $x^2 \leq 1$, superare il valore 1, per qualunque $\theta$ compreso fra 0 e 1, e qualunque $n$.

Il resto $R_n$ tenderà dunque a zero per $n = \infty$ perchè a zero tende il fattore $\frac{1}{n}$, e lo sviluppo

Taylor sarà convergente in un campo di var bità di $x$ che si estende da $x = -1$ sino a $x =$

Si ottiene così la serie

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Poniamo $x = 1$ e si ha

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

colla qual serie si potrebbe calcolare il va i d$\pi$; questa serie è però troppo poco rapidam convergente, e per avere un valore assai app simato della sua somma bisognerebbe calcol: moltissimi termini. Si possono invece trovare serie per calcolare assai più facilmente il valo: $\pi$, che è, come si sa, $\pi = 3.14159265\dots\dots$

# CAPITOLO IV.

## Studio dei diversi modi di variare di una funzione nelle vicinanze di un punto.

§ 1. **Funzioni crescenti e funzioni decrescenti in un punto.** — La considerazione delle derivate di una funzione in un punto si presta per studiare il comportarsi della funzione in un punto, cioè le relazioni di grandezze che hanno fra loro i diversi valori della funzione nelle vicinanze di un punto.

Una prima considerazione che ci si presenta è la seguente: Consideriamo il valore della funzione in un punto $x_0$, $f(x_0)$, e i valori che la stessa funzione acquista in due punti prossimi al punto $x_0$, l'uno a sinistra e l'altro a destra; cioè nei punti $x_0 - h, x_0 + h$, dove $h$ sia arbitrariamente piccolo.

Può accadere che $f(x_0 - h)$ sia minore di $f(x_0)$, il quale a sua volta sia minore di $f(x_0 + h)$, e che queste relazione di disuguaglianza si conservino comunque impiccolendo la quantità $h$. In tal caso si dirà che la funzione cresce quando cresce la variabile, cioè che nel punto $x_0$ la funzione è *crescente.*

*Esprimendoci in* formole, diremo che la funzione è *crescente* quando esiste un $h$ tale che per e per ogni altro $h$ minore, si hanno contem neamente le due disuguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x_0 - h) - f(x_0) < 0 \\ f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \end{cases}$$

e diremo invece che la funzione è *decres* quando sussistono le altre disuguaglianze

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x_0 - h) - f(x_0) > 0 \\ f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 \end{cases}.$$

Cerchiamo ora di trasformare questi crit altri che siano indipendenti dalla quantità $h$ vidiamo la prima delle (1) per $-h$ e la sec per $+h$, e il criterio (1) si può allora evidenter trasformare in quest'altro: *che il rapporto*

$$\frac{f(x_0 \pm h) - f(x_0)}{\pm h}$$

*deve avere sempre un valore positivo qualu sia il segno di h, e per quanto piccolo sia cominciare da un certo valore di h in poi.*

Facendo convergere quindi $h$ a zero, poic limite di quel rapporto è la derivata a destr sinistra nel punto $x_0$, e poichè il limite di quantità che si conserva sempre positiva, no essere negaivo, si vede che: *perchè la fun sia crescente nel punto $x_0$ è necessario c prima sua derivata non abbia un valore neg in $x = x_0$*, e: *perchè la funzione sia decres nel punto $x_0$ è necessario che la sua prima der non abbia un valore positivo nel punto $x =$*

Possiamo anche dire: se la derivata è pc *a funzione è crescente; se la derivata è negativa a funzione è decrescente.*

Se si tratti di una funzione che ammetta una rappresentazione geometrica mediante un ramo di curva è facile vedere che significato ha la condizione trovata.

Chiamiamo direzione positiva della tangente ad una curva quella nella quale vogliamo intendere che la curva resti percorsa da un punto mobile su di essa; e intendiamo poi che il ramo di curva si percorra nel senso nel quale crescono positivamente le ascisse dei suoi vari punti.

Ciò fissato, è facile vedere che, se nel punto $x_0$ la tangente *non* è parallela all'asse delle $x$, cioè se escludiamo il caso in cui la derivata in $x_0$ sia zero, l'ordinata della curva sarà crescente in $x_0$, o, come si dice, il ramo della curva sarà *ascendente*, se la direzione positiva della tangente fa colla direzione positiva dell'asse di $x$, un angolo acuto, e il ramo della curva sarà invece *discendente* se la direzione positiva della tangente fa un angolo ottuso colla direzione positiva dell'asse di $x$.

Resta ora ad esaminare il caso in cui la derivata prima della funzione sia zero nel punto $x_0$.

Supponiamo che si tratti di una funzione per la quale esistano e sieno finite le derivate sino ad un certo ordine $n$. Applicando la formola del valor medio (v. Cap. III, § 1) alla differenza

$$f(x_0+h)-f(x_0),$$

possiamo scrivere, supposto che sia $f'(x_0)=0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h),$$

e perchè la funzione sia crescente o decrescente è necessario che il primo membro cambii di segno col mutare il segno di $h$, e quindi, poichè $h^2$ ha segno costante, è necessario che $f''(x_0 + \theta h)$ muti segno col mutare il segno di $h$, e perciò, essendo per ipotesi $f''(x)$ una funzione continua (perchè abbiamo supposto che esistano $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, ecc.) *è necessario che* $f''(x)$ *sia zero nel punto* $x_0$. Se questo non si verifica non sarà possibile che la funzione sia crescente o decrescente in $x_0$.

Per porci allora da un punto di vista generale immaginiamo che in $x_0$ sieno zero la prima, la seconda,.... la $n$-1$^{ma}$ derivata e la $n^{ma}$ sia diversa da zero. Colla solita formola possiamo scrivere

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + \theta h)$$

e $f^n(x_0 + \theta h)$ non cambia segno col mutare il segno di $h$ ($h$ essendo una quantità arbitrariamente piccola) altrimenti $f^n$ dovrebbe essere zero in $x_0$, contro l'ipotesi. Se quindi $n$ è pari, il secondo membro, e perciò anche il primo, non può mutar segno col mutare il segno di $h$ e perciò la funzione nel punto $x_0$ non sarà nè crescente, nè decrescente.

Se invece $n$ è dispari, allora $h^n$ muta segno col mutare quello di $h$, e la funzione sarà crescente o decrescente.

Se $f^n(x_0)$ è diverso da zero ed è p. es., positivo, *supposto che $f^n$ sia una funzione continua,* si potrà sempre trovare un $h$ così piccolo che $f^n(x_0 \pm \theta h)$ *sia sempre* positivo; perciò passando h dal segno negativo al positivo, la differenza

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

passa anche dal segno negativo al positivo, ed hanno luogo le disuguaglianze (1), cioè la funzione è crescente. Viceversa se $f^n(x_0)$ è negativa, allora la funzione è decrescente.

Raccogliendo così i risultati ottenuti possiamo dire: *sia n l'ordine della prima delle derivate che non è zero nel punto $x_0$; se n è un numero pari la funzione non è nè crescente nè decrescente; se invece n è dispari la funzione è crescente se $f^n(x_0)$ è positivo ed è decrescente se $f^n(x_0)$ ha un valore negativo.*

Resta ora naturalmente a considerare a parte il caso in cui la funzione non è nè crescente, nè decrescente nel punto $x_0$. Ciò sarà fatto nel paragrafo seguente.

**§ 2. Massimi e minimi delle funzioni di una sola variabile.** — Se una funzione $f(x)$ in un punto $x_0$ è tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

per un certo $h$ e per ogni altro minore, ha un segno fisso, cioè o sempre positivo, o sempre negativo, qualunque sia il segno di $h$, noi diremo che la $f$ in $x_0$ possiede un *minimo* o un *massimo* rispettivamente.

È facile vedere che una condizione necessaria perchè ciò accada è che la prima derivata della funzione sia zero in $x_0$.

Infatti i due rapporti incrementali

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{+h},$$

per le ipotesi fatte, saranno sempre di segno contrario per qualunque valore di $h$; ma i loro limiti devono essere eguali perchè devono rappresentare la derivata della funzione nel punto $x_0$, dunque tali limiti non potranno che essere zero.

Ricaviamo perciò, prima di tutto, che *condizione necessaria perchè la funzione in $x_0$ abbia un massimo o un minimo è che la prima derivata sia zero.*

Per stabilire ora la teoria da un punto di vista generale supponiamo, come nel paragrafo precedente, che sia

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$$

e che sia $f^n(x)$ la *prima* delle derivate che non si annulli in $x_0$.

Se $n$ è un numero dispari, allora sappiamo dal paragrafo precedente che la funzione è o crescente o decrescente, il che porta che la differenza

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0)$$

*non* ha un segno fisso indipendente dal segno di $h$, e quindi allora evidentemente non ci potrà essere nè un massimo nè un minimo.

Se invece $n$ è un numero pari, allora dal paragrafo precedente sappiamo che la funzione non è nè crescente nè decrescente.

Applicando al solito la formola del valor medio arrestata alla derivata $n^{ma}$, si ha

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 \pm \theta h),$$

e potendo trovare un $h$ così piccolo che

$$f^n(x_0 \pm \theta h)$$

sia sempre di segno fisso e propriamente del medesimo segno di $f^n(x_0)$, ed essendo $h^n$ sempre positivo per $n$ pari, si ha che il primo membro avrà segno fisso e quindi ci troviamo nel caso di un massimo o di un minimo; propriamente se $f^n(x_0)$ è negativo, sarà costantemente negativo anche il primo membro, e si avrà un massimo, e si avrà un minimo invece se $f^n(x_0)$ è positivo.

Abbiamo dunque per risultato:

*Se l'ordine $n$ della prima delle derivate che in $x_0$ è diversa da zero, è un numero pari, allora, e allora solo, in $x_0$ la funzione avrà un massimo o un minimo, e propriamente avrà un massimo se $f^n(x_0)$ ha segno negativo, e avrà un minimo se $f^n(x_0)$ ha segno positivo.*

Per un punto di massimo o minimo dunque certamente la prima derivata della funzione deve essere zero, come abbiamo sopra dimostrato direttamente.

Se quindi noi vogliamo trovare i punti in cui una data funzione è massima o minima, basterà che eguagliamo a zero la prima derivata, e fra le radici della prima derivata certamente saranno compresi tutti i punti di cui si parla; per modo che quelle fra le radici che non annullano la seconda derivata, oppure in generale, che, annullando la seconda derivata, annullano anche le derivate seguenti, sino ad una di ordine dispari, sono quelle corrispondenti ai massimi e minimi.

Passiamo ora ad alcune applicazioni.

*Si voglia ricercare un punto in cui la funzione*

$$f(x) = x^x$$

*sia massima o minima.*

La derivata prima di tale funzione è [1]

$$f' = x^x (\log x + 1)$$

e la derivata seconda è

$$f'' = x^x (\log x + 1)^2 + x^{x-1}$$

La espressione $x^x$ non si annulla per alcun valore finito di $x$. Le radici di $f'$ sono dunque date da

$$\log x + 1 = 0 \quad \text{cioè} \ \log x = -1 \quad \text{cioè} \ x = \frac{1}{e}$$

Per tal valore la seconda derivata acquista un valore positivo. Dunque questo valore di $x$ corrisponde ad un minimo della funzione.

*Si voglia dividere un numero $n$ in due parti tali che il prodotto di tali parti sia un massimo.*

Se chiamiamo $x$ una delle parti, l'altra parte

---

(1) Questa derivata si può fare col teorema delle funzioni composte.

Consideriamo la funzione composta $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} = y_1^{y_2}$ La sua derivata è

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{d y_1}{d x} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{d y_2}{d x} = y_2 y_1^{y_2 - 1}\frac{d y_1}{d x} + y_1^{y_2} \log y_1 \frac{d y_2}{d x} =$$

$$= \psi(x)\, \varphi(x)^{\psi(x)-1} \frac{d\varphi}{dx} + \varphi(x)^{\psi(x)} \log \varphi(x) \frac{d\psi}{dx}.$$

Per $\varphi(x) = x$, e $\psi(x) = x$ si ha la formola del testo.

sarà $n - x$, e il prodotto

$$f = x(n - x)$$

deve essere un massimo.

La prima derivata è:

$$f' = n - 2x$$

e la seconda derivata è

$$f'' = -2.$$

Il punto $x$ che annulla la prima derivata è

$$x = \frac{n}{2}$$

e poiché la seconda derivata è diversa da zero ed è negativa, possiamo dedurre che tale $x$ trovato corrisponde effettivamente ad un punto di massimo della funzione.

Dunque per risolvere il problema proposto bisogna dividere per metà il numero $n$.

§ 3. **Massimi e minimi delle funzioni di più variabili**. — Nel caso delle funzioni di più variabili possiamo definire il punto di massimo o di minimo in modo analogo a quello tenuto per le funzioni di una variabile.

Diremo che la $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ è *massima o minima* nel punto

$$a_1\ a_2 \ldots a_n$$

quando esistono delle quantità $h_1\,h_2 \ldots h_n$ tali per esse e per ogni altro sistema di quantità ad esse rispettivamente minori, si abbia sempre che la differenza

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots a_n + h_n) - f(a_1 a_2 \ldots a_n)$$

sia di segno costante qualunque sieno i segni delle quantità $h$,

Supponiamo che le successive derivate della funzione sieno nulle, sino a quelle di ordine $m$-$1$; e che quelle di ordine $m$ sieno le prime che non sieno tutte zero nel punto $(a_1 a_2 \dots a_n)$.

Sviluppiamo la differenza:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)-f(a_1 a_2 \dots a_n)$$

colla formola generalizzata del valor medio, arrestandoci ai termini contenenti le derivate $m^{me}$. Si ha, (v. Cap. III, § 1)

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)-f(a_1 a_2 \dots a_n)=$$
$$=\frac{1}{m!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\dots\dots\dots\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)\right)^m_{\substack{x_1=a_1+\theta_m h_1\\ x_2=a_2+\theta_m h_2\\ \dots\dots\dots}} \qquad (a)$$

dove $\theta_m$ è compreso fra 0 e 1, e il simbolo che figura al secondo membro ha un significato da noi già conosciuto.

I coefficienti dell'espressione del secondo membro variano al variare delle $h$, e tendono ai valori delle derivate $m^{me}$ della funzione nel punto $(a_1 a_2 \dots a_n)$ col tendere a zero di $h_1, h_2, \dots, h_n$.

Consideriamo l'altra espressione

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots\dots\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)\right)^m_{\substack{x_1=a_1\\ x_2=a_2\\ \dots\dots}} \qquad (b)$$

che, sviluppata, è una funzione razionale intera *omogenea* nelle $h$, o, come si dice, una forma di *grado m*. Essa può essere di tre specie diverse, cioè:

1°. Può essere tale che, in qualunque modo si variino le $h$, il segno della forma sia sempre il medesimo, e che inoltre essa non sia zero che per $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$ (si badi che le $h$ devono avere solo valori reali). In tal caso essa si chiama una *forma definita*.

2.° Può poi accadere che il suo segno sia bensì costante, ma che essa possa diventare zero anche per altri valori delle $h$ che non sieno i soprasegnati; allora si ha una *forma* detta *semidefinita*.

3.° E può finalmente accadere che essa *non* sia di segno fisso, e allora si ha una *forma indefinita*.

Il teorema che vogliamo ora dimostrare è questo:

*Perchè si abbia un massimo od un minimo per la funzione data, è necessario che la* (b) *non sia una forma indefinita.*

Infatti poniamo $h_1 = tk_1, \ldots h_n = tk_n$ ove $t$ sia *positivo*.

Il secondo membro di ($a$) diventa:

$$\frac{1}{m!} t^m \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} k_1 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} k_n \right) \right)^m_{\substack{x_1 = a_1 + \theta_m h_1 \\ \ldots\ldots\ldots}} \qquad (c)$$

Col tendere di $t$ a zero, il limite del terzo fattore di questa espressione (salvo il cangiamento formale delle $k$ nelle $h$) non è altro che la forma ($b$). Se dunque la ($b$) potesse diventare positiva o negativa a seconda dei valori delle $h$, il terzo fattore dell'ultima formola, dovendo per $t = 0$ tendere a limiti di segno contrario, non potrebbe mantenere segno fisso col variare delle h, e perciò neanche il primo membro di $(a)$ potrebbe conservare segno costante.

Ma si può dimostrare qualche cosa di più:

*Se* $(b)$ *è una forma definita, allora vi sarà certamente un massimo od un minimo della funzione.*

Infatti in tal caso, fissato un sistema di valori di $k$, facendo tendere $t$ a zero, la $(c)$ tende ad una quantità di segno fisso e diversa da zero; quindi potrà sempre trovarsi un tale $t$, che, per esso e per i valori ad esso minori, l'espressione $(c)$, e quindi il secondo membro di $(a)$ sia sempre dello stesso segno, e sia zero solo per $t=0$. Ciò basta per concludere che la funzione ha un massimo od un minimo.

È evidente che *se* $m$ *è dispari, la forma* $(b)$ *è indefinita.*

Infatti in tal caso cambiando i segni a tutte le $h$, la forma muta di segno, perchè ogni termine contenendo $m$ fattori $h$, muterà di segno.

Di qui si ha che *perchè si abbia un massimo o minimo è necessario che il numero* $m$ *sia pari.*

E inoltre: *perchè si abbia in un punto un massimo o minimo, tutte le derivate parziali di* 1° *ordine devono essere zero in quel punto, ovvero deve essere zero il differenziale totale della funzione.*

Da quanto si è detto risulta che se la forma $(b)$ è definita vi è un massimo o minimo, e se essa è invece indefinita, non vi è un massimo o minimo. Si presenta ora spontanea la domanda: che cosa accade quando la forma $(b)$ è *semidefinita*? La risposta è che potrà accadere in certi casi l'una cosa, e in certi altri l'altra; nei num. 102 e seg.

delle citate mie *Note critiche di Calcolo infinitesimale* è discussa la questione con parecchi esempii notevoli.

---

Dai teoremi precedenti risulta che la ricerca dei massimi e minimi per le funzioni di più variabili si riduce alla ricerca delle condizioni perchè una certa forma di grado $m$, a coefficienti assegnati, sia definita o no. Il primo caso che si presenta è quello in cui si tratti di due sole variabili, e il grado della forma sia 2, cioè la forma sia quadratica; trattiamo perciò di questo caso.

Si abbia la forma quadratica

$$A h_1^2 + 2 B h_1 h_2 + C h_2^2$$

dove $A$, $B$, $C$ sono dei coefficienti qualunque, e ricerchiamo le condizioni necessarie e sufficienti perchè essa sia *definita.*

Se poi si tratti dell'applicazione alla teoria dei massimi e minimi, i coefficienti $A$, $B$, $C$, avranno naturalmente i valori:

$$A = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right)_{\substack{x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2}}$$

$$B = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)_{\substack{x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2}}$$

$$C = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right)_{\substack{x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2}}$$

Se la forma quadratica deve essere definita *positiva, evidentemente* $A$ e $C$ debbono essere positivi perchè ponendo in particolare $h_2 = 0$ ovv $h_1 = 0$, la forma diventa rispettivamente $A h_1^2$, vero $C h_2^2$ che devono essere delle quantità sitive.

Scriviamo ora la forma quadratica nel segu modo

$$\frac{1}{A}\left((A h_1 + B h_2)^2 + (A C - B^2) h_2^2\right).$$

Si vede di qui che

$$A C - B^2$$

deve essere positivo, perchè, potendo scegliere $h$ in modo qualunque, se li scegliamo in mani che sia

$$A h_1 + B h_2 = 0,$$

e $A C - B^2$ fosse negativo, tutta la forma per valori di $h_1 h_2$, avrebbe un valore negativo.

D'altra parte se $A C - B^2$ è positivo, si v immediatamente che per qualunque valore re di $h_1 h_2$, la forma ha sempre il valore positivo

Se la forma deve invece avere un valore ne tivo qualunque sieno i valori di $h_1 h_2$, cogli ste ragionamenti, si trova che $A$ e $C$ debbono ess negativi, e $A C - B^2$ deve essere positivo; dun possiamo dire che *perchè la forma quadratica definita deve sempre essere*

$$A C - B^2 > 0,$$

*e, soddisfatta tale condizione, se poi $A$ è posit la forma è positiva, e se $A$ è negativa, la form negativa.*

bene notare che, colla condizione posta, $A$ e $C$ )no essere necessariamente dello stesso segno, ımenti $A\,C - B^2$ sarebbe negativo.

a quanto si è detto si può anche dedurre *che se*

$$A\,C - B^2$$

*:gativo, la forma non è di segno costante cioè ıa forma indefinita.*

alla teoria delle equazioni di 2° grado si sa $A\,C - B^2$ e il cosiddetto *discriminante* dell'e-zione

$$A\,z^2 + 2\,B\,z + C = 0$$

ıe le radici di tale equazione sono reali o im-;inarie secondochè $A\,C - B^2$ è negativo o po-ro.

ra la nostra forma quadratica può scriversi

$$h_2^2\left(A\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2\,B\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + C\right)$$

secondo fattore è proprio il primo membro [uell'equazione di 2° grado quando vi si pone $\frac{h_1}{h_2}$. Possiamo quindi dire che *la forma qua-tica sarà definita o indefinita secondochè quella ızione quadratica ha le radici immaginarie o !i.*

iò del resto può dimostrarsi anche diversa-ıte; sia infatti positiva la espressione

$$h_2^2\left(A\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2\,B\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + C\right)$$

*lunque sieno i* valori di $h_1\,h_2$; deve allora essere positivo il secondo fattore, essendo il primo un quadrato. Se quella equazione quadratica avesse le radici reali $\alpha, \beta, (\alpha < \beta)$, ponendo per $\frac{h_1}{h_2}$ prima un valore minore di $\alpha$, e poi un valore maggiore di $\alpha$ ma minore di $\beta$, il polinomio acquisterebbe due valori di segno contrario, mentre che per le nostre ipotesi esso deve acquistare sempre un valore di segno costante. Dunque *le radici di quella equazione devono essere immaginarie.*

Nel caso che le radici sono reali, il polinomio cambia di segno perchè passa per zero ogni volta che il rapporto $\frac{h_1}{h_2}$ passa per il valore di una delle radici.

Abbiamo esaminato i casi in cui il discriminante è positivo o negativo; resta a considerare il caso in cui quel discriminante è zero. Allora le due radici della equazione di 2° grado sono reali ed uguali, e il suo primo membro è

$$\frac{1}{A h_2^2}\left(A h_1 + B h_2\right)^2$$

e quindi il suo segno è sempre costante e dipendente da quello di $A$. Siamo però qui nel caso di una forma *semidefinita*, giacchè essa si annulla pei valori $h_1$ e $h_2$ che non sono solamente i valori $h_1 = h_2 = 0$, ma son tali che $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{B}{A}$.

In questo caso non possiamo dalla teoria esposta dedurre nulla in rapporto alla esistenza dei massimi o minimi. Si potrà con profitto riscontrare quanto abbiamo esposto nei n. 102 e seg. delle *Note critiche di* Calcolo infinitesimale.

Vogliamo ora risolvere un'obbiezione che si potrebbe fare. Si potrebbe credere che la condizione da noi stabilita perchè si abbia un massimo o minimo, che cioè una certa forma di grado pari $n$ sia *definita*, cioè sia di segno costante per *tutti* i sistemi di valori delle $h$, sia una condizione più ristretta di quella che occorre effettivamente per il massimo o minimo. Perchè dalla teoria dei massimi e minimi risultava che esiste un massimo o minimo quando quella certa forma di grado $n$ è di segno costante, *ma per valori delle h assai prossimi a zero*, cioè quando si possa sempre trovare un campo di variabilità delle $h_1 h_2 \ldots$ attorno il punto zero, tale che per ogni sistema di valori delle $h$ comprese nel campo, quella forma abbia segno costante.

Ora non è difficile far vedere che le due condizioni si equivalgono perfettamente, cioè che, se la forma è di segno costante per valori di $h$ prossimi al valore zero, sarà di segno costante per valori *qualunque* delle $h$ anche grandissimi.

Perchè, tornando alla forma quadratica di due sole variabili, se essa è di segno costante, p. es. positiva, per tutti i valori di $h_1$ e $h_2$ minori rispettivamente di $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$ in valore assoluto, per altri valori di $h_1 h_2$ p. es., $k_1 k_2$ maggiori in valore assoluto di $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$, noi possiamo sempre trovare un numero *positivo* $\omega$ tale che sia

$$k_1 = \omega\, h_1$$
$$k_2 = \omega\, h_2$$

dove $h_1 h_2$ sieno minori in valore assoluto di $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$. Basterà perciò prendere $\omega$ maggiore del maggiore dei valori assoluti dei due rapporti

$$\frac{k_1}{\varepsilon_1}\ ,\quad \frac{k_2}{\varepsilon_2}.$$

Facendo allora quelle sostituzioni, si ha

$$A k_1^2 + 2 B k_1 k_2 + C k_2^2 = \omega (A h_1^2 + 2 B h_1 h_2 + C h_2^2)$$

e quindi, se il secondo fattore del secondo membro è positivo, lo deve essere sempre anche il primo membro.

---

Come esempio della teoria dei massimi e minimi scegliamo il seguente: *Vogliamo determinare il triangolo iscritto in un cerchio e che abbia la massima area.*

Scegliamo un punto arbitrario $A$ della circonferenza come un vertice del triangolo iscritto; la questione si ridurrà a trovare gli altri vertici.

Pel punto $A$ conduciamo il diametro $A O$, e scegliamo come incogniti gli angoli che due lati del triangolo partenti da $A$ formano con tale diametro, e che chiameremo rispettivamente $\theta$ e $\varphi$. Se per valori di tali angoli troveremo due valori di segni contrari, vorrà dire che i due lati del triangolo partenti da $A$ stanno da parti opposte del diametro, e se troveremo due valori dello stesso segno, vorrà dire che i lati del triangolo massimo stanno dalla medesima parte del diametro.

L'angolo dei due lati del triangolo, cioè l'angolo in $A$ sarà espresso in generale dalla differenza degli angoli $\theta$ e $\varphi$ che i due lati formano col diametro; cioè sarà $\theta - \varphi$.

Dunque l'area del triangolo sarà

$$\text{Area} = \frac{1}{2} A\,B\,.\,A\,C\,.\,\text{sen}\,(\theta - \varphi)$$

d essendo

$$A\,B = 2\,r\,\cos\theta$$
$$A\,C = 2\,r\,\cos\varphi$$

love $r$ è il raggio del cerchio, si ha

$$\text{Area} = 2\,r^2 \cos\theta \cos\varphi\ \text{sen}\,(\theta - \varphi) = f.$$

Si ha dunque una funzione $f$ delle due variabili $\theta$ e $\varphi$ che bisognerà rendere massima.

Formiamo le derivate parziali rispetto a $\theta$ e $\varphi$:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2\,r_2\,\text{sen}\,\theta \cos\varphi\ \text{sen}\,(\theta - \varphi) + 2\,r^2 \cos\theta \cos\varphi\ \text{sen}\,(\theta - \varphi)$$
$$= 2\,r^2 \cos\varphi \cos(2\,\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\,2\,r^2 \cos\theta \cos(\theta - 2\,\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\,4\,r^2 \cos\varphi\ \text{sen}\,(2\,\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} = 2\,r^2\,\text{sen}\,2\,(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -\,4\,r^2 \cos\theta\ \text{sen}\,(\theta - 2\,\varphi).$$

Per avere i valori di $\theta$ e $\varphi$ che corrispondono ad un massimo dobbiamo porre eguali a zero le prime derivate cioè

$$\cos\varphi \cos(2\,\theta - \varphi) = 0$$
$$\cos\theta \cos(\theta - 2\,\varphi) = 0.$$

Ma evidentemente, per la natura del pro
che stiamo trattando, gli angoli $\theta$ e $\varphi$ non pc
essere nè angoli retti nè multipli di angoli
quindi $\cos\varphi$ e $\cos\theta$ non possono essere ze
perciò dobbiamo porre

$$\cos(2\theta - \varphi) = 0$$
$$\cos(\theta - 2\varphi) = 0$$

donde

$$2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta - 2\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Vediamo che cosa diventano con tali va
seconde derivate; ricordando che

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

essi diventano rispettivamente

$$-2\sqrt{3}\,r^2 \quad , \quad +\sqrt{3}\,r^2 \quad , \quad -2\sqrt{3}\,r^2.$$

Moltiplicando il primo e ultimo termine
traendone il quadrato del secondo si ha la
titá positiva $9r^4$, e quindi ne conchiudiam
per gli indicati valori di $\theta$ e $\varphi$ la funzione
effettivamente un massimo o minimo; osser
poi che $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ è negativo possiamo finalment
chiudere che si tratta di un *massimo* e non
*minimo.*

Avendo trovato che $\theta$ e $\varphi$ sono eguali e di segno opposto ne conchiudiamo che i lati $A\,B$, $A\,C$ del triangolo sono situati da parti opposte del diametro passante per $A$, e formano con tal diametro angoli eguali, e l'angolo che formano fra loro è la terza parte di due angoli retti. Il triangolo che così si viene a formare è, come è facile vedere, un triangolo equilatero; dunque *il triangolo iscritto nel cerchio e avente la massima area é il triangolo equilatero.*

§ 4. **Calcolo dei massimi e minimi nel caso delle funzioni implicite.** — In questo paragrafo non dovremo esporre una teoria nuova, ma dovremo solo mostrare come si possano disporre opportunamente i calcoli nel caso in cui la funzione sia data sotto forma implicita.

Supponiamo in generale che sieno date $m$ equazioni fra $m+n$ variabili

$$f_1(x_1\,x_2\ldots x_n\;y_1\,y_2\ldots y_m)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m(x_1\,x_2\ldots x_n\;y_1\,y_2\ldots y_m)=0.$$

Queste equazioni possono determinare le $m$ variabili $y_1\,y_2\ldots y_m$ in funzione delle altre variabili $x$.

Si vogliano calcolare i massimi o minimi di una di queste funzioni, e naturalmente si voglia condurre il calcolo senza supporre prima fatta la risoluzione di quelle equazioni.

Osserviamo che se supponessimo sostituite in quelle equazioni in luogo delle $y$ le loro espressioni in funzione delle $x$, i primi membri risulterebbero funzioni delle $x$ identicamente zero per *qualunque sistema* di valori delle $x$; quindi il dif-

ferenziale totale di quei primi membri delle e
zioni possiamo porlo eguale identicamente a z
abbiamo perciò

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} d y_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} d y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_1} d y_1 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} d y$$

Se ora la funzione $y_1$ delle variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n$
esser massima o minima, debbono essere zero
le sue derivate parziali di 1° ordine, cioè t
coefficienti dell'espressione del differenziale t
della funzione $y_1$.

Per trovare la espressione di $d y_1$, abbiam
risolvere un sistema di $m$ equazioni lineari
$m$ incognite $d y_1, d y_2, \ldots, d y_m$.

Abbiamo così:

$$d y_1 = - \frac{X_1}{Y_1} d x_1 - \ldots - \frac{X_n}{Y_1} d x_n$$

dove

$$Y_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

e $X_1 \ldots X_n$ sono i determinanti formati sostitu
in questo, in luogo degli elementi della prima
lonna, rispettivamente gli elementi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \quad \text{per } X_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \quad \text{per } X_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdots\cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \quad \text{per } X_n.$$

Stabilendo allora le equazioni

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0 \quad \ldots \quad X_n = 0$$

abbiamo in tutto, insieme colle equazioni date, un sistema di $m+n$ equazioni, che determinerà i valori di tutte le $m+n$ variabili.

Se la $y_1$ *può* diventare massima o minima, essa lo *dovrà* necessariamente diventare per uno o più dei sistemi di valori delle $x$ che si sono ricavati in tal maniera.

Il problema che abbiamo risoluto contiene come caso particolare quest'altro:

Sia data una funzione $y$ esplicitamente nelle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ e si supponga che fra queste variabili sussistano una o più relazioni. Si voglia ricercare il massimo o minimo della funzione $y$.

Questo problema si può trattare come il precedente supponendo che le funzioni $f_1 f_2 \ldots$ sieno rispettivamente della forma

$$\begin{aligned} y - f(x_1 x_2 \ldots x_n) &= 0 \\ \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

cioè che la prima contenga tutte le variabili del problema che sono $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, e le altre contengano solo le variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$.

*Supposto che* queste equazioni sieno in numero di $m$, esse potranno determinare $m$ delle variabili, fra cui $y$, in funzione delle altre

$$n - m + 1.$$

Vogliamo applicare questo metodo all'esempio: *Ricercare fra tutti i triangoli che hanno il medesimo perimetro, qual'è quello che ha la massima area.*

Chiamiamo $x_1, x_2, x_3$ i tre lati del triangolo; se $y$ è l'area del triangolo, e $2p$ il perimetro dato, abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} \sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)} - y &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2p &= 0, \end{aligned}$$

che, differenziate, danno:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{p(p-x_2)(p-x_3)}}{2\sqrt{p-x_1}}\,dx_1 - \frac{\sqrt{p(p-x_1)(p-x_3)}}{2\sqrt{p-x_2}}\,dx_2 \\ -\frac{\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)}}{2\sqrt{p-x_3}}\,dx_3 - dy &= 0 \\ dx_1 + dx_2 + dx_3 &= 0. \end{aligned}$$

Considerando come incognite in queste due equazioni $dy$ e $dx_3$ e risolvendole si ha

$$\begin{aligned} dy = &\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(p-x_2)(p-x_3)}{(p-x_1)}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(p-x_1)(p-x_2)}{(p-x_3)}}\right) dx_1 \\ &+ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(p-x_1)(p-x_3)}{(p-x_2)}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p(p-x_1)(p-x_2)}{(p-x_3)}}\right) dx_2. \end{aligned}$$

Seguendo la teoria sviluppata di sopra, bisognerà *porre* eguali a zero i coefficienti di $dx_1$ e $dx_2$, e restano così le equazioni

$$\sqrt{\frac{p(p-x_1)(p-x_2)}{(p-x_3)}}=\sqrt{\frac{p(p-x_2)(p-x_3)}{(p-x_1)}}=\sqrt{\frac{p(p-x_3)(p-x_1)}{(p-x_2)}}$$

donde

$$p-x_1=p-x_2=p-x_3$$

e quindi

$$x_1=x_2=x_3=\frac{2p}{3}.$$

Ricaviamo quindi che *il massimo triangolo fra tutti quelli che hanno il medesimo perimetro è il triangolo equilatero.*

## CAPITOLO V.

### Alcune applicazioni analitiche.

§ 1. **Limite del quoziente di funzioni. — Forme indeterminate. — Loro risoluzione.** — Immaginiamo una funzione composta di due altre di una variabile indipendente, mediante la formola

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e supponiamo che per $x=a$, le due funzioni $\varphi(x)$ $\psi(x)$ tendano ambedue a zero. Allora il valore del limite di $f(x)$ per $x=a$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Una tal forma non rappresenta un valore determinato; infatti al quoziente $\frac{0}{0}$ può assegnarsi un qualunque valore $A$ finito o zero, e resta sempre soddisfatta la proprietà del quoziente che il numeratore è eguale al denominatore moltiplicato per il quoziente $A$, perchè si ha sempre la identità $A.0=0$ qualunque sia $A$.

*Siamo dunque* in presenza di una forma cosiddetta *indeterminata.* Il problema che ci proponiamo è il seguente: *Cercare il limite di $f(x)$ per $x = a$.*

Nella ricerca di tal limite consiste il cosiddetto *problema della risoluzione dell' indeterminazione* $\frac{0}{0}$.

Oltre della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se ne possono presentare delle altre. *Così le forme*

$$\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty . 0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty - \infty$$

*sono altrettante forme indeterminate*, come sarebbe facile far vedere direttamente. Però la risoluzione di tutte queste indeterminazioni si può ricondurre sempre alla risoluzione di una indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$, come faremo vedere più avanti. La indeterminazione $\frac{0}{0}$ si può chiamare perciò la *indeterminazione fondamentale.*

Le ipotesi da cui partiamo sono che

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x=a} \psi(x) = 0$$

La risoluzione generale del problema propostoci è irta di difficoltà e di eccezioni; per ragioni di brevità noi ci soffermeremo però solamente su due casi che possono considerarsi i principali, mentre per maggiori particolari rimandiamo ai n. 106 e seg. delle citate: *Note critiche di Calcolo infinitesimale.*

Questi due casi sono:

1.° *Le derivate delle due funzioni esistano nel punto a.*

2.° *Le derivate delle due funzioni esistano in un intorno di a, e le funzioni sieno continue in a.*

1.° Caso. — Poichè le derivate delle due funzioni esistono nel punto $a$, è chiaro che le funzioni debbono esistere non soltanto in $a$, ma anche in un intorno di $a$, ed essere *continue* in $a$; per conseguenza i limiti delle funzioni per $x$ tendente ad $a$, saranno i valori delle funzioni in $a$.

Intanto può scriversi identicamente:

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\dfrac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x=a} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x=a} \dfrac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}},$$

giacchè, essendo per ipotesi:

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x=a} \psi(x) = 0,$$

per effetto della continuità delle funzioni in $a$, sarà anche $\varphi(a) = \psi(a) = 0$.

Di qui:

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Onde: *se le derivate delle due funzioni esistono nel punto a, e non sono entrambe uguali a zero, il limite della $f(x)$ sarà dato dal loro rapporto.*

La questione però non sarà risolta se entrambe sieno zero nel punto $a$. Ma se soltanto l'una o l'altra è zero, e se supponiamo che essendo zero la derivata di $\psi$, il rapporto incrementale $\dfrac{\psi(x)}{x-a}$ non tenda a zero cambiando infinite volte di segno, allora il limite di $f(x)$ risulta determinato.

2.° Caso. — Potremo scrivere applicando una formola nota (v. Cap. III, § 1):

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}$$

formola che sussiste supposto che $\psi'(x)$ *sia sempre diversa da zero in un intorno di a.* Essendo ora, per effetto della supposta continuità in $a$,

$$\varphi(a)=\psi(a)=0,$$

si ha

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}.$$

*Se dunque esiste il limite del rapporto* $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ *e in tutto un intorno di a la derivata di* $\psi$ *è sempre diversa da zero, il limite di* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *esiste esso pure e coincide col primo.*

Conviene osservare che è ben vero che l'esistenza del limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ col tendere di $x$ ad $a$ porta con sè l'esistenza del limite di $\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}$ col tendere di $h$ a zero, ma la cosa non è reciproca. Potrebbe esistere il limite di questo secondo rapporto e quindi esistere $\lim\limits_{x=a} f(x)$, ma non esistere quello del primo, e ciò in causa di $\theta$, che potrebbe variare in modo discontinuo, quando $h$ varia in modo continuo, per modo che il prodotto $\theta h$ potrebbe tendere a zero, (cioè $a+\theta h$ tendere ad $a$) non percorrendo un arbitrario gruppo di punti, ma uno speciale. (Cfr. le osservazioni fatte alla fine del Cap. II, § 4).

Se invece esiste il limite del primo rapporto, esso, per ciò solo, esiste in qualunque modo ci avviciniamo ad $a$, e quindi anche se ci avvicinassimo in quello special modo cui per avventura ci può costringere la natura del numero $\theta$. In conclusione, *nelle ipotesi fatte, al limite del rapporto delle funzioni nel punto $a$ si può sostituire il limite del rapporto delle derivate nel medesimo punto; se però non esiste il limite del rapporto delle derivate, non possiamo dire nulla sull'esistenza o meno del limite del rapporto delle funzioni.*

Un esempio di ciò è il seguente:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\log(1+x)},$$

il cui limite per $x=0$ acquista la forma $\frac{0}{0}$.

Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

che per $x=0$ non tende ad alcun limite. Scrivendo invece

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x}{\log(1+x)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

e osservando che $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x}{\log(1+x)} = 1$ (v. più sotto pag. 206) si trova $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

---

Passiamo ad alcuni esempi.

Si abbia la funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Per $x=0$ il limite di questo rapporto (che noi d'altra parte, sappiamo essere 1, v. Cap. I, § 11) si presenta sotto la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Vediamo come possiamo trovare lo stesso risultato, per la via qui indicata.

Facciamo le derivate del numeratore e del denominatore e poi poniamo nel rapporto di esse $x=0$; si ha $\dfrac{\cos x}{1}$, che per $x=0$ tende ad 1.

Colla stessa facilità si può calcolare il limite

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Si trova che esso è eguale a

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{1}$$

cioè è eguale a zero, come già sappiamo.

Così per $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ si trova

$$\lim_{x=0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1}$$

cioè 1, e per

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\log(1+x)}$$

si trova

$$= \lim_{x=0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1$$

---

*Se il limite del rapporto delle due funzioni si presenta sotto la forma* $\frac{\infty}{\infty}$, si può dimostrare un teorema simile a quello di sopra, cioè che *se allora esiste il limite del rapporto delle derivate, e se* $\psi'(x)$ *non solo non è mai zero in tutto un intorno di* $a$, *ma ha sempre il medesimo segno, esisterà il limite del rapporto delle funzioni e sarà eguale al limite del rapporto delle derivate.*

Di questo teorema però tralasciamo la dimostrazione e passeremo invece a fare varie osservazioni.

Prima di tutto osserviamo che i teoremi da noi enunciati, e colle condizioni enunciate, valgono naturalmente quando il punto $a$ è un punto a distanza finita. Se $a = \infty$, sussistono ancora dei teoremi analoghi, ma bisognerebbe ricercare quali nuove condizioni sono allora necessarie per la validità dei medesimi teoremi.

Osserviamo in secondo luogo che sostituendo, quando si può, il calcolo del limite del rapporto delle derivate a quello del rapporto delle funzioni può avvenire che anche il nuovo limite si presenti sotto forma indeterminata.

Però la sostituzione di un limite all'altro può essere vantaggiosa in altra maniera per il nostro scopo; giacchè può darsi che nel rapporto delle derivate scompaia qualche fattore comune al numeratore e al denominatore. Un esempio ci sarà utile per intendere meglio quello che vogliamo dire.

Si abbia

$$\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

che diventa $\frac{0}{0}$ per $x=\infty$.

Facendo le derivate si ha

$$\frac{-\frac{a}{x^2}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1}}{-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}=a\,\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{a}{x}}$$

e per $x=\infty$ si ha per limite $a$. Le due derivate sono anche esse zero per $x=\infty$, ma contengono un divisore comune $x^2$ che si può sopprimere prima di passare al limite.

---

Coi teoremi da noi dimostrati o enunciati si riesce moltissime volte alla risoluzione delle indeterminazioni $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, però, non sempre; perchè potrà accadere che il rapporto delle derivate si presenti *anche sotto forma* indeterminata; allora potrà riapplicarsi lo stesso metodo tante volte quante ne occorre; e potrà poi anche accadere che applicato quante volte si voglia, mai si giunga a risolvere l'indeterminazione.

Si abbia p. es. il rapporto

$$\frac{\log x}{x^n} \quad (n \text{ positivo qualunque}),$$

che per $x = \infty$ dà la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Facendo le derivate dei due termini si ha

$$\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \frac{1}{n\,x_n}$$

che per $x = \infty$ è zero; onde: *per quanto piccolo sia* $n$ *(purchè positivo), l'infinito di* $\log x$ *è sempre di ordine minore dell'infinito di* $x^n$; cioè possiamo dire: *l'infinito di* $\log x$ *rispetto ad* $x$ *è un infinito di ordine minore di qualunque ordine assegnabile.*

Consideriamo invece il rapporto

$$\frac{e^x}{x^n} \quad (n \text{ qualunque positivo}).$$

Facendo le derivate dei due termini si ha:

$$\frac{e^x}{n\,x^{n-1}}.$$

Se $n$ è maggiore di 1, questo rapporto per $x = \infty$ si presenta ancora sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e facendo il rapporto delle derivate seconde, terze, ecc., si hanno successivamente le espressioni

$$\frac{e^x}{n\,.\,n-1\;x^{n-2}},\ \frac{e^x}{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,x^{n-3}}, \ldots \text{etc.}$$

Se quindi $n$ è intero, facendo il rapporto delle derivate $n^{me}$ dei due termini si ha

$$\frac{e^x}{n!}$$

che per $x = \infty$ è $\infty$; e se $n$ non è intero, facendo il rapporto delle derivate $r^{me}$ dove $r$ sia un numero *intero* maggiore di $n$, si ha

$$\frac{e^x}{n.(n-1)\ldots(n-r+1).x^{n-r}}$$

dove l'esponente di $x$ al denominatore è negativo.

Quindi questa espressione per $x = \infty$ è infinita. Possiamo perciò dire che *l'ordine dell' infinito di* $e^x$ *è maggiore di qualunque numero* $n$.

---

Se ora passiamo a considerare le altre indeterminazioni citate sul principio di questo paragrafo, troviamo subito che esse possono tutte ridursi all'*indeterminazione fondamentale* $\frac{0}{0}$.

Se, infatti, si ha una funzione del tipo

$$\varphi(x)\,\psi(x)$$

e per $x = a$ sia

$$\lim \varphi(x) = 0$$
$$\lim \psi(x) = \infty$$

ponendo

$$\varphi(x).\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$$

è chiaro che per $x=a$ il limite del rapporto di $\varphi(x)$ e di $\frac{1}{\psi(x)}$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Se si ha una funzione del tipo

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

il cui limite per $x=a$ diventi della forma

$$\infty-\infty,$$

considerando l'altra funzione

$$e^{\varphi(x)-\psi(x)}=\frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}},$$

il limite del secondo membro di questa per $x=a$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, e quindi, risoluta questa indeterminazione, si potrà trovare il valore di

$$\lim_{x=a} e^{\varphi(x)-\psi(x)}$$

donde poi, passando al logaritmo, si troverà il

$$\lim_{x=a}(\varphi(x)-\psi(x)).$$

Se infine si ha una funzione del tipo

$$\varphi(x)^{\psi(x)}$$

il cui limite per $x=a$ diventi di una delle tre forme

$$0^0,\quad 1^{\infty},\quad \infty^0$$

considerando il logaritmo della funzione data, cioè

$$\log\varphi(x)^{\psi(x)}=\psi(x)\log\varphi(x),$$

si ha una espressione il cui limite per $x=a$ sarà sempre della forma $0\,.\,\infty$ e quindi la risoluzione dell'indeterminazione si riconduce a quella di un'altra già considerata avanti.

È naturale poi che molte volte si potrà evitare di ricorrere a questi artifizii per ridurre le altre indeterminazioni alla indeterminazione fondamentale, ma potranno anche adoperarsi artifizii diversi variabili da caso a caso.

Così p. es., si abbia la funzione

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x$$

il cui limite per $x=0$ diventa del tipo $\infty-\infty$.

Senza applicare la trasformazione indicata sopra, facciamo la seguente altra:

$$\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{(\operatorname{sen} x-x\cos x)(\operatorname{sen} x+x\cos x)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\left(1+\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x}\right).$$

Per $x=0$ il limite del secondo fattore si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$; mentre il primo ha per limite 2.

Risolvendo, colla riapplicazione successiva del solito metodo, la indeterminazione del secondo fattore, si ha

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x}=\lim_{x=0}\frac{x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{sen} x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen} x+x\cos x}{2\operatorname{sen} x+4x\cos x-x^2\operatorname{sen} x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{2\cos x-x\operatorname{sen} x}{6\cos x-6x\operatorname{sen} x-x^2\cos x}=\frac{1}{3}$$

onde l'indeterminazione $\infty - \infty$ della funzione data resta risoluta. Il limite della funzione data per $x = 0$ è

$$\frac{2}{3}.$$

§ 2. **Determinante funzionale di più funzioni. — Dipendenza ed indipendenza delle funzioni di più variabili.** — Si abbiano $n$ funzioni $y_1 y_2 \ldots . y_n$ di $n$ variabili $x_1 x_2 \ldots . x_n$, e si formi il determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si suol chiamare il *determinante funzionale* o *Jacobiano* delle funzioni date, dal nome di Jacobi che per il primo lo studiò.

Un primo teorema semplice sui determinanti funzionali è il seguente:

*Si immaginino le $y_1 y_2 \ldots y_n$ funzioni di altre $n$ variabili $z_1 z_2 \ldots z_n$, e queste alla loro volta funzioni delle variabili indipendenti $x_1 x_2 \ldots x_n$. Se si cerca il determinante funzionale delle $y$ considerate come funzioni delle $x$, esso é eguale al prodotto del determinante funzionale delle $z$ considerate come funzioni delle $z$, per il determinante funzionale delle $z$ considerate come funzioni delle $x$.*

Questo teorema ricorda quello riguardante la derivata di una funzione composta. La sua dimostrazione é facile.

Moltiplichiamo fra loro i due determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Eseguiamo questo prodotto, formando la somma dei prodotti degli elementi in linea del primo determinante, per gli elementi in colonne del secondo. Se si combina la $i^{ma}$ linea del primo determinante coll'$j^{ma}$ colonna del secondo, si ha

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_j}+\frac{\partial y_i}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_j}$$

e tale espressione (che formerà l'elemento di indici $i\,j$ nel determinante prodotto) non è altro, per il teorema delle derivate delle funzioni composte, che la derivata di $y_i$ rispetto a $x_j$, cioè

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

Il teorema resta così dimostrato.

Abbiamo già notato che questa proposizione rivela un'analogia che c'è fra l'operazione del determinante funzionale di più funzioni di più variabili, coll'operazione della derivata di una funzione di una variabile.

L'analogia può essere spinta anche più oltre. Si può dimostrare che *se le $y$ sono funzioni delle $x$, e se viceversa le $x$ possono considerarsi funzior delle $y$, il determinante funzionale* delle $y$ rispet *alle $x$ ha il valore inverso di quello delle $x$ rispetto alle $y$.*

Si possono dimostrare anche altri teoremi che stabiliscono sempre più intimamente l'analogia di cui si parla; ed è per tale analogia appunto che si usa indicare i determinanti funzionali con un simbolo analogo a quello delle derivate: per indicare il determinante funzionale delle funzioni $y$ rispetto alle variabili $x$ si adopera cioè il simbolo

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \ldots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}.$$

La dimostrazione del teorema enunciato si fa applicando il precedente; se le $y$ si considerano funzioni delle $x$, e queste reciprocamente funzioni delle $y$, le variabili $y$ considerate come funzioni delle $y$ stesse saranno le funzioni identiche

$$y_1 = y_1, \ldots, y_n = y_n,$$

e quindi il determinante funzionale delle prime variabili rispetto alle ultime avrà per valore 1, donde si ha l'assunto.

*Un' altra proprietà*, anche assai facile a dimostrare, *è quella rappresentata dalla formola*

$$\frac{\partial(y_1 \ldots y_i\; y_{i+1} \ldots y_n)}{\partial(y_1 \ldots y_i\; x_{i+1} \ldots x_n)} = \frac{\partial(y_{i+1} \ldots y_n)}{\partial(x_{i+1} \ldots x_n)}.$$

Ma un teorema sopra tutti importante è quello che si riferisce all'indipendenza o dipendenza delle funzioni.

*Se il determinante funzionale delle funzioni $y_1 y_2 \ldots y_n$ rispetto alle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ è identicamente nullo qualunque sieno i valori delle $x$,* *compresi in un certo campo, e se una delle $y$ non è una costante, le funzioni in quel campo sono fra loro dipendenti, cioè esiste fra i loro valori una o più relazioni, per modo che, determinati i valori di alcune di esse, restano determinati i valori delle altre; e reciprocamente.*

Anche questo teorema può reputarsi analogo all'altro che se la derivata di una funzione è zero per tutti i punti di un intervallo, la funzione ha valore costante per tutti tali punti.

Il teorema reciproco è facile a dimostrare.

Se fra le funzioni esiste una relazione, p. es., $y_1 = \psi(y_2 \dots y_n)$, allora

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

e quindi gli elementi della prima linea del determinante sono le stesse combinazioni lineari degl elementi delle altre linee parallele, e perciò il determinante è zero.

Supponiamo viceversa che il determinante è zero. Allora eliminiamo fra

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x_1 \dots x_n) \end{gathered}$$

le $n-1$ variabili $x_2 \dots x_n$; resta una relazione

$$y_1 = \psi(x_1\, y_2 \dots y_n)$$

nella quale noi potremo dimostrare che non compare la variabile $x_1$.

Consideriamo $y_1\, y_2 \dots y_n$ funzioni di $x_1\, x_2 \dots x_n$ le quali *a loro volta* sieno funzioni di $x_1\, y_2 \dots y_n$; tali ultime funzioni sarebbero ricavate dalle ultime $n-1$ equazioni risolute rispetto a $x_2, \dots x_n$.

Applicando allora il teorema sopra dimostrato si ha:

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \dots y_n)}{\partial(x_1 y_2 \dots y_n)} = \frac{\partial(y_1 y_2 \dots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)}{\partial(x_1 y_2 \dots y_n)}.$$

Il primo fattore del secondo membro è per ipotesi zero, e quindi è zero tutto il secondo membro. Vediamo che cosa è il primo membro. Esso è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Ora se noi ricaviamo da

$$\begin{gathered} y_2 = \varphi_2(x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x_1 \dots x_n) \end{gathered}$$

le $x_2 \dots x_n$ in funzione di $x_1 y_2 \dots y_n$ e poi le risostituiamo nelle $y_2 \dots y_n$ abbiamo identicamente, al secondo membro, $y_2 \dots y_n$ mentre che sostituendole in $y_1$ abbiamo la funzione $\psi$ di sopra. Quindi nel determinante scritto le derivate di $y_2$ rispetto a $y_2$, di $y_3$ rispetto a $y_3$, ecc., hanno il valore 1, mentre tutte le altre derivate di $y_2 \dots y_n$ che vi compariscono hanno il valore zero.

*Il determinante* del primo membro della forma superiore è dunque eguale semplicemente a

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$$

ed, essendo poi zero il secondo membro, si ha

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0.$$

Eseguendo dunque l'indicato procedimento di eliminazione, la $y_1$ non verrà più a contenere la variabile $x_1$, e quindi resta una relazione fra le sole $y_1 y_2 \ldots y_n$. Con ciò il teorema è dimostrato.

Possiamo applicare questo teorema per ricercare quando una funzione di due variabili $x_1 x_2$, contiene queste variabili sempre sotto la forma $x_1 + k x_2$ essendo $k$ una costante, cioè, quando una funzione delle due variabili è funzione del binomio $x_1 + k x_2$. Essendo eguali rispettivamente ad 1, e $k$ le derivate di tal binomio rispetto alle due variabili, si ha che la richiesta condizione è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$k \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

§ 3. **Indipendenza lineare delle funzioni di una sola variabile. — Determinanti wronskiani.** — La teoria che vogliamo sviluppare in questo paragrafo sarà utile nel calcolo integrale, laddove si parlerà delle *cosiddette equazioni* differenziali lineari.

Si abbiano $n$ funzioni $y_1 y_2 \dots y_n$ di una sola variabile $x$, e si formi il determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_1' & \dots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

dove la seconda linea è formata colle derivate prime degli elementi della prima linea, la terza linea è formata colle derivate seconde, e così di seguito.

Questo determinante si usa chiamare *wronskiano* delle $n$ funzioni date, dal nome del matematico polacco WRONSKI.

Esso è naturalmente una funzione di $x$; noi ne vogliamo prima di tutto ricercare la derivata; e troveremo un risultato molto semplice ed elegante, cioè che *la derivata del determinante W si ottiene semplicemente sostituendo agli elementi della linea contenente le derivate $n-1^{me}$ delle funzioni, le rispettive derivate $n^{me}$.*

La dimostrazione di questo teorema risulta immediatamente applicando quello sulla derivata di un determinante di cui abbiamo trattato nel Cap. II. § 8, e osservando che $n-1$ dei determinanti ottenuti applicando la suddetta regola sono zero identicamente, perchè contenenti due linee identiche.

Una importante applicazione di questo teorema è data da quest'altro:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè fra più funzioni di una stessa variabile $x$ non esista alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti* *costanti per un campo di valori di $x$, è che il loro wronskiano non sia identicamente zero per tutti i valori di $x$ di tal campo.*

È chiaro che se fra le funzioni esiste una relazione lineare omogenea, gli elementi di una delle colonne del determinante sono combinazioni lineari degli elementi delle altre colonne, e quindi il determinante è zero.

Dimostriamo ora il reciproco. Indicando con $A_1 \ldots A_2$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea nel determinante $W$, per i teoremi sui determinanti, si hanno le identità (avendo anche supposto che $W = 0$):

$$\begin{array}{llll}
A_1 y_1 & + A_2 y_2 & + \ldots + A_n y_n & = 0 \\
A_1 y_1' & + A_2 y_2' & + \ldots + A_n y_n' & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_1 y_1^{(n-3)} & + A_2 y_2^{(n-3)} & + \ldots + A_n y_n^{(n-3)} & = 0 \\
A_1 y_1^{(n-1)} & + A_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + A_n y_n^{(n-1)} & = W = 0.
\end{array}$$

Da queste $n$ equazioni lineari omogenee nelle quantità $A_1 A_2 \ldots A_n$ si ricava che queste sono proporzionali ai minori contenuti nella matrice formata coi coefficienti; ma tale matrice non é altro che la matrice $M'$, i cui minori, come si sa, non sono altro che le derivate delle quantità $A_1 A_2 \ldots A_n$ rispetto ad $x$: dunque, possiamo conchiudere che, nell'ipotesi fatta di $W = 0$, le quantità $A_1 A_2 \ldots A_n$ sono rispettivamente proporzionali alle loro derivate, cioè che

$$\frac{\frac{d A_1}{d x}}{A_2} = \frac{\frac{d A_2}{d x}}{A_2} = \ldots = \frac{\frac{d A_n}{d x}}{A_n}.$$

Intanto $\dfrac{\frac{d A_i}{d x}}{A_i}$ non è altro che la derivata del logaritmo di $A_i$; onde nelle ipotesi fatte le funzioni $A_1 A_2 \ldots A_n$ sono tali che le derivate dei loro logaritmi, o, come si dice, le loro derivate logaritmiche, sono tutte eguali; quindi i loro logaritmi non possono che differire per costanti, cioè possiamo scrivere

$$\log A_1 - \log \alpha_1 = \log A_2 - \log \alpha_2 = \ldots = \log A_n - \log \alpha_n$$

dove $\log \alpha_1$, $\log \alpha_2$, ecc., sono delle opportune quantità costanti che noi, per nostra comodità, abbiamo voluto porre sotto la forma di logaritmi.

Di qui si ha

$$\log \frac{A_1}{\alpha_1} = \log \frac{A_2}{\alpha_2} = \ldots$$

donde

$$\frac{A_1}{\alpha_1} = \frac{A_2}{\alpha_2} = \ldots$$

cioè le $A_1 A_2 \ldots$ sono proporzionali a delle quantità costanti $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ Quindi, se nella relazione omogenea identica

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n = 0$$

noi sostituiamo alle $A$ le $\alpha$, che sono ad esse proporzionali, abbiamo

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$$

che è una *relazione lineare omogenea a coefficienti costanti* fra le date funzioni $y$.

# CAPITOLO VI.

## Applicazioni geometriche. Principii di geometria differenziale.

§ 1. **Arco e corda di una curva piana o storta.** — Nella teoria delle curve è importante introdurre la considerazione di una certa grandezza che si chiama *l'arco della curva.* Noi non siamo in grado ora, senza i principii del calcolo integrale, di fare una teoria completa di questa grandezza, ma ci è indispensabile di citarne almeno i principali risultati, perchè dovremo introdurre spesso nelle formole il simbolo di essa.

Se immaginiamo fissato un punto $A$ della curva e un filo flessibile e inestensibile partente da quel punto e avvolto sul ramo della curva sino ad un punto $B$, la lunghezza del filo da $A$ sino a $B$ sarà una certa grandezza variabile col variare di $B$; e tale grandezza si chiama l'*arco della curva.*

Se poi congiungiamo i due estremi $A$, $B$ con una retta, la lunghezza di tale retta si chiama la *corda corrispondente a quell'arco.*

Queste definizioni si possono dare sia per curve piane che per curve storte.

Immaginiamo le coordinate della curva espresse in funzione di un parametro $t$.

Ad ogni valore di $t$ corrisponde una posizione del punto $B$; onde ad ogni valore di $t$ corrisponde un unico valore dell'*arco*, e un unico valore della *corda* (intendendo che il punto $A$ resti fisso).

Queste due grandezze che indicheremo rispettivamente con $s$ e $c$ sono due funzioni del parametro $t$; e per il valore di $t$ corrispondente al punto $A$, esse hanno ambedue il valore zero. Non siamo ora in grado di dare l'espressione di $s$ in funzione di $t$ (v. vol. II, Cap. VI, § 2); ma possiamo però dare l'espressione di $c$.

Supposto il caso di una curva piana, se $x'$ $y'$ sono le coordinate del punto $A$, e $x$, $y$ quelle del punto $B$, è chiaro che $x-x'$, $y-y'$ sono le projezioni della corda $AB$ sugli assi delle $x$ e delle $y$. Se gli assi sono rettangolari, si ha:

$$c^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

essendo allora $c$ l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui i cateti sono eguali a $x - x'$, $y - y'$ rispettivamente.

Supposto $x$, $y$ espressi in funzione del parametro $t$, sia $dt$ la differenza fra i valori del parametro nei due punti $B$ e $A$.

Le differenze $x - x'$, $y - y'$ saranno gli incrementi delle coordinate $x$, $y$ nei due punti; li indichiamo con $\Delta x$ e $\Delta y$, e si sa che tali incrementi differiscono dai differenziali delle funzioni $x$, e $y$ cioè da $dx = \frac{dx}{dt} dt$, $dy \frac{dy}{dt} dt$, per infinitesimi di ordine superiore rispetto a $dt$.

Possiamo dunque dire che si ha:

$$c=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt+\omega$$

essendo $\omega$ una quantitá infinitesima di ordine superiore rispetto a $dt$. Di qui si ha

$$\frac{c}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}+\frac{\omega}{dt}.$$

Passando al limite per $dt=0$, $\frac{\omega}{dt}$ va a zero per la detta proprietá di $\omega$, la corda $c$ diventa zero, mentre il rapporto $\frac{c}{dt}$ resta espresso dalla formola.

$$\lim\frac{c}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Ora se la corda $c$ partente dal punto fisso $A$, la consideriamo una funzione di $t$, il limite che compare al primo membro, non è altro che la derivata di tale funzione, e quindi abbiamo con quella formola *l'espressione della derivata della funzione c.*

Se facciamo convergere $dt$ a zero, la corda $c$ converge evidentemente a zero, mentre anche l'arco $s$, contato a cominciare da $A$, converge a zero; se invece l'arco $s$ non è contato a cominciare dal punto $A$, ma da un punto qualunque della curva, allora, per $dt=0$, converge a zero la differenza fra i valori di $s$ nei due punti $B$ e $A$, cioè $s-s'$.

*Sarà dimostrato* nel calcolo integrale che il li-

*mile del rapporto della corda al proprio arco è l'unità,* cioè se $c$ è la corda dell'arco $AB$, e $s-s'$ è l'arco $AB$,

$$\lim \frac{c}{s-s'}=1$$

donde

$$\lim \frac{c}{dt}=\lim \frac{s-s'}{dt}.$$

Per $dt=0$, $\lim \frac{s-s'}{dt}$ non è altro che la derivata della funzione $s$ nel punto $A$: dunque l'*espressione della derivata dell'arco che chiameremo al solito* $\frac{ds}{dt}$, è

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Questa formola può porsi sotto la forma differenziale, lasciando cioè indeterminata la variabile indipendente $t$:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Per una curva storta si può fare perfettamente l'analogo procedimento e si ha

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Da queste due formole se ne possono avere altre di uso frequente.

Dividendo per $ds^2$ si ha

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1 \qquad \text{nel caso di curve piane}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \quad \text{nel caso di curve storte.}$$

I rapporti $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ ecc., possono intendersi come le derivate di $x, y \ldots$ rispetto a $s$ quando si prende come variabile indipendente la $s$.

Derivando allora daccapo rispetto a $s$, si hanno le formole identiche

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Prima di entrare nelle considerazioni di Geometria differenziale è utile premettere un'osservazione fondamentale da tenere sempre presente.

Quando è data una curva piana di equazione $f(x\,y) = 0$, per ogni valore di $x$ vi saranno in generale più valori di $y$; il che geometricamente corrisponde al fatto che una retta parallela all'asse di $y$ incontra la curva in *più* punti.

*Per potere quindi considerare la $y$ come una propria funzione di $x$ ad un sol valore, bisognerà sempre intendere spezzata la curva data in tanti tratti, dei quali ciascuno deve considerarsi separatamente.*

§ 2. **Tangente e normale alle curve piane.** — Consideriamo due punti abbastanza vicini su di uno stesso ramo di una curva piana, e la retta che li congiunge.

L'equazione di tal retta sarà:

$$Y - y = A(X - x),$$

*essendo A il coefficiente angolare* della retta, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma coll'asse di $x$; ed essendo $x$, $y$ le coordinate di uno dei due punti della curva.

Ora immaginiamo che l'altro punto della curva si avvicini indefinitamente al punto $x$, $y$, sino a coincidere con esso; nella posizione limite la secante si chiama *tangente della curva.* L'equazione di tale retta non differirà dall'equazione scritta sopra, che per il solo valore di $A$.

Sappiamo già dal Cap. II, § 1, che nel caso limite il coefficiente $A$ diventa la derivata di $y$ rispetto ad $x$ nel punto $(x\ y)$. L'equazione della tangente ad una curva $y=f(x)$, è dunque:

$$Y-y=y'(X-x) \tag{1}$$

o anche

$$Y-y=\frac{d\,y}{d\,x}(X-x)$$

$$\frac{Y-y}{d\,y}=\frac{X-x}{d\,x}.$$

La *normale* poi alla curva in un punto è la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto. Per trovare quindi l'equazione della normale bisognerà condurre la perpendicolare alla retta (1) nel punto $(x\ y)$. Ora i coefficienti angolari di due rette fra loro perpendicolari debbono essere di segno contrario ed inversi l'uno dell'altro; perciò il coefficiente angolare della normale deve essere $-\frac{1}{y'}$, e la normale avrà per equazione:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

o anche

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0.$$

Immaginiamo ora una curva la cui equazione sia data da una relazione della forma:

$$f(x\,y)=0.$$

La derivata di $y$ rispetto ad $x$ si esprime colle note formole mediante le derivate parziali di $f$ (v. Cap. II, § 9). Sostituendo dunque tale espressione si ha per equazioni della tangente e della normale le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}-(X-x)\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}(2)$$

Supponiamo ora che l'equazione della curva anzichè data sotto le due forme avanti considerate, cioè $y=f(x)$ ovvero $f(x\,y)=0$, sia data sotto la forma

$$x=\varphi(t)\quad,\quad y=\psi(t),$$

essendo $t$ una variabile indipendente.

Allora tutta la questione si riduce a determinare la derivata $y'$ rispetto ad $x$ espressa mediante le derivate delle funzioni $\varphi, \psi$.

Fra le equazioni precedenti eliminando $t$ deve aversi l'equazione della curva $f(x\,y)=0$; se in tale equazione poniamo per $x, y$ le espressioni precedenti *in funzione* di $t$ abbiano una identità, onde la derivata rispetto a $t$ è evidentemente zero, cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=-\frac{d\psi}{dt}:\frac{d\varphi}{dt},$$

e quindi si hanno per nuove equazioni della tangente e della normale le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}(Y-y)\frac{d\varphi}{dt}-(X-x)\frac{d\psi}{dt}=0\\(Y-y)\frac{d\psi}{dt}+(X-x)\frac{d\varphi}{dt}=0\end{aligned}\right\}(3)$$

Possiamo ora passare a calcolare i coseni ed i seni di direzione della tangente e della normale.

Sappiamo che la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva fa coll'asse di $x$ è $y'$, e per la normale tale tangente trigonometrica è invece $-\frac{1}{y'}$. Chiamando $\theta$, $\theta'$ gli angoli che la tangente e la normale fanno con $x$, si ha perciò:

$$\operatorname{tang}\theta=y' \quad , \quad \operatorname{tang}\theta'=-\frac{1}{y'}$$

donde, colle formole di trigonometria,

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \cos\theta'=\pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta=\pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \operatorname{sen}\theta'=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

e la varietà dei segni dipende dall'arbitrarietà, si ha, di considerare un angolo piuttosto che altro fra i quattro di quelli che formano fra ) due rette.

oll' introduzione del differenziale $d\,s$ dell'arco § 1) noi possiamo esprimere in modo semplice )seni e seni di direzione della tangente. Posno cioè scrivere

$$\cos\theta = \frac{d\,x}{d\,s}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d\,y}{d\,s}.$$

---

;hiamiamo *lunghezza della tangente e della ·male* i segmenti di tangente e di normale ri-

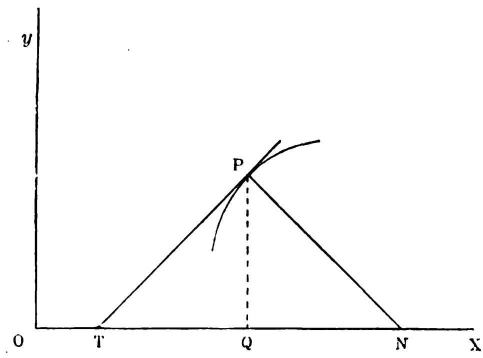


Fig 2.

:ttivamente compresi fra il punto della curva e sse di $x$.

Chiameremo poi *sottangente* e *sunnormale* i segmenti dell'asse di $x$ compresi fra i piedi della tangente e della normale rispettivamente, e il piede $Q$ della perpendicolare abbassata dal punto $P$ della curva.

Ora è facile calcolare le espressioni analitiche di questi quattro segmenti, che indicheremo con $T$, $N$, $S_t$, $S_n$ rispettivamente.

Si ha infatti:

$$T = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} = \pm \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$$

$$N = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta'} = \pm y\sqrt{1+y'^2}$$

$$S_t = \frac{y}{y'},$$

$$S_n = y\, y'.$$

---

Mediante le formole precedenti possiamo risolvere molti problemi sulle tangenti e normali alle curve. Eccone alcuni esempi:

1) Consideriamo una curva la cui equazione sia:

$$y = a\, x^m.$$

Tali curve si chiamano *parabole*; esse, come caso speciale $\left(\text{quando } m = 2, \text{ ovvero } m = \frac{1}{2}\right)$, hanno la *parabola ordinaria* (*parabola conica*).

Possiamo dimostrare una proprietà fondamentale riguardante la sottangente di tali parabole.

Si ha infatti:

$$y' = m\, a\, x^{m-1}$$

donde:

$$S_t = \frac{y}{y'} = \frac{x}{m}$$

cioè: *la sottangente è la $m^{ma}$ parte dell'ascissa.*

Mediante questa proprietà si costruirebbe facilmente la tangente in un punto qualunque.

Nel caso di $m = \frac{1}{2}$, cioè della parabola conica il cui asse sia quello delle $x$, si ha anche:

$$S_n = y\,y' = \frac{1}{2}\,a^2\,.$$

cioè: *la sunnormale è costante*, proprietà nota nella teoria ordinaria delle coniche.

2) Consideriamo la curva logaritmica, cioè quella la cui equazione è:

$$y = a^x\,.$$

Si ha:

$$y' = a^x \log a$$

donde:

$$S_t = \frac{y}{y'} = \frac{1}{\log a}$$

cioè: *nella curva logaritmica la sottangente è costante.*

3) *Vogliamo trovare tutte le curve di cui la normale in ogni punto è costante.* Per risolvere questo problema dobbiamo porre:

$$y\sqrt{1 - y'^2} = a,$$

donde:

$$y'^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2}$$

ovvero:

$$\frac{y\,y'}{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Ora si vede che il primo membro è la derivata di

$$-\sqrt{a^2 - y^2},$$

mentre possiamo dire che il secondo membro è la derivata di $x + c$ (essendo $c$ una qualunque costante); onde infine si ha:

$$-\sqrt{a^2 - y^2} = x + c$$

cioè:

$$y^2 + (x + c)^2 = a^2$$

cioè *le curve richieste sono cerchi di raggio $a$, e che hanno il centro sull'asse delle $x$.*

---

Dimostriamo ora alcuni teoremi fondamentali sulle tangenti di una curva algebrica.

*La equazione della tangente di una curva algebrica di ordine $m$, è al massimo di grado $m - 1$ rispetto alle coordinate $x, y$ del punto di contatto.*

In primo luogo osserviamo che, raccogliendo i termini che hanno lo stesso grado in $x, y$, l'equazione di una curva algebrica di ordine $m$ può sempre porsi sotto la forma:

$$f_m(x\,y) + f_{m-1}(x\,y) + \ldots + f_0 = 0,$$

dove in generale con $f_r(x\,y)$ s'intende una funzione omogenea, razionale, intera di $x, y$ di grado $r$.

L'equazione della tangente può scriversi:

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

donde:

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} =$$

$$= \left(x\frac{\partial f_m}{\partial x} + y\frac{\partial f_m}{\partial y}\right) + \left(x\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x} + y\frac{\partial f_{m-1}}{\partial y}\right) + \ldots$$

e pel noto teorema delle funzioni omogenee si ha:

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = m f_m + (m-1) f_{m-1} + \ldots$$

Intanto le coordinate $x$, $y$ debbono soddisfare alla relazione:

$$f_m + f_{m-1} + \ldots = 0$$

per mezzo della quale si può eliminare $f_m$ dalla equazione precedente, e resta allora un'espressione di grado $m-1$ in $x$, $y$, considerando che $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ sono già di grado $m-1$.

Di qui si ricava come corollario che: *Il numero delle tangenti che da un punto si possono condurre ad una curva algebrica generale di ordine $m$, è dato da $m(m-1)$.*

Infatti se l'equazione della tangente è di grado $m-1$ nelle coordinate del punto di contatto, sia essa indicata con:

$$T_{m-1}(X, Y, x, y) = 0$$

che è di primo grado in $X$, $Y$ e di grado $m-1$ in $x$, $y$. Facendo che questa passi pel punto fisso $\alpha, \beta$, si ha una condizione a cui deve soddisfare il punto di contatto $(x\, y)$ di una tangente passante per $(\alpha\, \beta)$. Tale condizione è:

$$T_{m-1}(\alpha, \beta, x, y) = 0.$$

Questa rappresenterà una nuova curva algebrica di ordine $m-1$, che nelle sue $(m-1)\, m$ intersezioni colla curva data, dà altrettanti punti di contatto di tutte le possibili tangenti reali o immaginarie condotte dal punto $(\alpha\, \beta)$ alla curva.

Il numero delle tangenti che da un punto si possono condurre ad una curva si suol chiamare la *classe* della curva. Onde: *per una curva algebrica generale la classe è in generale* $m(m-1)$ *se* $m$ *è l'ordine della curva.*

§ 3. **Ricerca degli assintoti di una curva piana.** — Immaginiamo una curva che abbia un ramo all'infinito. Costruiamo la tangente nei diversi punti di questo ramo, e poi facciamo tendere all'$\infty$ il punto di contatto. Se allora la tangente tende ad una posizione limite, tale sua posizione limite, si chiamerà un *assintoto* della curva. Un assintoto può dunque considerarsi come la tangente alla curva in un punto all'infinito.

*L'equazione* della tangente in un punto a distanza finita è

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

cioè

$$Y - \frac{dy}{dx}X - \left(y - \frac{dy}{dx}x\right) = 0.$$

I coefficienti di tale equazione sono

$$\frac{dy}{dx}, \qquad y - \frac{dy}{dx}x.$$

Se per $x = \infty, y = \infty$ tali espressioni hanno limiti determinati e finiti, sostituiti tali limiti nell'equazione soprascritta della tangente, si ha l'equazione dell'assintoto. Resta così trovato il metodo generale per la ricerca dell'equazione degli *assintoti*.

Per la ricerca dei limiti di cui si parla si può ricordare che (v. Cap. II, § 1) il limite di $\frac{dy}{dx}$ per $x = \infty$ è, sotto certe restrizioni, lo stesso che il limite di $\frac{y}{x}$.

---

Passiamo ora ad un esempio.

Prendiamo il caso dell'iperbole, che, come si sa, ha due assintoti.

Se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è l'equazione dell'iperbole, i suoi due assintoti sono dati da:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

cioè

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad , \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Ritroviamo questo risultato mediante il metod superiormente indicato.

Dobbiamo trovare i due limiti:

$$\lim\frac{dy}{dx} \quad , \quad \lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

per $x$, $y$ eguali all'infinito.

Ora:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}$$

$$\lim\frac{x}{y}=\lim\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\lim\frac{y}{x}\frac{a^2}{b^2};$$

onde, se si pone

$$\lim\frac{x}{y}=A$$

si ha:

$$A=\frac{1}{A}\frac{a^2}{b^2}$$

cioè:

$$A^2=\frac{a^2}{b^2} \quad , \quad A=\pm\frac{a}{b}.$$

e quindi:

$$\lim \frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a}.$$

Inoltre:

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\left(y - \frac{x^2}{y}\frac{b^2}{a^2}\right) =$$

$$= \lim \frac{y^2 a^2 - x^2 b^2}{y a^2} = \lim \frac{-b^2}{y} = 0,$$

onde in fine si hanno per equazioni dei due assintoti quelle già segnate sopra.

§ 4. **Concavità e convessità delle curve piane rispetto all'asse delle x. — Inflessione.** — Consideriamo un punto $M$ di una curva e la tangente in $M$. Se sulla curva un intorno sufficientemente piccolo di $M$ sta tutto da una parte della tangente, allora si dirà che la curva in quel punto è *concava o convessa* rispetto ad una retta qualunque, p. es., rispetto all'asse delle $x$; propriamente si dirà *convessa rispetto all'asse delle* $x$ quando l'intorno del punto $M$ sulla curva si trova tutto in uno dei due angoli ottusi che la tangente forma con $x$, e si dirà *concava* quando quell'intorno si trova tutto in uno dei due angoli acuti.

Così la curva disegnata nella fig. 3, qui sotto, è convessa in $M'$ ed è concava in $M$.

Se poi l'intorno di $M$ sulla curva non si trova tutto da una stessa parte della tangente, allora il punto $M$ si dirà un punto d'*inflessione* o di *flesso* (v. fig. 4).

*Passiamo a studiare* il criterio per riconoscere

se in un punto una curva è concava, conve
oppure ha un punto d'inflessione.

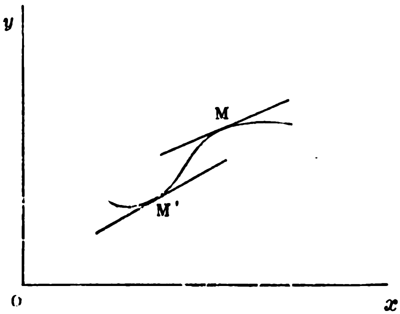


Fig.

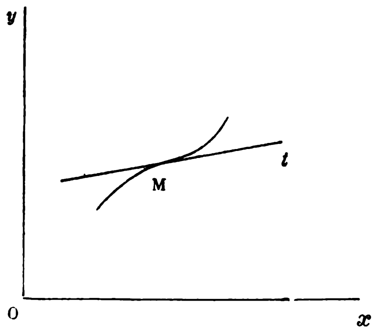


Fig. 4.

Perchè la curva sia concava o convessa in
necessario che aumentando o diminuendo l'asc
$x$ di una quantità $h$, l'ordinata della tangente

sempre maggiore o sempre minore in valore assoluto dell'ordinata della curva.

Ora l'equazione della tangente è:

$$Y - y = \frac{d\,y}{d\,x}(X - x)$$

onde aumentando la $X$ di $h$ si ha che sulla tangente la $Y$ aumenterà di

$$\frac{d\,y}{d\,x}h.$$

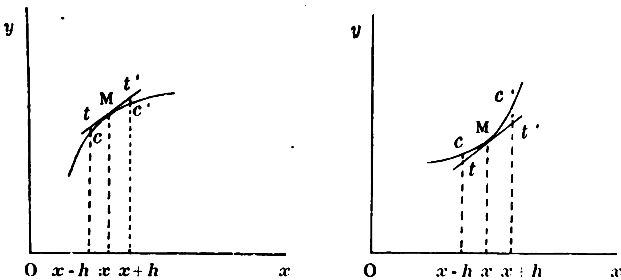


**Fig. 5.**

Invece sulla curva l'ordinata si aumenta di

$$f(x + h) - f(x).$$

La condizione necessaria per la concavità o convessità è dunque che

$$f(x + h) - f(x) - \frac{d\,y}{d\,x}h$$

sia sempre negativa ovvero sempre positiva qua-*lunque sia il segno* di *h*.

Ciò però nel caso che $M$ abbia ordinata positiva. Se $M$ ha invece ordinata negativa, si ha il contrario, cioè per la concavità o convessità, l'espressione precedente deve essere rispettivamente o sempre positiva o sempre negativa.

Ora per una formola nota:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+$$
$$+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x+\theta_m h)$$

ed essendo:

$$y=f(x)$$

e supposto in generale che:

$$f''(x)=0\ldots\ldots\ldots\ldots f^{(m-1)}(x)=0\,,$$

e che $f^{(m)}(x)$ sia diverso da zero si ha:

$$f(x+h)-f(x)-h\frac{dy}{dx}=\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x+\theta_m h)\,,$$

Poichè $f^{(m)}(x)$, *non* si annulla nel punto $x$, *e si suppone che essa sia una funzione continua*, si potrà trovare un $h=h_1$ così piccolo che per tutti gli $h$ da $-h_1$ a $+h_1$ la $f^m(x+\theta_m h)$ sia sempre del medesimo segno, e propriamente del segno di $f^m(x)$; il cangiamento di segno del secondo membro della precedente formola dipenderà dunque dalla parità o disparità di $m$; e propriamente se $m$ è pari, quel secondo membro *non* muterà segno col mutare il segno di $h$, e sarà sempre del segno di $f^{(m)}(x)$; e se $m$ è dispari muterà certamente segno col mutare il segno di h.

Possiamo dunque dire:

*Se m è pari, cioè è pari l'ordine della derivata di ordine più basso (a cominciare dalla seconda) che non si annulla insieme a tutte le precedenti nel punto $x$, e l'ordinata del punto della curva è positiva, la curva in $x$ sarà convessa o concava secondochè $f^{(m)}(x)$ è una quantità positiva o negativa. Se invece l'ordinata del punto della curva è negativa allora si ha inversamente la convessità o concavità secondochè $f^{(m)}(x)$ è negativo o positivo; se poi m è dispari, il punto considerato è un punto d'inflessione.*

Raccogliendo i due casi, dell'ordinata positiva e dell'ordinata negativa, si può dire semplicemente così:

*Si ha la concavità o convessità secondochè il prodotto $f(x)f^{(m)}(x)$, dell'ordinata per la derivata $m^{ma}$ dell'ordinata stessa ($m$ pari $\geqq 2$), è negativo o positivo.*

È chiaro che questo teorema ha molta analogia con quello relativo ai massimi e minimi delle funzioni rappresentabili mediante curve.

Dalle cose dette si raccoglie ancora che perchè il punto $M$ della curva sia un punto d'inflessione, deve essere zero la seconda derivata $f''(x)$, onde *per trovare i punti d'inflessione basta considerare i punti che annullano $f''(x)$. Fra questi saranno compresi i punti d'inflessione (se ve ne esistono).*

Passiamo ad alcuni esempi.

1. Sia $y = \operatorname{sen} x$.

La curva rappresentata da tale equazione è la *così detta sinusoide.*

Si ha:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \cos x \quad , \quad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,\text{sen}\,x, \ldots$$

I punti d'inflessione sono compresi fra quelli in cui:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,\text{sen}\,x = 0$$

cioè per $x = 0,\ \pi,\ 2\,\pi \ldots.$

Per tali punti la $y$ è sempre zero e $\frac{d^3\,y}{d\,x^3}$ é diversa da zero; quindi tutti questi punti sono tutti punti d'inflessione ed inoltre essi sono tutti situati sull'asse di $x$.

Per ogni altro punto si ha

$$y\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,\text{sen}^2\,x$$

cioè tal prodotto è negativo e quindi la curva volge sempre la sua concavità all'asse delle $x$.

2. Sia la curva di 4° ordine:

$$y = x^4 - 6\,x^2 + x + 2.$$

Si ha

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 4\,x^3 - 12\,x + 1$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 12\,x^2 - 12$$

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = 24\,x$$

La $\frac{d^2 y}{d x^2}$ si annulla per $x = \pm 1$ e per tali punti non si annulla la 3ª derivata, onde tali punti corrispondono a punti d'inflessione.

Pel punto $x = 0$ la curva è *concava* rispetto all'asse delle $x$.

§ 5. **Curvatura delle linee piane**. — Consideriamo su di una curva piana un arco $A\,B$ e conduciamo le tangenti negli estremi dell'arco. Queste tangenti verranno a formare fra loro un certo angolo, il quale varia se, lasciando fisso uno degli estremi dell'arco, si fa variare l'altro; questo angolo, che si chiama *angolo di contingenza*, può essere misurato dalla lunghezza dell'arco di cerchio di raggio 1 da esso sotteso, e *da ora in poi, resta sempre inteso che, se per brevità adoperiamo la parola* angolo, *vogliamo però sempre alludere alla lunghezza del corrispondente arco di cerchio di raggio* 1. Il rapporto fra tale arco di cerchio di raggio 1 e l'arco della curva è ciò che si chiama *curvatura media dell'arco*. Evidentemente l'angolo delle due tangenti, supposto fisso uno degli estremi dell'arco, è una funzione della lunghezza dell'arco; se l'arco tende a zero, anche l'angolo delle tangenti tenderà a zero, perchè le due tangenti tendono a coincidere; però il limite del rapporto fra l'angolo e l'arco, tendenti ambedue a zero, è una quantità in generale finita e determinata, ed è propriamente la derivata dell'angolo considerato come funzione dell'arco. Tale limite è ciò che diciamo *curvatura della curva nel punto considerato*.

Passeremo ora a trovare l'espressione analitica *di questo limite,* e con ciò resterà dimostrato il nostro assunto, che cioè tal limite è in generale una quantità determinata.

Ma prima di far ciò ci è utile definire che cosa si intende per raggio di curvatura.

Immaginiamo che la curva sia un cerchio; allora l'angolo delle due tangenti è uguale all'angolo delle due normali, cioè dei raggi, e l'arco è uguale a tale angolo moltiplicato per il raggio; dunque il rapporto dell'angolo delle due tangenti all'arco è $\frac{1}{R}$, se $R$ è il raggio del cerchio; cioè *è l'inverso del raggio ed è costante in tutti i punti.*

Perciò quando noi avremo trovata la curvatura di una curva in un punto potremo paragonarla con quella di un cerchio che abbia per raggio l'inversa della curvatura trovata. Il raggio $R$ di tal cerchio lo chiameremo *raggio di curvatura della curva in quel punto.*

Immaginiamo poi un cerchio di raggio $R$, tangente alla curva nel punto che si considera. Di tali cerchi se ne può costruire due, da parti opposte della retta tangente; ma è facile riconoscere che se consideriamo degli archetti infinitesimi, attorno al punto, su essi e sulla curva, per uno di essi si verificherà che quest'archetto sta, insieme con quello della curva, da *una medesima parte* della tangente e per l'altro no. Il primo dei due cerchi lo chiameremo *cerchio di curvatura.*

Passiamo ora a calcolare la curvatura, e quindi il raggio di curvatura.

Chiamiamo $\theta$ l'angolo delle due tangenti all'estremo dell'arco $AB$, e $\alpha'$, $\alpha$ gli angoli che tali tangenti formano coll'asse di $x$; si ha evidentemente:

$$\theta = \alpha - \alpha'.$$

Sieno $x, y$ le coordinate di $B$; sarà:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Essendo $A$ fisso e $B$ variabile, si ha che $\alpha'$ è fisso e $\alpha$ è variabile come $\theta$, e la derivata di $\theta$ rispetto ad $s$ è la stessa di quella di $\alpha$ rispetto ad $s$.

La curvatura richiesta sarà dunque:

$$\frac{d\alpha}{ds}.$$

Se $x, y$ si immaginano funzioni di un'altra variabile $t$, $\alpha$ ed $s$ saranno funzioni di $t$ e

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}},$$

e resta a calcolare i due termini di questo rapporto.

Ora essendo:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

si ha, derivando rispetto a $t$:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

mentre (v. Cap. VI, § 1)

$$\frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}\cos^2\alpha.$$

Ma

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

onde infine:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

e quindi chiamando $R$ il raggio di curvatura:

$$R=\frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \tag{1}$$

In questa formola rimane ancora indeterminata la scelta della variabile indipendente; se scegliamo $x$ per variabile indipendente, sarà

$$\frac{dx}{dt}=1 \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2}=0$$

e si avrà:

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Di qui si vede che per i punti della curva in cui $y'' = 0$, cioè per i flessi, si ha $R = \infty$, cioè la curvatura della curva in quel punto è paragonabile a quella di una retta; il cerchio di curvatura diventa la retta tangente nel flesso.

Dalle formole precedenti risulta che implicitamente noi abbiamo ammesso, per giungere a quelle formole, che le coordinate $x, y$ considerate funzioni di una terza variabile, o anche considerate funzione l'una dell'altra, ammettano le derivate prime e seconde determinate e finite; perchè infatti nelle formole precedenti compariscono le derivate sino a quelle di 2° ordine.

---

Possiamo dare altre forme all'espressione precedentemente data di $R$.

Immaginiamo p. es. di prendere l'arco $s$ per variabile indipendente.

Allora si ha:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{d s^2} \frac{d x}{d s} - \frac{d^2 x}{d s^2} \frac{d y}{d s} \tag{3}$$

e ricordando la formola identica (v. Cap. VI, § 1).

$$\frac{d^2 x}{d s^2} \frac{d x}{d s} + \frac{d^2 y}{d s^2} \frac{d y}{d s} = 0, \tag{4}$$

fra le due formole eliminando rispettivamente $\frac{d^2 x}{d s^2}$, ovvero $\frac{d^2 y}{d s^2}$ e ricordando che:

$$d x^2 + d y^2 = d s^2$$

si ha:

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{d^2 y}{d s^2}}{\frac{d x}{d s}}=-\frac{\frac{d^2 x}{d s^2}}{\frac{d y}{d s}}$$

Inoltre quadriamo le (3) e (4); si ha:

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)^2\left(\frac{d x}{d s}\right)^2+\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)^2\left(\frac{d y}{d s}\right)^2-$$
$$-2\frac{d^2 y}{d s^2}\frac{d^2 x}{d s^2}\frac{d y}{d s}\frac{d x}{d s}$$

$$0=\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)^2\left(\frac{d y}{d s}\right)^2+\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)^2\left(\frac{d x}{d s}\right)^2+$$
$$+2\frac{d^2 x}{d s^2}\frac{d^2 y}{d s^2}\frac{d x}{d s}\frac{d y}{d s},$$

e sommando si ha:

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)^2,$$

Supponiamo infine che la curva sia espr
coordinate polari. Allora servendosi delle f

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\operatorname{sen}\theta,$$

l'espressione di $R$ diventa:

$$R=\frac{\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^3+\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3+2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\rho\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}-\rho\frac{d^2\rho}{dt^2}\ldots}$$

e prendendo $\theta$ per variabile indipendente si ha:

$$R = \frac{(\rho + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

indicando con $\rho' \rho''$ le derivate di $\rho$ rispetto a $\theta$.

---

Passiamo ora ad alcune applicazioni.

1. *Vogliamo dimostrare che il cerchio è la sola curva che ha la curvatura costante.* Dobbiamo far vedere che ponendo eguale a costante la curvatura per ogni punto, si giunge all'equazione del cerchio.

Indichiamo con $\theta, \theta'$ gli angoli che le tangenti alla curva in due punti vicini fanno coll'asse di $x$, e con $\alpha$ l'angolo che le due tangenti formano fra loro (*angolo di contingenza*); si ha $\alpha = \theta - \theta'$, e quindi, lasciando fisso $\theta'$, $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$, e dovendo porre $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} =$ cost., risulta:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} = \text{cost.}$$

Intanto:

$$dx = ds \cos\theta \quad , \quad dy = ds \operatorname{sen}\theta$$

quindi

$$dx = R\cos\theta\, d\theta \quad , \quad dy = R \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

donde

$$x - x_0 = R \operatorname{sen}\theta$$
$$y - y_0 = -R\cos\theta.$$

Ed eliminando $\theta$ si ha:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

che è l'equazione di un cerchio.

2. Si abbia una conica la cui equazione, com si sa, può sempre porsi sotto la forma:

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Si ha:

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q$$

donde, avendo presente il valore di $y^2$, si ha ancora

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2 \; .$$

onde, a meno del segno:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, y^3}{p^2} = \frac{(y^2 + y^2 y'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Ora il quadrato della normale alla curva è dato dalla formola (v. pag. 230):

$$N^2 = y^2 + y^2 y'^2$$

onde si ha:

$$R = \frac{N^3}{p^2}$$

cioè:

*Nelle coniche il raggio di curvatura è proporzionale al cubo della normale.*

Si noti però che la ***lunghezza*** della normale è dipendente essenzialmente dalla posizione dell'asse delle $x$; ora avendo posto l'equazione della conica sotto la forma:

$$y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2$$

s'intende, nel precedente teorema, che l'asse $x$ sia uno degli assi di simmetria della conica, e inoltre che la conica passi per l'origine. È per una conica in tal posizione che si verifica il teorema enunciato.

§ 6. **Centro di curvatura.** — Se in un punto il raggio di curvatura è finito, $y''$ sarà diverso da zero; quindi allora la curva *nell'intorno di quel punto* starà da una medesima parte della tangente; segniamo sulla normale alla curva in quel punto da questa medesima parte, e a contare dal punto della curva, un segmento eguale al raggio di curvatura; l'estremo di questo segmento sarà il cosidetto *centro di curvatura.*

Cominciamo a dimostrare il seguente teorema:

*Il centro di curvatura in un punto $P$ di una curva piana è il punto della normale verso cui tende il punto d'incontro della normale in $P$ colla normale in un punto vicino $P'$, quando l'arco $P\,P'$ tende a zero.*

Sia $O$ il punto d'incontro delle due normali in $P$ e $P$. L'angolo delle due tangenti in $P$ e $P'$ sarà eguale all'angolo $P\,O\,P'$ delle due normali.

Sappiamo che il raggio di curvatura $R$ è dato da:

$$R = \lim \frac{\text{arco } P\,P'}{P\,O\,P'}.$$

Ora nel triangolo $P P' O$ si ha:

$$\frac{\text{corda}\, P P'}{\text{sen}\, P O P'} = \frac{P O}{\text{sen}\, P P' O}$$

donde

$$\lim \frac{P P'}{\text{sen}\, P O P'} = \lim \frac{P O}{\text{sen}\, P P' O}$$

e quindi

$$\lim P O = \lim \text{sen}\, P P' O \, \frac{\lim P P'}{\lim \text{sen}\, P O P'}.$$

Ma il limite del rapporto della corda all'arco è l'unità, e quindi in luogo del limite della corda $P P'$ possiamo sostituire il limite dell'arco $P P'$; possiamo perciò scrivere:

$$\lim P O = \lim \text{sen}\, P P' O \, \frac{\lim \text{arco}\, P P'}{\lim \text{sen}\, P O P'}.$$

Ma ancora

$$\frac{\lim \text{sen}\, P O P'}{\lim P O P'} = 1$$

dunque

$$\lim P O = \lim \text{sen}\, P P' O \lim \frac{\text{arco}\, P P'}{P O P'} = R$$

poichè l'angolo $P P' O$ tende a $90^{\circ}$, e quindi il suo *seno* tende a 1.

Si ha dunque:

$$\lim P O = R$$

*come si voleva dimostrare.*

Passiamo ora a calcolare le coordinate del centro di curvatura.

Chiamandole $\xi, \eta$, si ha che, se $x\,y$ è il punto corrispondente della curva, le differenze $\xi - x$, $\eta - y$ sono le proiezioni sugli assi $x$, $y$ del raggio $R$ disteso sulla normale. Quindi chiamando $\lambda$, $\mu$ gli angoli che la normale contata nella direzione del centro di curvatura fa cogli assi positivi di $x$, $y$, abbiamo le formole:

$$\xi - x = R \cos \lambda = R \frac{d\,y}{d\,s}$$

$$\eta - y = R \cos \mu = R \frac{d\,x}{d\,s}.$$

Queste formole si intendono prese *a meno del segno,* del quale dobbiamo ora passare ad una più precisa determinazione.

Noi intendiamo prima di tutto che $R$ sia sempre una quantità essenzialmente positiva.

Fissiamo inoltre la direzione positiva della normale e della tangente.

Come direzione positiva della normale assumiamo quella dalla quale sta il centro di curvatura, e come direzione positiva della tangente assumiamo quella direzione della tangente colla quale viene a coincidere la direzione positiva dell'asse di $y$ se il sistema dei due assi coordinati si fa girare nel proprio piano in modo che la direzione positiva della normale venga a coincidere colla direzione positiva dell'asse di $x$. Nella figura qui sotto abbiamo indicato con freccie le direzioni positive della tangente e della normale.

*Stabilire la direzione* positiva della tangente equivale a stabilire la direzione verso cui si immagina crescere l'arco della curva, cioè verso cui si immagina descritta la curva, o, in altri termini, la direzione verso cui si immagina che il $ds$ sia positivo. Nella fig. 6 si vede che $\xi - x$ è positivo, mentre $\eta - y$ è negativo; e inoltre per un $ds$ positivo, sono positivi sia $dx$, che $dy$;

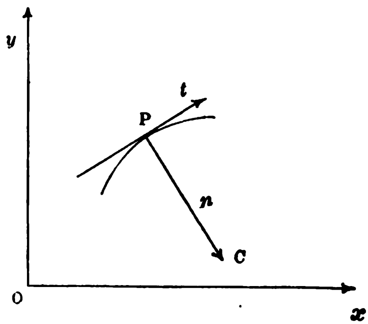


Fig. 6.

onde le formole superiori, supponendo $R$ una quantità positiva, bisogna scriverle:

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= + R\frac{dy}{ds} \\ \eta - y &= - R\frac{dx}{ds}, \end{aligned}\right\} (1)$$

e queste valgono *in valore e in segno.*

Resta ora a vedère se colle formole superiormente date si ha per $R$, una quantità positiva o negativa

Noi per esempio abbiamo trovato

$$\frac{1}{R}=\frac{\dfrac{d^2 y}{d s^2}}{\dfrac{d x}{d s}}=-\frac{\dfrac{d^2 x}{d s^2}}{\dfrac{d y}{d s}}.$$

Si intende che queste formole sono stabilite *a meno del segno;* noi quindi dovremo mutare in tal maniera il segno dei secondi membri che $R$ risulti positivo.

Poniamo:

$$\frac{1}{R}=c\,\frac{\dfrac{d^2 y}{d s^2}}{\dfrac{d x}{d s}}$$

dove $c$ sia $\pm 1$. Per determinare questa costante $c$ possiamo servirci della figura particolare disegnata sopra. In essa si vede che $d^2 y$ è negativo perchè la curva è concava rispetto all'asse di $x$; mentre per un $d\,y$ positivo si ha un $d\,s$ positivo.

Onde $c=-1$, e perciò volendo intendere per $R$ una quantità positiva, si ha in valore e segno, la eguaglianza

$$\frac{1}{R}=-\frac{\dfrac{d^2 y}{d s^2}}{\dfrac{d x}{d s}}$$

e quindi anche (v. § preced.)

$$\frac{1}{R}=+\frac{\dfrac{d^2 x}{d s^2}}{\dfrac{d y}{d s}}.$$

§ 7. **Evolute ed evolventi.** — Per ogni punto della curva vi è un centro di curvatura corrispondente; il luogo di tutti i centri di curvatura formerà una curva continua che si chiama *evoluta* della curva data, mentre questa si chiama *evolvente* di quella. Si adoperano anche i nomi di *sviluppata e sviluppante.*

I due problemi fondamentali che si presentano qui sono:

1. *Data la curva trovare l'evoluta.*

2. *Reciprocamente, data l'evoluta trovare la curva.*

In quanto al primo problema osserviamo che noi abbiamo trovato nel paragrafo precedente le coordinate $\xi\,\eta$ di un punto dell'evoluta; onde supposto che le $x\,y$ della curva si esprimano in funzione di un unico parametro $u$, si esprimeranno mediante le dette formole, le $\xi, \eta$ mediante $u$, ed eliminando poi $u$ fra tali due relazioni si ha l'equazione fra $\xi, \eta$ che rappresenta l'evoluta.

Passeremo ora, prima a trovare alcune proprietà dell'evoluta, e poi applicheremo questo metodo ad alcuni casi speciali.

Derivando rispetto ad $s$ le formole (1) del paragrafo precedente si ha:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{ds} + R\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dR}{ds}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dR}{ds}\frac{dx}{ds}.$$

Ora nel paragrafo precedente abbiamo trovato esattamente in valore ed in segno:

$$\frac{1}{R} = + \frac{\dfrac{d^2 x}{d s^2}}{\dfrac{d y}{d s}} = - \frac{\dfrac{d^2 y}{d s^2}}{\dfrac{d x}{d s}}$$

e quindi resta:

$$\frac{d \xi}{d s} = + \frac{d R}{d s} \frac{d y}{d s}$$

$$\frac{d \eta}{d s} = - \frac{d R}{d s} \cdot \frac{d x}{d s}$$

donde:

$$\frac{d \eta}{d \xi} = - \frac{d x}{d y} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \qquad (1)$$

se $\theta$ è l'angolo che la tangente alla curva data fa coll'asse delle $x$; e inoltre:

$$d \xi^2 + d \eta^2 = d R^2. \qquad (2)$$

Poichè il primo membro di (1) rappresenta la tangente dell'angolo che la tangente all'evoluta fa coll'asse delle $x$, e poichè troviamo che tale tangente trigonometrica è l'inversa di quella dell'angolo che la tangente alla curva fa col medesimo asse, si ha che *la tangente all'evoluta è perpendicolare alla tangente alla curva, cioè è la normale alla curva.*

Inoltre la (2) ci dice che il differenziale dell'arco di evoluta è eguale al differenziale di $R$, cioè

$$d \sigma = d R$$

e quindi $\sigma$ e $R$ differiranno per una costante, cioè

$$\sigma = R + C;$$

se cominciamo a contar l'arco di evoluta da un punto in cui il raggio $R$ abbia un valore particolare $R_0$, si ha che per $x=0$ deve essere $R=R_0$ e quindi $C=-R_0$, onde:

$$\sigma = R - R_0$$

cioè: *l'arco di evoluta è la differenza fra i raggi di curvatura corrispondenti ai due punti estremi dell'arco.*

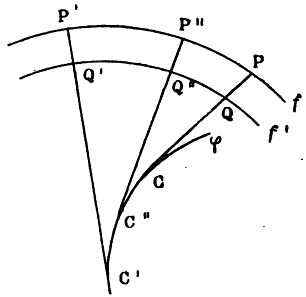


**Fig. 7.**

L'arco $CC''$ dell'evoluta è la differenza fra le due rette $PC$ e $P''C''$. Onde possiamo dire che se si suppone attaccato un filo attorno all'evoluta, fisso in un punto $C'$ di essa e avvolto attorno essa lungo l'arco $C'C$, mentre poi in $C$ si stacchi da $\varphi$ e in linea retta vada fino in $P$, svolgendo il filo, mantenendolo sempre teso, l'estremo $P$ descriverà la curva data.

Infatti in una posizione qualunque, p. es. $P''C''$, essendo il filo sempre tangente a $\varphi$, esso sarà *normale* alla curva data $f$. Inoltre se $P''$ è il punto in cui taglia la curva data, deve essere $C'' P'' - C P$ eguale all'arco $C'' C$; ma la quantità di cui nello svolgimento si è venuta ad allungare la parte rettilinea del filo è esattamente eguale all'arco $C C''$, onde la nuova posizione di $P$ coincide con $P''$ sulla curva $f$.

Per questa proprietà l'evoluta si chiama anche *sviluppata*; e $f$ si chiama *sviluppante.*

Ora si domanda: se in luogo di scegliere il punto $P$ del filo, ne scelgo un altro, p. es., $Q$, esso descriverà un'altra certa curva $f'$; tale altra curva si può considerare anche come evolvente di $\varphi$?

Questo problema si connette evidentemente coll'altro cui abbiamo accennato in principio: data la evoluta, come si trova la evolvente?

Io dico che la $f'$ è effettivamente una evolvente di $\varphi$.

Infatti troviamo le coordinate $x, y$ di un punto qualunque $Q''$ di $f'$, supposto che $\xi, \eta$ sieno le coordinate di $C''$ cioè del punto corrispondente dell'evoluta $\varphi$.

La lunghezza $C'' Q'$ è uguale alla lunghezza completa del filo da $C'$ fino a $Q''$ diminuita dell'arco $C'' C'$ cioè $Q'' C'' = t - \sigma$, indicando con $\sigma$ l'arco di $\varphi$ contato dall'origine fissa $C'$; inoltre i coseni degli angoli di direzione di $Q'' C''$ (essendo $Q'' C''$ tangente a $\varphi$) sono rispettivamente $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$, onde infine si ha

$$x - \xi = (t - \sigma)\frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$y - \eta = (t - \sigma)\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Il segno del secondo membro in queste formole può determinarsi considerando una speciale figura, con un ragionamento simile a quello fatto a pag. 253-254, e si trova così che *queste formole sussistono anche nel segno.*

Dico che la curva le cui coordinate sono $x$, $y$ ha per evoluta $\varphi$.

Basterà perciò dimostrare che $QC$ è la normale alla curva.

Giacchè è chiaro che la posizione limite del punto d'incontro di due tangenti di $\varphi$ che tendono a coincidere è il punto di contatto, e siccome noi sappiamo che la posizione limite dell'incontro di due normali di $f'$ è il centro di curvatura di $f'$, così quando avremo dimostrato che $QC$ è normale di $f'$, ne deriveremo subito che i punti di $\varphi$ sono i centri di curvatura di $f'$.

Ora si ha:

$$dx = d\xi + (t-\sigma)\, d\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right) - \frac{d\xi}{d\sigma}\, d\sigma = (t-\sigma)\, d\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)$$

$$dy = d\eta + (t-\sigma)\, d\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) - \frac{d\eta}{d\sigma}\, d\sigma = (t-\sigma)\, d\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)$$

donde:

$$dx\, d\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) - dy\, d\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right) = 0.$$

Ma da:

$$\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 = 1$$

si ha:

$$d\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)\frac{d\xi}{d\sigma} + d\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)\frac{d\eta}{d\sigma} = 0$$

onde infine:

$$dx\frac{d\xi}{d\sigma}+dy\frac{d\eta}{d\sigma}=0$$

o anche

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Questa relazione ci dice che i coefficienti angolari delle tangenti alle curve $f'$ e $\varphi$ sono inversi fra loro e di segno contrario, e quindi le due tangenti alle curve $f'$ e $\varphi$ sono fra loro perpendicolari; onde la $Q''\,C''$, che è tangente a $\varphi$, sarà normale a $f'$.

Questa ricerca, oltre darci il mezzo per costruire la evolvente di una curva data, ci dice anche che di tali evolventi ve ne sono infinite corrispondenti agli infiniti valori $t$, e inoltre non ne esistono altre all'infuori di quelle date dalle formole precedenti; perchè ogni curva che ha per evoluta la $\varphi$ deve potersi descrivere sviluppando un filo avvolto attorno la $\varphi$, e quindi rientra sempre nella serie di curve $f, f' \ldots.$

Tutte queste curve $f f' \ldots$ hanno inoltre nei punti corrispondenti le stesse normali, e quindi avranno le tangenti parallele.

Passiamo ora ad applicare le formole precedenti ad alcuni esempi:

1. *Si voglia l'evoluta dell'ellisse*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Possiamo esprimere le coordinate $x$, $y$ in funzione di un parametro $t$ ponendo

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t.$$

Si ha allora:

$$d\,x = -a \operatorname{sen} t\, d$$
$$d\,y = b \cos t\, d\,t$$
$$d^2 x = -a \cos t\, d\,t^2$$
$$d^2 y = -b \operatorname{sen} t\, d\,t^2$$

onde:

$$d\,s = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, d\,t$$
$$d\,x\, d^2 y - d\,y\, d^2 x = a\,b\,d\,t^3$$

e perciò

$$\xi - x = -\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}{a} \cos t$$

$$\eta - y = -\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}{b} \operatorname{sen} t$$

$$\xi = a \cos t - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}{a} \cos t = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$$

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t.$$

Se si elimina $t$ si ha la relazione fra $\xi, \eta$ che rappresenta la evoluta. Si ha:

$$(a\,\xi)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \cos^2 t$$
$$(b\,\eta)^{\frac{2}{3}} = (b^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2 t$$

donde

$$(a\,\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\,\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

2. Passiamo a trovare l'evolvente di un cerchio:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

Dobbiamo applicare le formole:

$$x = \xi + (t - \sigma)\frac{d\xi}{d\sigma} \quad , \quad y = \eta + (t - \sigma)\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

In primo punto sarà utile esprimere $\xi, \eta$ come funzioni di una terza variabile; e perciò poniamo:

$$\xi = r\cos\theta \quad , \quad \eta = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde

$$\begin{aligned} d\xi &= -r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \\ d\eta &= r\cos\theta\, d\theta \\ d\sigma &= r\, d\theta \\ \sigma &= r\theta \end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta - (t - r\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta + (t - r\theta)\cos\theta. \end{aligned}$$

Eliminando fra queste la $\theta$ si ha l'equazione della *sviluppante o evolvente di un cerchio.*

Dalle due equazioni di sopra si ha:

$$x^2 + y^2 = r^2 + (t - r\theta)^2$$
$$x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta = r$$

donde:

$$\theta = \frac{t \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r}$$

e quindi, sostituendo nella seconda, si ha

$$x\cos\frac{t - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} + \mathrm{sen}\,\frac{t - \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r} = r.$$

*Per ogni* valore di $t$ si ha una sviluppante.

§ 8. **Contatti delle curve.** — Si abbiano due curve di equazioni $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ e le funzioni $f$, $\varphi$ abbiano nel punto $a$ le derivate finite e continue sino a quelle di ordine $n$.

Per una formola nota si ha:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_n h)$$

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\theta'_n h).$$

La differenza delle due ordinate nel punto $a+h$ sarà

$$f(a+h)-\varphi(a+h)=[f(a)-\varphi(a)]+h[f'(a)-\varphi'(a)]+$$
$$+\ldots\ldots+\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(a+\theta_n h)-\varphi^{(n)}(a+\theta'_n h)].$$

Ora se le due curve passano ambedue per $a$ si avrà:

$$f(a)-\varphi(a)=0,$$

e perciò la differenza fra le due ordinate avrà per fattore $h$; è quindi un infinitesimo insieme con $h$.

Se poi è anche:

$$f'(a)-\varphi'(a)=0$$

allora le due curve avranno le tangenti comuni, cioè un contatto in $a$, e la differenza fra le ordinate avrà $h^2$ per fattore, cioè sarà un infinite-di 2° ordine rispetto ad $h$.

In generale, se si ha:

$$f^{(i)}(a)-\varphi^{(i)}(a)=0 \qquad (i=0,1,2,\ldots i)$$

senza che si abbia anche:

$$f^{(i+1)}(a) - \varphi^{(i+1)}(a) = 0$$

si dirà che *le due curve hanno un contatto di ordine i*, ed in tal caso la differenza delle ordinate nell'intorno di $a$ è un infinitesimo di ordine $i+1$ rispetto ad $h$.

Osserviamo che nei contatti di ordine dispari la differenza delle ordinate nel punto $a+h$ non cangia di segno con $h$, mentre tal differenza cangia di segno con $h$ nei contatti di ordine pari. Ciò significa che nei contatti di ordine dispari, se a destra di $a$ l'ordinata della prima curva è minore di quella della seconda, anche a sinistra accadrà lo stesso, cioè nell'intorno di $a$ la seconda curva starà tutta da una medesima parte rispetto alla prima curva; invece nei contatti di ordine pari se l'ordinata della prima curva è minore di quella della seconda a destra di $a$, ne sarà invece maggiore a sinistra di $a$, cioè le due curve si toccheranno ma intersecandosi.

Si può dimostrare il seguente teorema:

*Se due curve $f$, $\varphi$ hanno fra loro in $a$ un contatto d'ordine $i$, una terza curva $\psi$ che abbia con $f$ un contatto in $a$ d'ordine $k$ ($k < i$) avrà anche coll'altra un contatto dello stesso ordine $k$.*

Infatti per ipotesi si ha che

$$f(a+h) - \varphi(a+h) = h^{i+1} A$$

mentre:

$$f(a+h) - \psi(a+h) = h^{k+1} B,$$

onde:

$$\varphi(a+h) - \psi(a+h) = h^{k+1}(B - h^{i+k}A)$$

cioè la differenza fra le ordinate di $\varphi$ e $\psi$ è un infinitesimo di ordine $k+1$. Se fosse $k > i$, allora $\varphi$, $\psi$ avrebbero almeno un contatto di ordine $i$.

---

Si abbiano due curve $f$, $\varphi$ con un contatto di ordine $i$ in un punto $a$. È facile vedere che *non è possibile condurre fra le due curve una terza curva $\psi$ la quale nei punti prossimi ad $a$ stia compresa fra le due curve date, e che abbia con una delle due curve e quindi anche coll'altra, un contatto di ordine inferiore ad $i$.*

Infatti la differenza:

$$\psi(a+h) - \varphi(a+h)$$

sarebbe un infinitesimo di ordine inferiore ad $i+1$, mentre

$$f(a+h) - \varphi(a+h)$$

è un infinitesimo di ordine $i+1$; onde per $h$ piccolissimo la prima differenza sarebbe maggiore della seconda e quindi il punto di $\psi$ non potrebbe stare compreso fra $f$ e $\varphi$.

---

Vogliamo ora dimostrare che: *una curva avente in un punto, con un'altra fissa, un contatto di ordine $i$, si può considerare come la posizione limite di un'altra curva che passi per $i+1$ punti* *della prima quando questi* $i+1$ *punti si avvicinano indefinitamente.*

Infatti supponiamo il teorema vero per un contatto di ordine $i-1$ e dimostriamo che è vero pel contatto d'ordine $i$.

Se vogliamo che la curva $\varphi$, che ha un contatto d'ordine $i-1$ con $f$, passi per un altro punto di $f$ corrispondente all'ordinata $f(x+h)$, dobbiamo porre la condizione che l'ordinata di $\varphi$ sia uguale a quella di $f$ nel punto $x+h$, cioè che:

$$f(x+h)-\varphi(x+h)=0.$$

Ora sviluppiamo colla formola di TAYLOR il primo membro di questa eguaglianza. Essendo zero le differenze:

$$f(x)-\varphi(x), f'(x)-\varphi'(x), \ldots, f^{(i-1)}(x)-\varphi^{(i-1)}(x)$$

perchè si è supposto che le due curve abbiano un contatto d'ordine $i-1$, si ha che lo sviluppo è

$$0=f(x+h)-\varphi(x+h)=\frac{h^i}{i!}\left[f^{(i)}(x)-\varphi^{(i)}(x)\right]+$$
$$+\frac{h^{i+1}}{(i+1)!}\left[f^{(i+1)}(x+\theta h)-\varphi^{(i+1)}(x+\theta h)\right]$$

e dividendo per $h^i$ e facendo poi convergere $h$ a zero, con che il punto di ascissa $x+h$ viene ad avvicinarsi indefinitamente al punto $x$, si ha:

$$f^{(i)}(x)-\varphi^{(i)}(x)=0,$$

cioè le due curve vengono ad avere un contatto d'ordine $i$.

*Ripetendo* ora lo stesso ragionamento pel caso di $i=1$ si vede che se due curve hanno un punto comune $a$, e un altro punto d'intersezione viene a coincidere con quello, le due curve acquisteranno un contatto di 1° ordine; se poi ancora un altro punto d'intersezione si accosta indefinitamente ad $a$, le due curve verranno ad avere un punto di contatto di secondo ordine, e così di seguito.

Il teorema dimostrato si può enunciare in altro modo, che del resto ha poca precisione ma ha il vantaggio di rappresentare sotto una forma intuitiva la natura del contatto.

Si può dire:

*Se due curve hanno un contatto di ordine $k$ in un punto $a$, passano ambedue per i medesimi $k+1$ punti infinitamente vicini.*

---

Consideriamo ora il contatto di una retta con una curva, cioè consideriamo il contatto della tangente.

L'equazione della tangente è:

$$Y = y + (X - x)\, y'$$

e le derivate di $Y$ rispetto a $X$ sono:

$$y' \ , \quad 0, \quad 0, \ldots$$

Onde se in un punto $x, y$ di una curva, la 2ª derivata di $y$ rispetto ad $x$ non è zero, allora fra la curva e la tangente vi sarà un contatto di 1° ordine. Se poi si ha anche la 2ª derivata zero senza esserlo la terza, si avrà un contatto di 2° ordine, e così di seguito.

§ 9. **Curve osculatrici.** — Immaginiamo fissata una certa curva $f$ e un punto $a$ qualunque su essa, e si abbia l'equazione di un'altra curva $\varphi$ di una determinata specie, e nella quale figurino $i$ costanti arbitrarie. Noi potremo in generale determinare queste costanti in modo che $\varphi$ abbia con $f$ in $a$ un contatto d'ordine $i-1$; dovremo, per far ciò, porre le $i$ equazioni:

$$\begin{aligned} f(a) &= \varphi(a) \\ f'(a) &= \varphi'(a) \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(i-1)}(a) &= \varphi^{(i-1)}(a) \end{aligned}$$

dalle quali ricaveremo i valori delle $i$ costanti, in un sol modo o in più modi.

Si avranno così una o più curve $\varphi$ che avranno con $f$ il massimo contatto che una curva della specie della $\varphi$, possa avere con $f$ in un punto qualunque; tali $\varphi$ si chiamano le *curve osculatrici* di $f$ in $a$.

Bisogna però notare che il punto $a$ si suppone *qualunque* su $f$; per punti speciali di $f$ l'ordine del contatto di una curva $\varphi$ può essere anche maggiore di $i-1$.

Così p. es. immaginiamo l'equazione di una retta nel piano. Essa ha *due* costanti arbitrarie; quindi la retta osculatrice *in un punto qualunque* di $f$ è una tangente ordinaria che ha un contatto di 1° ordine; *però ciò* non toglie che vi possano essere dei punti speciali di $f$ nei quali la tangente abbia un contatto di ordine superiore.

---

Consideriamo ora l'equazione di un cerchio; essa ha tre costanti arbitrarie; quindi al massimo possiamo disporre di queste tre costanti in modo da formare un cerchio che abbia colla $f$ in un punto arbitrario un contatto di 2° ordine.

Il cerchio che sarà così determinato *qualunque sia il punto della curva* sarà il *cerchio osculatore in quel punto.*

In generale il cerchio osculatore, avendo un contatto di secondo ordine, sega la curva.

È facile ora dimostrare che il cerchio osculatore alla curva in un punto non è altro che il *cerchio di curvatura,* cioè quello che ha per centro il centro di curvatura, e per raggio il raggio di curvatura.

Infatti se:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2 \tag{1}$$

è l'equazione di un cerchio, formando le derivate prime e seconde di $y$ rispetto ad $x$, e eguagliandole con quelle ricavate dall'equazione della curva, cioè con $f'(x)$, $f''(x)$, o anche più semplicemente, derivando due volte successive questa equazione totalmente rispetto ad $x$, e poi sostituendo $f'(x)$, $f''(x)$ in luogo di $y'$, $y''$, si ha:

$$\left.\begin{array}{c}(x-\xi)+(y-\eta)f'(x)=0\\ 1+[f'(x)]^2+(y-\eta)f''(x)=0\end{array}\right\}(2)$$

dalle quali si determinerebbero le coordinate $\xi$, $\eta$

del centro del cerchio, se $(x, y)$ è il punto di $f$. Ora si vede che queste equazioni sono le stesse di quelle che servirono a determinare il centro di curvatura.

---

Consideriamo similmente l'equazione di una conica; essa ha cinque costanti arbitrarie; dunque una conica osculatrice ad una curva avrà un contatto di quarto ordine colla curva stessa; e così di seguito.

---

Abbiamo detto che *in generale il cerchio osculatore sega la curva*; onde se in qualche punto della curva noi possiamo *a priori* affermare che il cerchio osculatore o di curvatura *non* sega la curva, possiamo conchiudere che in quel punto vi è un contatto di ordine superiore al secondo e propriamente dispari.

Ciò p. es. si verifica nel vertice della parabola; in uno dei quattro vertici dell'ellisse e così di seguito.

Si può dimostrare che *se il contatto è di ordine dispari, il raggio del cerchio osculatore, o, ciò che è lo stesso, il raggio di curvatura è un massimo o un minimo rispetto ai raggi dei cerchi osculatori nei punti vicini al punto considerato, e reciprocamente.*

Infatti, in primo luogo, dall'equazione:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

ricavando la derivata terza di $y$ rispetto ad $x$ si ha:

$$y''' = -\frac{3\,y'\,y''}{y-\tau},$$

e poichè per ipotesi $y'$ $y''$ (derivate dell'ordinata del cerchio) sono uguali ad $f'(x)$, $f''(x)$ (derivate dell'ordinata della curva), ed inoltre per le formole delle coordinate del centro del cerchio osculatore sappiamo che

$$y - \eta = -\frac{1+f'^2}{f''},$$

si ha:

$$y''' = \frac{3f'f''^2}{1+f'^2}.$$

Vediamo d'altra parte quale espressione risulta per $f'''$, dall'ipotesi che $R$ sia un massimo o minimo.

L'espressione di $R$ è data da:

$$R^2 = \frac{(1+f'^2)^3}{f''^2}.$$

Dobbiamo eguagliare a zero la derivata di $R$ rispetto ad $x$, cioè dobbiamo porre:

$$3(1+f'^2)^2 f' f''^3 - (1+f'^2)^3 f'' f''' = 0$$

donde:

$$f''' = \frac{3f'f''^2}{1+f'^2}$$

che paragonata coll'espressione di $y'''$ dà $f''' = y'''$, *cioè*, se $R$ è massimo o minimo, anche le terze derivate dell'ordinata della curva e dell'ordinata del cerchio sono fra loro eguali, e quindi vi è un contatto di 3° ordine.

Dalle stesse formole si ricava naturalmente anche il teorema reciproco, perchè, ponendo $f''' = y'''$ si ricava:

$$\frac{dR}{dx} = 0.$$

Secondo il risultato generale dimostrato nel paragrafo precedente che cioè una curva che ha con un'altra un contatto di ordine $i$ si può considerare come la posizione limite di una curva che abbia colla prima $i+1$ punti comuni quando questi punti si avvicinano infinitamente, possiamo dire:

*Il cerchio osculatore è la posizione limite del cerchio che ha colla curva la medesima tangente in un punto, e un altro punto comune, quando quest'altro punto si avvicina al primo.*

Oppure:

*Il cerchio osculatore è la posizione limite del cerchio che ha colla curva tre punti comuni quando questi punti si accostano indefinitamente.*

---

Come applicazione di questo, vogliamo ricercare la parabola coll'asse parallelo a quello delle $y$, e che abbia il contatto più intimo possibile colla curva $y = \frac{x^3}{a^2}$ nel punto $x = a$.

L'equazione della parabola sarà in generale:

$$(x - \alpha)^2 = 2\,p\,(y - \beta)$$

dove $\alpha$, $\beta$, $p$ sono costanti da determinare.

Dall'equazione della curva data abbiamo inta

$$y' = \frac{3x^2}{a^2}, y'' = \frac{6x}{a^2}, y''' = \frac{6}{a^2}, y'''' = 0, \ldots$$

mentre dall'equazione della parabola abbiamo

$$y = \frac{(x-\alpha)^2}{2p} + \beta$$

$$y' = \frac{x-a}{p}$$

$$y'' = \frac{1}{p} \quad , \quad y''' = 0.$$

Onde, poichè la $y'''$ della curva data non è z si vede che al più non possiamo far altro, rendere eguali le derivate sino a quelle di 2° dine; quindi al più vi potrà essere un cont di 2° ordine.

Dall'eguaglianza delle derivate seconde si ric (ponendo $x = a$):

$$\frac{6}{a} = \frac{1}{p}$$

cioè:

$$p = \frac{1}{6}a.$$

Dall'eguaglianza delle derivate prime si ha

$$\frac{a-\alpha}{p} = 3$$

cioè:

$$\frac{a-\alpha}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2}a,$$

e quindi dall'eguaglianza delle due $y$ si ha infine:

$$\frac{(a-\alpha)^2}{2p}+\beta=a;$$

donde:

$$\beta=\frac{1}{4}a.$$

L'equazione della richiesta parabola è dunque:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right).$$

§ 10. **Curve inviluppi.** — Immaginiamo una equazione $f(x, y, a)=0$ contenente un certo parametro arbitrario $a$; per ogni valore di $a$ questa equazione rappresenterà una curva. Tutte le curve che così si ottengono, facendo variare $a$ con continuità, possono incontrarsi a due a due in punti, i quali possono tendere a certe posizioni limiti, quando due curve infinitamente vicine tendano a coincidere; il luogo di tutti questi punti limiti si chiama l'*inviluppo delle curve* $f$, che si chiamano a loro volta *inviluppate.*

Un punto dell'inviluppo sarà dato dall'intersezione delle curve:

$$f(x, y, a)=0$$
$$f(x, y, a+\Delta a)=0$$

quando $\Delta a$ converge a zero. Ora la curva

$$\frac{f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)}{\Delta a}=0$$

passa per le medesime intersezioni; quindi, poichè il limite del primo membro di questa relazione per $\Delta a = 0$ è proprio la derivata $\frac{df}{da}$ (supposto che esista), si ha che i limiti delle intersezioni richieste sono date da quelle delle due curve:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, a) &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Per avere quindi l'equazione dell'inviluppo non resta che eliminare $a$ fra queste due equazioni.

---

Le curve inviluppi godono di una proprietà singolare che è quella che ha dato loro il nome.

Si può dimostrare che *ogni curva inviluppata è tangente all'inviluppo.*

Prima di passare a dimostrare questa proprietà è bene ricordare che nelle lezioni precedenti abbiamo già studiato un caso particolare delle curve inviluppo.

Quando abbiamo considerato il luogo dei centri di curvatura di una curva, abbiamo mostrato che questi centri non sono che le posizioni limiti delle intersezioni di due normali consecutive della curva; si vede perciò che l'evoluta di una curva rappresenta l'inviluppo delle sue normali. Abbiamo poi in quella occasione effettivamente dimostrato che ogni normale è tangente all'evoluta, proprietà che rientra, come caso particolare, nel teorema *generale* che vogliamo dimostrare qui.

Dimostreremo che ogni curva $f(x, y, a) = 0$ è *tangente all' inviluppo, o, ciò che è lo stesso, che la curva $f(x, y, a) = 0$ e l'inviluppo, hanno nel punto corrispondente la medesima tangente.*

Infatti l'equazione dell' inviluppo è data dal sistema delle due equazioni:

$$f(x, y, a) = 0$$
$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0.$$

Supponiamo che $(x, y)$ sieno le coordinate del punto della curva $f$ che appartiene all' inviluppo. Per avere il coefficiente angolare della tangente alla curva $f$ dobbiamo ricavare $\frac{dy}{dx}$ dall'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1}$$

e per avere quello della tangente all' inviluppo dobbiamo ricavare la medesima derivata da:

$$\frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0, \tag{2}$$

dove però in luogo di $a$ dobbiamo supporre posto il valore preso dalla seconda equazione.

Ora ponendo per $a$ questo valore, la equazione (2) si riduce alla stessa forma di (1); ma però resta ancora una differenza apparente, inquantochè nella (1) bisogna supporre sostituito per $a$ il valore ricavato da $f(x, y, a) = 0$ e nella (2) bisogna invece supporre sostituito per $a$ il valore preso da $\frac{df}{da} = 0.$

Ora quando $(x, y)$ è il punto comune alla curva e all'inviluppo le due equazioni

$$f(x, y, a) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{(d f x, y, a)}{d a} = 0$$

sono soddisfatte per uno stesso valore di $a$, e quindi l'$a$ ricavata nel primo modo è la stessa dell'$a$ ricavata nel secondo modo; perciò le (1), (2) vengono a coincidere, e quindi i coefficienti angolari delle due tangenti sono eguali.

---

Passiamo a qualche applicazione:

1. Si voglia l'inviluppo delle ellissi concentriche tali che la somma degli assi sia costante, e questi assi stieno sempre situati sulle medesime rette.

La equazione di una siffatta ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1.$$

Derivando rispetto ad $a$ si ha:

$$-\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2y^2}{(k-a)^3} = 0,$$

e questa, unita colla prima, ci dà per equazione dell'inviluppo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

2. Si voglia l'inviluppo delle parabole che hanno il medesimo asse e il cui vertice sia distante da

un punto su quest' asse di una lunghezza eguale alla metà del parametro della parabola.

L'equazione di una siffatta parabola è:

$$x^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Derivando rispetto a $p$ si ha:

$$2x - 2p = 0$$

donde:

$$x = p$$

e quindi per equazione dell'inviluppo si ha:

$$y^2 = 2x\left(x - \frac{1}{2}x\right) = x^2$$

cioè si hanno le due rette:

$$y - x = 0 \quad , \quad y + x = 0$$

che sono le bisettrici degli angoli degli assi.

---

3. Sia $\theta$ l'angolo che la tangente alla curva in un punto forma con l'asse delle $x$. Allora l'equazione della tangente sarà:

$$y - y_0 = (x - x_0)\operatorname{tg}\theta$$

che può scriversi:

$$x \operatorname{sen}\theta - y\cos\theta = f(\theta) \qquad (1)$$

essendo $f(\theta)$ una certa funzione di $\theta$ dipendente *dalla natura* della curva. Le espressioni di $x_0$ $y_0$ in funzione di $\theta$, che servono per trovare la funzione $f(\theta)$, si ricaverebbero dalle due equazioni

$$\varphi(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{d y_0}{d x_0} = \operatorname{tg} \theta.$$

Se noi ora troviamo l'inviluppo di tutte le tangenti dobbiamo riavere la curva data, onde la curva sarà data dall'eliminazione di $\theta$ fra (1) e:

$$x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = f'(\theta) \tag{2}$$

Prendendo $\theta$ per variabile indipendente si possono trovare le coordinate $x, y$ in funzione di $\theta$, cioè:

$$x = f'(\theta) \cos \theta + f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

$$y = f'(\theta) \operatorname{sen} \theta - f(\theta) \cos \theta$$

che differenziate danno:

$$d x = [f''(\theta) + f(\theta)] \cos \theta \, d \theta$$

$$d y = [f''(\theta) + f(\theta)] \operatorname{sen} \theta \, d \theta$$

donde:

$$d s = [f'' \theta + f(\theta)] \, d \theta,$$

ed essendo $d \theta$ l'angolo di contingenza ed essendo $\frac{d s}{d \theta} = R$, (raggio di curvatura) si ha infine

$$R = f''(\theta) + f(\theta)$$

espressione assai rimarchevole del raggio di curvatura in funzione dell'angolo che la tangente fa coll'asse delle $x$.

§ 11. **Tangente e piano normale a una curva storta.** — Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato le curve piane; ora vogliamo passare a studiare le curve nello spazio a tre dimensioni, e che si chiamano *curve storte, o gobbe, o sghembe.*

Immaginiamo una retta che passi per due punti abbastanza vicini di una tal curva; se tali due punti si avvicinano indefinitamente, questa retta (secante) *può* tendere in generale verso una certa posizione limite. In tale posizione la retta si chiama *tangente* alla curva data.

Vogliamo ora incominciare a trovare le equazioni di questa retta tangente.

Sieno:

$$y = f(x)$$
$$z = \varphi(x)$$

le due equazioni della curva. Se

$$x + \Delta x$$
$$y + \Delta y$$
$$z + \Delta z$$

sono le coordinate di un punto della curva prossimo al punto $x, y, z$, la congiungente questi due punti, avrà per proiezione sul piano $xy$ la congiungente i punti:

$$(x, y) \quad , \quad (x + \Delta x \quad , \quad y + \Delta y)$$

e sul piano $xz$ la congiungente i punti

$$(x, z) \quad , \quad (x + \Delta x \quad , \quad z + \Delta z).$$

Tali proiezioni sono dunque:

$$Y - y = (X - x)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$Z - z = (X - x)\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

e nel limite diventano:

$$\left.\begin{aligned} Y - y &= (X - x)\frac{d y}{d x} \\ Z - z &= (X - x)\frac{d z}{d x}. \end{aligned}\right\}$$

Queste ultime rappresentano dunque le equazioni della tangente alla curva data. Esse si possono comprendere sotto una formola unica e simmetrica, cioè:

$$\frac{X - x}{d x} = \frac{Y - y}{d y} = \frac{Z - z}{d z}. \qquad (1)$$

Se le coordinate $x, y, z$ di un punto della curva sono date in funzione di una quarta variabile $t$, si ha:

$$d x = x'(t)\, d t\ ,\ d y = y'(t)\, d t\ ,\ d z = z'(t)\, d t$$

e quindi allora le equazioni della tangente verranno sotto la forma

$$\frac{X - x}{x'(t)} = \frac{Y - y}{y'(t)} = \frac{Z - z}{z'(t)} \qquad (2)$$

Supponiamo inoltre che le equazioni della curva vengano date sotto la forma generale:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad F(x, y, z) = 0.$$

Allora avendosi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} d x + \frac{\partial f}{\partial y} d y + \frac{\partial f}{\partial z} d z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} d x + \frac{\partial F}{\partial y} d y + \frac{\partial F}{\partial z} d z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dovremmo ricavare da queste equazioni i valori di $d x$, $d y$, $d z$, che risultano proporzionali ai determinanti di secondo ordine formati colla matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{matrix} \right\| , \tag{4}$$

e indi dovremmo porre questi valori nei denominatori della formola (1).

Però possiamo anche procedere diversamente.

Osserviamo che per effetto delle (1) i binomi

$$X - x \quad , \quad Y - y \quad , \quad Z - z$$

divengono proporzionali a $d x$, $d y$, $d z$; quindi nelle (3) se noi sostituiamo i detti binomi a questi differenziali, abbiamo due equazioni che rappresenteranno la tangente richiesta, cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Consideriamo ora il piano che passa pel punto di contatto della tangente e che è ad essa perpendicolare; questo piano si chiama il *piano normale alla curva.*

Per trovare l'equazione del piano normale non c'è che applicare le regole della Geometria analitica per condurre il piano perpendicolare alla retta rappresentata dalle equazioni (1).

L'equazione di un tal piano sarà in generale

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + C = 0$$

essendo $C$ una costante dipendente dal punto pel quale si vuole far passare il piano.

Ora si è detto che il piano normale deve passare pel punto di contatto, perciò la sua equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate $(x, y, z)$, onde:

$$C = -(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

e perciò il piano normale è:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0. \qquad (6)$$

Se le equazioni della curva sono date sotto la forma:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad F(x, y, z) = 0$$

per modo che, come abbiamo visto, i differenziali $dx, dy, dz$ risultano proporzionali ai minori di 2° ordine dati dalla matrice (4), si ha per equazione del piano normale:

$$(X-x)\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} \end{vmatrix} +$$

$$+ (Z-z)\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Possiamo ottenere subito le formole che danno i coseni di direzione della tangente alla curva; formole che del resto le abbiamo già ottenute avanti in altro modo.

I coseni di direzione di una retta sono dati in generale dal rapporto della proiezione di un segmento della retta sugli assi $x, y, z$ per il segmento stesso.

Ora segniamo sulla tangente un segmento $r$ contato dal punto $X, Y, Z$ sino al punto di contatto $x, y, z$. Le proiezioni di $r$ sono rispettivamente

$$X-x \quad , \quad Y-y \quad , \quad Z-z,$$

onde i coseni richiesti sono:

$$\cos(t\,x) = \frac{X-x}{r}$$

$$\cos(t\,y) = \frac{Y-y}{r}$$

$$\cos(t\,z) = \frac{Z-z}{r}.$$

Intanto

$$r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2},$$

e dall'equazione (1) della tangente si ricava che i binomi:

$$X-x \quad , \quad Y-y \quad , \quad Z-z$$

sono proporzionali a $dx$, $dy$, $dz$, cioè che:

$$X-x = \rho\, dx \quad , \quad Y-y = \rho\, dy \quad , \quad Z-z = \rho\, dz,$$

onde sostituendo si ha infine:

$$\cos(t\,x) = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos(t\,y) = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(t\,z) = \pm \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dz}{ds},$$

ricordando le formole del Cap. VI, § 1 per le quali il differenziale $ds$ dell'arco $s$ della curva si esprimeva mediante i differenziali delle coordinate colla formola

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

---

Vogliamo applicare queste formole ad un esempio.

Consideriamo la cosiddetta *elica cilindrica.*

Essa è una curva generata nel seguente modo.

Immaginiamo un cilindro retto colla base circolare di raggio $r$. Immaginiamo poi un triangolo $abc$

che si avvolga attorno al cilindro in modo che il cateto $a\,b$ venga a combaciare colla base del ci-

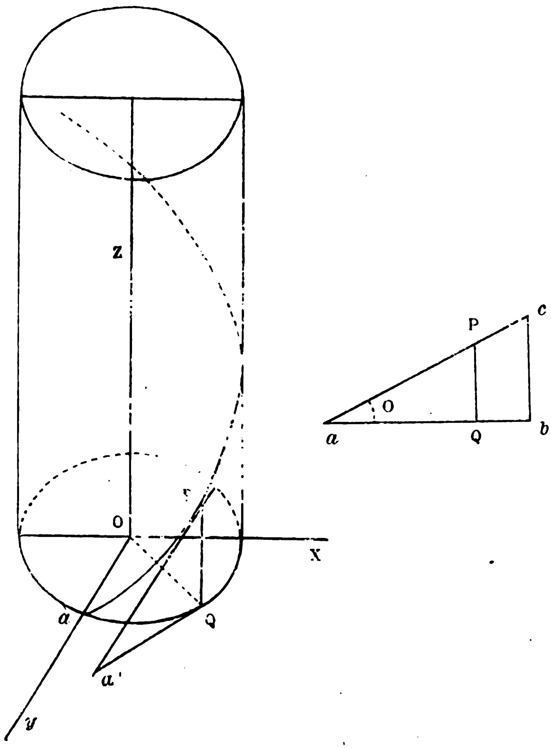


**Fig. 8.**

lindro retto. Allora l'ipotenusa $a\,c$ disegnerà sul cilindro una certa curva a spirale che è proprio ***l'elica cilindrica.***

Noi dimostreremo la seguente proprietà caratteristica di questa curva: *la tangente in un qualunque punto si inclina sempre del medesimo angolo sul piano $x\,y$, o, ciò che è lo stesso, l'angolo della tangente coll'asse delle $z$ è costante.*

Prima di tutto troviamo le equazioni dell'elica.

Sia $P$ un suo punto qualunque; è evidente che conducendo da $P$ la perpendicolare sul piano $x\,y$, il piede di tale perpendicolare deve cadere sul cerchio base del cilindro.

Intanto $P\,Q$ è la coordinata $z$ del punto $P$, e dal triangolo $a\,P\,Q$ si ha:

$$z = P\,Q = a\,Q\,.\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Se congiungiamo $Q$ con $O$, la lunghezza $aQ$ è l'arco della circonferenza della base del cilindro, e quindi è uguale a:

$$r\,\alpha$$

essendo $\alpha$ l'angolo $a\,O\,Q$, onde:

$$z = \alpha\,r\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

dove $r\,\mathrm{tg}\,\theta$ è una costante per qualunque punto $P$ dell'elica.

D'altra parte le $x, y$ sono rispettivamente $Q\,S$ e $Q\,R$, e cioè

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$y = r\cos\alpha,$$

onde infine si hanno le tre coordinate di un punto dell'elica espresse in funzione delle variabile indipendente $\alpha$.

Troviamo il coseno dell'angolo che la tangente fa coll'asse delle $z$. Si ha:

$$d\,x = \cos\alpha\, d\,\alpha$$
$$d\,y = -\,r \operatorname{sen}\alpha\, d\,\alpha$$
$$d\,z = r \operatorname{tg}\theta\, d\,\alpha$$

onde:

$$\cos(t\,z) = \operatorname{tg}\theta \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \operatorname{sen}\theta.$$

Di qui si vede che questo coseno è indipendente dall'angolo $\alpha$, e quindi è lo stesso per tutti i punti $P$ dell'elica.

---

§ 12. **Piano tangente e retta normale ad una superficie.** — Immaginiamo una superficie:

$$f(x, y, z) = 0,$$

e per un punto di essa supponiamo che passi un'altra superficie qualunque

$$F(x, y, z) = 0.$$

Allora le due superficie definiranno una certa linea che nel punto $x, y, z$ ha per tangente la retta rappresentata dalle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ora se la seconda superficie $F=0$ si fa variare in un modo qualunque, si hanno altrettante linee e altrettante tangenti a queste linee in quel punto.

Si vede subito dalle (1) che tutte queste tangenti vengono a stare in un piano.

Infatti la prima delle equazioni (1) non dipende affatto dalla natura della seconda superficie variabile $F=0$, e quindi tutte le tangenti staranno in un piano fisso che ha per equazione la prima delle (1).

Questo piano si dice *piano tangente* alla superficie $f=0$.

---

Se ora conduciamo pel punto di contatto del piano tangente la retta perpendicolare a questo piano, abbiamo la cosiddetta *normale* alla superficie.

L'equazione di questa normale per i principii di Geometria analitica sarà data da:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{2}$$

E se invece indichiamo con $p$, $q$ le derivate parziali di $z$ rispetto ad $x$ e $y$, cioè poniamo:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

l'equazione del piano tangente diventa:

$$(X-x)\,p+(Y-y)\,q=Z-z \tag{3}$$

e le equazioni della normale diventano

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{4}$$

Se vogliamo i coseni di direzione della normale, dobbiamo sulla retta (2) operare analogamente come abbiamo fatto nel paragrafo precedente a proposito della tangente alle curve ; si ha così:

$$\cos(n\,x)=\pm\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(n\,y)=\pm\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(n\,z)=\pm\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

e se invece prendiamo l'equazione della normale sotto la forma (4) abbiamo:

$$\cos(n\,x)=\pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos(n\,y)=\pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+p^2}}$$

$$\cos(n\,z)=\mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Vogliamo applicare queste formole a dimostrare la seguente proprietà che del resto è evidente con considerazioni geometriche: *in un cono retto circolare, la normale in qualunque punto fa sempre lo stesso angolo col piano base.*

Prendendo l'asse del cono come asse delle $z$ e per piano $xy$ il piano ad esso normale e passante pel vertice, l'equazione del cono è:

$$z^2 = a^2 (x^2 + y^2),$$

dove $a$ è la cotangente dell'angolo costante che una qualunque delle generatrici del cono forma coll'asse $z$.

Onde:

$$p = \frac{a\,x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$q = \frac{a\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

e perciò

$$\cos(n\,z) = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \text{costante}.$$

§ 13. **Del raggio di curvatura in un punto di una curva storta** — Nel caso delle curve piane noi per studiare la curvatura abbiamo cominciato a considerare le tangenti all'estremità di un arco e l'angolo che queste tangenti formano fra loro.

Nel caso delle curve storte le tangenti non stanno in un medesimo piano, ma noi per studiare la curvatura continueremo a considerare l'angolo che formano fra loro le tangenti alla curva.

Nel caso delle curve piane noi potremmo anche immaginare che la ricerca si faccia nel seguente modo.

Sia dato un arco di curva $PP'$; conduciamo le tangenti agli estremi e poi da un medesimo punto $O$ conduciamo le parallele a queste tangenti, sino all'incontro di una circonferenza di raggio 1 che abbia il centro in $O$. Allora l'*angolo* delle tangenti è misurato dall'arco di tal circonferenza; la curvatura della curva è il limite del rapporto fra l'arco di tal cerchio e l'arco della curva (v. § 5).

Cerchiamo di estendere questa considerazione al caso delle curve storte.

Perchè qui le tangenti non stanno nel medesimo piano, noi considereremo una sfera di raggio 1, e condurremo dal centro le parallele alle tangenti.

Ad ogni punto $P$ della curva corrisponderà un punto $p$ della superficie sferica; su questa viene a disegnarsi una curva che può chiamarsi *la immagine sferica della curva data*. Se l'arco della curva data si fa tendere a zero, tenderà anche a zero l'arco della immagine sferica.

Estendendo la definizione di sopra noi definiremo per *curvatura in P della curva data, il limite del rapporto fra l'arco della curva sferica e l'arco della curva data.*

L'inverso di tal limite lo chiameremo poi *raggio di curvatura* nel punto $P$, della curva; e ciò per *considerazioni* analoghe a quelle sviluppate nel § 5.

Dopo avere così definita la curvatura in un punto di una curva dobbiamo passare a darne la espressione in funzione delle coordinate del punto e dei differenziali di tali coordinate.

Dobbiamo perciò naturalmente cominciare a calcolare l'arco sferico che chiameremo $\sigma$. Ora essendo $\alpha, \beta, \gamma$ gli angoli di direzione della tangente in $P$, le coordinate del punto $p$ sulla sfera di raggio 1, riferite al centro della sfera, come origine, sono:

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma,$$

e quindi il differenziale dell'arco della curva descritta da $p$ sarà (v. Cap. VI, § 1):

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Questa espressione la possiamo trasformare introducendo le note espressioni di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Da:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

si ha:

$$d\cos\alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2}$$

e quindi, elevando a quadrato, e poi scambiando $x$ con $y$ e $z$, e sommando le tre espressioni così ottenute, si ha:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{ds^2}\left[(d^2x^2) + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right] -$$
$$- \frac{2d^2s}{ds^3}(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z) +$$
$$+ \frac{(d^2s)^2}{ds^4}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Intanto da:

$$d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 = d\,s^2$$

si ha (v. Cap. VI, § 1).

$$d\,x\,d^2\,x + d\,y\,d^2\,y + d\,z\,d^2\,z = d\,s\,d^2\,s,$$

onde infine:

$$d\,\sigma = \frac{\sqrt{(d^2\,x)^2 + (d^2\,y)^2 + (d^2\,z)^2 - (d^2\,s)^2}}{d\,s}\,. \quad (1)$$

Se nella espressione sotto il radicale si sostituisce a $d^2\,s$ il suo valore in funzione delle coordinate si ha infine:

$$d\,\sigma = \frac{1}{d\,s^2}\sqrt{(d\,y\,d^2\,z - d\,z\,d^2\,y)^2 + (d\,z\,d^2\,x - d\,x\,d^2\,z)^2 + (d\,x\,d^2\,y - d\,y\,d^2\,x)^2} \quad (2)$$

e se in (1) prendiamo $s$ per variabile indipendente sarà

$$d^2\,s = 0$$

e quindi:

$$\frac{d\,\sigma}{d\,s} = \sqrt{\left(\frac{d^2\,x}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,y}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,z}{d\,s^2}\right)^2}\,. \quad (3)$$

§ 14. **La normale principale.** — Consideriamo in un punto di una curva il piano normale, cioè il piano perpendicolare alla tangente in quel punto. Ogni retta che sta in quel piano e che passa per *il punto di* contatto della tangente potrà considerarsi come una retta *normale* alla curva; però fra tutte tali infinite rette ve ne è una che ha una importanza caratteristica perchè ha una posizione speciale rispetto alla curva. Tale normale si chiama *principale.*

Essa si ottiene così:

Disegniamo sulla sfera di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente, la curva luogo del punto $p$ (immagine sferica), e disegniamo la tangente a tal curva in $p$. Conduciamo poi da $P$ la parallela $n$ a questa tangente $n'$. La retta $n$ è la *normale principale.*

Noi dimostreremo, in seguito, delle proprietà caratteristiche di questa normale; per ora ci limitiamo a trovare le formole che danno i coseni di direzione di questa retta.

I coseni di direzione di $n$ sono gli stessi che quelli di $n'$ che è la tangente alla curva sferica. Quindi non resta che calcolare i coseni di direzione di questa tangente che sono rispettivamente:

$$\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}, \quad \frac{d\cos\beta}{d\sigma}, \quad \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}.$$

Chiamando $\xi$, $\eta$, $\zeta$ gli angoli di $n$ cogli assi si ha dunque $\left(\text{essendo } R = \frac{ds}{d\sigma}\right)$:

$$\cos\xi = R\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\eta = R\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\zeta = R\,\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$$

e, se si prende $s$ per variabile indipendente, si ha:

$$\cos\xi = R\frac{d^2 x}{d s^2}, \cos\eta = R\frac{d^2 y}{d s^2}, \cos\zeta = R\frac{d^2 z}{d s^2}.$$

§ 15. **Del centro di curvatura.** — Costruita pel punto $P$ della curva la tangente $t$ e la normale principale $n$, disegniamo su questa, a partire da $P$, una porzione $P\,C$ per quanto è il raggio di curvatura $R$. Però bisogna fissare da che parte di $n$ bisogna staccare questo segmento.

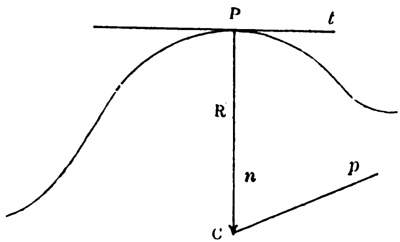


Fig. 9.

Se supponiamo per $t$ condotto il piano perpendicolare ad $n$, i punti vicinissimi a $P$ rimarranno in generale tutti da una medesima parte rispetto a questo piano; è da questa parte che bisogna staccare su $n$ il segmento $R$.

Il punto $C$ lo chiameremo *centro di curvatura* della curva in $P$, e se poi da $C$ conduciamo la retta $p$ perpendicolare al piano $t\,n$, questa si chiamerà la *retta polare corrispondente a $P$*, e la *parallela a $p$* condotta per $P$ si suol chiamare *b normale.*

Ci proponiamo di dimostrare una proprietà notevole della retta polare: *essa rappresenta la posizione limite verso cui converge l'intersezione del piano normale alla curva in P, e di un altro piano normale in un punto infinitamente vicino.*

Infatti l'equazione del piano normale in $P$ è data da:

$$V = (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0$$

essendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli di direzione della tangente. Se in questa equazione si sostituiscono ad $x, y, z$ le espressioni:

$$x + \Delta x \quad , \quad y + \Delta y \quad , \quad z + \Delta z,$$

si ottiene il piano:

$$V + \Delta V = 0,$$

che sarà normale nel punto vicino a $P$. L'intersezione di questi due piani sarà la stessa dell'intersezione dei piani $V = 0$, e $\Delta V = 0$, e nel limite questa intersezione è quella dei piani:

$$V = 0 \quad , \quad d\,V = 0$$

dove con $d\,V$ si intende il differenziale di $V$, cioè l'espressione che si ottiene considerando in $V$ le $x$, $y$, $z$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ funzioni di una variabile indipendente, e differenziando rispetto a questa variabile; cioè:

$$d\,V = (X - x)\,d\cos\alpha + (Y - y)\,d\cos\beta + (Z - z)\,d\cos\gamma -$$
$$- (d\,x\cos\alpha + d\,y\cos\beta + d\,z\cos\gamma) = 0,$$

ora:

$$d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma = \frac{1}{R}\cos\xi\, ds$$

$$d\cos\beta = \cos\eta\, d\sigma = \frac{1}{R}\cos\eta\, ds$$

$$d\cos\gamma = \cos\zeta\, d\sigma = \frac{1}{R}\cos\zeta\, ds$$

e inoltre:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\quad,\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}\quad,\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

onde infine si ha:

$$d\,V = (X-x)\cos\xi + (Y-y)\cos\eta + (Z-z)\cos\zeta - R = 0.$$

Questa è l'equazione di un piano che è perpendicolare alla retta i cui angoli di direzione sono $\xi\,\eta\,\zeta$ cioè alla normale principale, che dista dal punto di coordinate $x, y, z$, cioè da $P$, di una distanza quanto $R$, e che inoltre sta, rispetto a $P$, dalla stessa parte da cui sta $C$; dunque questo piano non è che il piano passante per $p$ perpendicolare ad $n$; quindi l'intersezione di questo piano col piano normale (che è il piano di $n$ e di $p$) è precisamente $p$.

Passiamo ora a trovare le coordinate del centro di curvatura.

Chiamando $x_1, y_1, z_1$ le coordinate di $C$ si ha che $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ sono le proiezioni di $PC = R$ sugli assi coordinati, onde:

$$\begin{aligned} x_1 - x &= R\cos\xi \\ y_1 - y &= R\cos\eta \\ z_1 - z &= R\cos\zeta \end{aligned}$$

o anche:

$$x_1 = x + R^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$y_1 = y + R^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$z_1 = z + R^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Ricerchiamo le espressioni dei coseni di direzione della retta $p$ (*retta polare*), o, ciò che è lo stesso, della *binormale* (v. pag. 297).

La retta $p$ è perpendicolare alle due rette, la tangente e la normale principale. Ora di tali due rette conosciamo i coseni di direzione, dunque colle formole di Geometria analitica possiamo trovare i coseni richiesti.

Chiamando $\lambda$, $\mu$, $\nu$, gli angoli della retta polare cogli assi coordinati, ed essendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli di direzione della tangente, e $\xi$, $\eta$, $\zeta$ quelli della normale principale, si ha che:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta$$

$$\cos\mu = \cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta$$

$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi,$$

conoscendo le espressioni di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$,

$\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, si ha infine

$$\cos\lambda = R\,\frac{d\,y\,d^2 z - d\,z\,d^2 y}{d\,s^3}$$

$$\cos\mu = R\,\frac{d\,z\,d^2 x - d^2 z\,d\,x}{d\,s^3}$$

$$\cos\nu = R\,\frac{d\,x\,d^2 y - d\,y\,d^2 x}{d\,s^3}.$$

Le equazioni della retta polare sono:

$$\frac{X - x_1}{\cos\lambda} = \frac{Y - y_1}{\cos\mu} = \frac{Z - z}{\cos\nu}$$

dove $x_1\, y_1\, z_1$ sono le coordinate del centro di curvatura.

---

§ 16. **Contatto di una curva e di una superficie.** — Si abbia una superficie $S$ e una curva $C$ che abbiano un punto di comune $M$, e conduciamo la normale alla superficie in $M$. Per semplicità supponiamo che questa normale sia l'asse delle $z$; e conduciamo dai diversi punti della curva le parallele a questa normale, per modo da formare un cilindro che taglia la superficie $S$ in un'altra curva $C'$.

Le coordinate $x, y, z$ delle due curve sieno espresse in funzione di una medesima variabile indipendente $t$. Sviluppiamo colla formola di Taylor le coordinate $z$ dei punti $M'$ e $K$, la differenza delle cui coordinate $z$ è geometricamente espressa dalla lunghezza $M'K$, (fig. 10).

*Se per la curva* $C$ si ha $z = f(t)$ e per $C'$ si ha

$z = \varphi(t)$, si otterrà:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \dots$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0) \varphi'(t) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} \varphi''(t_0) + \dots$$

supposto che al punto $M$ corrisponda il valore $t_0$ del parametro $t$.

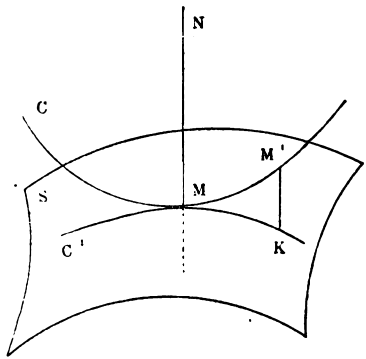


Fig. 10.

Onde:

$$M'K = [f(t_0) - \varphi(t_0)] + (t - t_0) [f'(t_0) - \varphi'(t_0)] + \dots$$

Le considerazioni che ora qui si presentano sono perfettamente analoghe a quelle fatte altre volte a proposito del contatto di curve piane (§ 8).

Diremo che *la curva e la superficie hanno contatto d'ordine i in M se sono zero tutte le differenze*

$$\begin{array}{l} f(t_0) - \varphi(t_0) \\ f'(t_0) - \varphi'(t_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(i)}(t_0) - \varphi^{(i)}(t_0). \end{array} \qquad (1)$$

In tal caso si osserverà che la lunghezza $M'K$ quando $M'$ si avvicina indefinitivamente a $M$ diviene un infinitesimo di ordine $i+1$ rispetto a $t-t_0$ considerato come infinitesimo principale.

Se una superficie ha $i+1$ parametri arbitrari noi li possiamo determinare in modo che sieno zero tutte le differenze (1), e allora la superficie avrà colla curva il massimo contatto possibile e si dirà *osculatrice alla curva.*

§ 17. **Del piano osculatore.** — Vogliamo ora trovare l'equazione e le proprietà di un piano che in un punto di una curva abbia con essa il contatto di *massimo* ordine.

Poichè nell'equazione del piano vi sono, al massimo, tre parametri arbitrari, così si vede che in generale un piano potrà avere con una curva in un punto un contatto, al massimo, di 2° ordine.

Sia l'equazione generale del piano:

$$aX+bY+cZ-p=0, \tag{1}$$

dove $a^2+b^2+c^2=1$, cioè $a, b, c$ sieno i coseni di direzione della retta perpendicolare al piano.

Supponiamo che esso passi pel punto $x, y, z$ della curva, e si ha per prima condizione:

$$ax+by+cz-p=0. \tag{2}$$

Per fare che il piano abbia un contatto di 2° ordine colla curva dobbiamo fare che la perpendicolare abbassata sul piano dal punto:

$$x+\Delta x \quad , \quad y+\Delta y \quad , \quad z+\Delta z$$

sia un infinitesimo di 3° ordine quando $\Delta t$ diventa infinitesimo.

Tale perpendicolare è data da:

$$\delta = a\,(x + \Delta x) + b\,(y + \Delta y) + c\,(z + \Delta z) - p,$$

e intanto per la formola di TAYLOR si ha:

$$\Delta x = x\,(t + \Delta t) - x\,(t) = \frac{d\,x}{d\,t}\,\Delta t + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\,\Delta t^2 + \ldots$$

e formole analoghe si hanno per $\Delta y$, $\Delta z$; onde, sostituendo e ponendo poi eguali a zero i coefficienti di $\Delta t$, $\Delta t^2$ (con che si ha appunto che, se $\Delta t$ diventa infinitesimo, $\delta$ diverrà un infinitesimo di 3º ordine), si hanno le condizioni:

$$a\,\frac{d\,x}{d\,t} + b\,\frac{d\,y}{d\,t} + c\,\frac{d\,z}{d\,t} = 0 \tag{3}$$

$$a\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2} + b\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2} + c\,\frac{d^2\,z}{d\,t^2} = 0. \tag{4}$$

Le equazioni (2), (3), (4) determinano i coefficienti dell'equazione del piano osculatore.

Sotto la forma di determinante tale equazione si ottiene eliminando $a, b, c, p$ fra le (1) (2) (3) (4), e si ha:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & -1 \\ x & y & z & -1 \\ \frac{d\,x}{d\,t} & \frac{d\,y}{d\,t} & \frac{d\,z}{d\,t} & 0 \\ \frac{d^2\,x}{d\,t^2} & \frac{d^2\,y}{d\,t^2} & \frac{d\,z^2}{d\,t^2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Se invece fra (1) (2) eliminiamo $p$ e poi fra l'equazione che ne risulta e le (3) (4) eliminiamo $a$, $b$, $c$, otteniamo l'equazione del piano osculatore sotto l'altra forma più conveniente:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostreremo ora le proprietà fondamentali del piano osculatore.

Si vede in primo luogo che i coefficenti $a, b, c$ sono proporzionali ai determinanti della matrice:

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{Vmatrix}.$$

Onde, poichè tali determinanti sono anche proporzionali ai coseni di direzione della retta polare, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, così si ha che il piano osculatore è perpendicolare alla retta polare, e perciò *esso è il piano della tangente e della normale principale.*

I seguenti due teoremi sono interessanti perchè ci fanno meglio conoscere la intima connessione fra il piano osculatore e la natura della curva.

1. *Il piano osculatore è la posizione limite del piano che passa per un punto fisso della curva e per altri due punti di questa, quando tali altri*

*due punti si avvicinano indefinitamente al punto fisso.*

Infatti se

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0$$

è l'equazione di un piano che passa pel punto $(x\,y\,z)$, e se poniamo le condizioni che tal piano deve anche passare per gli altri due punti

$$(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),(x+\Delta_1 x,\ y+\Delta_1 y,\ z+\Delta_1 z)$$

si avranno le altre due relazioni:

$$\begin{gathered} a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z=0 \\ a\Delta_1 x+b\Delta_1 y+c\Delta_1 z=0 \end{gathered}$$

che unite con quelle di sopra danno, per equazione del piano passante pei tre punti:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta_1 x & \Delta_1 y & \Delta_1 z \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

Ora supponiamo che gli accrescimenti $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$ sieno dati alle coordinate $x, y, z$ in virtù degli accrescimenti $\Delta t$, $\Delta_1 t$ dati alla variabile indipendente $t$ di cui supponiamo che le $x, y, z$ sieno funzioni.

Allora in virtù della formola di Taylor si ha:

$$\begin{gathered} \Delta x=\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2+\ldots \\ \Delta_1 x=\frac{dx}{dt}\Delta_1 t+\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta_1 t^2+\ldots \end{gathered}$$

e formole analoghe si avranno per $\Delta y, \Delta_1 y, \Delta z, \Delta_1 z$.

Il determinante (5) diventa allora, sopprimendo i fattori $\Delta t$ , $\Delta_1 t$:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 x}{dt^2}\Delta t + \ldots, & \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 y}{dt^2}\Delta t + \ldots, & \frac{dz}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 z}{dt^2}\Delta t + \ldots \\ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 x}{dt^2}\Delta_1 t + \ldots, & \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 y}{dt^2}\Delta_1 t + \ldots, & \frac{dz}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 z}{dt^2}\Delta_1 t + \ldots \end{vmatrix} = 0$$

e sottraendo dalla terza linea la seconda e sopprimendo poi il fattore comune

$$\frac{1}{2}(\Delta_1 t - \Delta t),$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 x}{dt^2}\Delta t + \ldots, & \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 y}{dt^2}\Delta t^2 + \ldots, & \frac{dz}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 z}{dt^2}\Delta t + \ldots \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3 x}{dt^3}(\Delta_1 t + \Delta t) + \ldots, & \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3 y}{dt^3}(\Delta_1 t + \Delta t) + \ldots, & \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{2!}\frac{d^3 z}{dt^3}(\Delta_1 t - \Delta t) + \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Facendo ora convergere $\Delta t$ e $\Delta_1 t$ a zero si ha finalmente precisamente l'equazione del piano osculatore

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0,$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

Da questo teorema risulta anche l'altro:

2. *Il piano osculatore è la posizione limite del piano che passa per la tangente alla curva e per un altro punto della curva stessa, quando quest'altro punto si avvicina indefinitamente al punto di contatto della tangente.*

Infatti nel determinante (6) noi possiamo fare prima tendere $\Delta t$ a zero, e allora (6) diventa l'equazione di un piano che passa per la tangente alla curva e pel punto $x+\Delta_1 x$, $y+\Delta_1 y$, $z+\Delta_1 z$; e facendo poi tendere $\Delta_1 t$ a zero si ha il piano osculatore.

Osserviamo infine che per le curve piane il piano osculatore è lo stesso per tutti i punti ed è propriamente il piano della curva.

§ 18. **Della torsione.** — Nel caso delle curve piane a noi è bastato considerare la curvatura della curva dipendente dalle successive deviazioni della tangente; ma nel caso delle curve storte evidentemente c'è da considerare anche un altro genere di deviazione. Immaginiamo un punto di una curva ·*ta e in* esso il piano osculatore; quando passiamo ad un altro punto vicino della curva allora oltre la deviazione della tangente, c'è un'altra deviazione indipendente dalla prima ed è quella del piano osculatore. Tale deviazione dà luogo alla cosiddetta ***torsione o seconda curvatura***.

Al solito per considerare la deviazione di un piano ci fa più comodo considerare quella di una retta perpendicolare ad esso, e quindi considereremo semplicemente la ***deviazione della retta polare***, che, come sappiamo, è perpendicolare al piano osculatore.

Se operiamo analogamente come facemmo per la curvatura, cioè dal centro di una sfera di raggio 1 conduciamo le parallele alle rette polari, e consideriamo il rapporto fra l'arco di curva che si viene a formare sulla sfera, e l'arco di curva data abbiamo la ***torsione media di quest'arco***, e se consideriamo il limite di tale rapporto abbiamo la ***torsione nel punto della curva data***, e l'inverso di questo limite è ciò che si chiamerà ***raggio di torsione*** $T$. Chiamando $\Delta\tau$ l'arco della curva sferica che siamo venuti a costruire si ha dunque che:

$$\frac{1}{T} = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}$$

essendo $T$ il raggio di torsione.

Per trovare l'espressione di $d\tau$ osserviamo che le coordinate del punto della curva sferica, riferite al centro della sfera come origine delle coordinate, sono rispettivamente:

$$\cos\lambda \quad , \quad \cos\mu \quad , \quad \cos\nu \, ,$$

essendo $\lambda, \mu, \nu$ al solito gli angoli di direzione della retta polare.

Onde:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}$$

Conoscendo ora i valori di $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, si potrebbe trasformare opportunamente questa espressione, in modo da introdurvi le derivate di $x\,y\,z$ che sono le coordinate del punto della curva data.

Se la curva è piana deve essere:

$$T = \infty$$

cioè:

$$\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2 = 0.$$

# AGGIUNTE

A pag. 99 e 181. — Dalla dimostrazione del teorema di ROLLE, messa in relazione colla teoria dei *massimi e minimi*, risulta una conseguenza che è utile rilevare, perchè di essa vi è bisogno qualche volta (v. p. es. il Cap. VII, § 15 del vol. II) ed è che: *ammesse le stesse ipotesi che si fanno per il teorema di* ROLLE, *esiste sempre, nell'interno dell'intervallo, un punto, in cui la derivata della funzione non solo è zero,* **ma muta di segno.**

A pag. 202. — In fine della pagina in luogo di: *non tenda a zero cambiando infinite volte di segno, etc.*

Si legga:

tenda a zero *non* cambiando infinite volte di segno, allora il limite di $f(x)$ risulta determinato e *propriamente eguale all'infinito, positivo o negativo.*

MANUALI HOEPLI

# LEZIONI

DI

# CALCOLO INFINITESIMALE

DETTATE DA

*ERNESTO PASCAL*

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

## PARTE II.

## CALCOLO INTEGRALE

Con 15 incisioni

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1895

*Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.*

# INDICE

## CAPITOLO I.

### GLI INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI.


§ 1. Definizione di integrale definito . . . . . Pag. 1
§ 2. Proprietà elementari degli integrali definiti. Formola del valor medio . . . . . . . „ 4
§ 3. L'integrale definito considerato come funzione dei limiti. La funzione integrale . . „ 9
§ 4. L'integrale definito in due casi singolari. . „ 12
§ 5. Integrali indefiniti . . . . . . . . . . . . „ 20
§ 6. Trasformazione di un integrale semplice . „ 25
§ 7. Derivazione rispetto ad un parametro. Invertibilità dei segni di limite e integrazione; invertibilità dei segni di derivazione e integrazione . . . . . . . . . . . . . „ 28
§ 8. Invertibilità di due segni d'integrazione . „ 43


## CAPITOLO II.

### L'INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI.


§ 1. Prima forma delle condizioni di integrabilità Pag. 53
§ 2. Seconda forma del criterio d'integrabilità . „ 58

§ 3. Funzioni integrabili e non integrabili. Applicazione dei criteri dimostrati . . . . . Pag. 60
§ 4. Teoremi sulle funzioni integrabili. Integrazione per serie . . . . . . . . . . . „ 64

## CAPITOLO III.

### CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI.

§ 1. Integrali indefiniti fondamentali . . . . Pag. 74
§ 2. Artifizii di integrazione. Integrazione per parti. Integrazione per serie . . . . . . „ 78
§ 3. Integrazione delle funzioni razionali . . . „ 90
§ 4. Integrazione delle funzioni irrazionali. Integrali binomii. Integrali ellittici . . . . . „ 112
§ 5. Integrazione delle funzioni trascendenti . „ 126
§ 6. Calcolo di integrali definiti. Integrali Euleriani . . . . . . . . . . . . . . „ 130

## CAPITOLO IV.

### GLI INTEGRALI MULTIPLI.

§ 1. Definizione di integrale doppio e multiplo. Condizioni di integrabilità . . . . . . Pag. 136
§ 2. L'integrale multiplo come funzione dei limiti; sua definizione nei casi singolari . . „ 143
§ 3. Trasformazione degli integrali multipli . . „ 147
§ 4. Proprietà degli integrali doppi. Teorema di Green . . . . . . . . . . . . . . . „ 153

## CAPITOLO V.

INTEGRAZIONE DEI DIFFERENZIALI TOTALI Pag. 160

## CAPITOLO VI.

### GEOMETRIA INTEGRALE.

§ 1. Area delle curve piane . . . . . . . . . Pag. 167
§ 2. Arco di curva piana . . . . . . . . . „ 182
§ 3. Arco di una curva storta . . . . . . . . „ 194
§ 4. Area delle superficie . . . . . . . . . „ 202
§ 5. Superficie di rotazione . . . . . . . . „ 207
§ 6. Zona sferica . . . . . . . . . . . . „ 211
§ 7. Superficie dell'ellissoide di rotazione . . . „ 212
§ 8. Volumi racchiusi da superficie . . . . . „ 213
§ 9. Volume del solido di rotazione . . . . . „ 218
§ 10. Volume dell'ellissoide qualunque. Solido generato dalla cicloide . . . . . . . . . . „ 220

## CAPITOLO VII.

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

§ 1. Considerazioni e definizioni fondamentali . Pag. 226
§ 2. Esempio di un problema di geometria la cui soluzione conduce ad un' equazione differenziale . . . . . . . . . . . . . . „ 232
§ 3. Equazioni differenziali di 1.° ordine. Equazioni in cui si possono separare le variabili „ 233
§ 4. Equazioni differenziali omogenee . . . . „ 235
§ 5. Equazioni lineari di 1.° ordine . . . . . „ 237
§ 6. Equazioni differenziali di 1.° ordine non risolubili rispetto a $\frac{dy}{dx}$. . . . . . . . . „ 241

§ 7. Del fattore integrante. . . . . . . . . . Pag. 248
§ 8. Equazione a derivate parziali a cui soddisfano i fattori integranti . . . . . . . „ 254
§ 9. Integrali singolari delle equazioni differenziali ordinarie . . . . . . . . . . . „ 260
§ 10. Equazioni differenziali lineari omogenee . „ 264
§ 11. Equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti . . . . . . . . . . . . . . „ 271
§ 12. Equazioni lineari non omogenee . . . . „ 279
§ 13. Teoremi sulle equazioni differenziali lineari. Formola di Liouville . . . . . . . . . „ 285
§ 14. Sopra certe classi particolari di equazioni differenziali lineari. . . . . . . . . . „ 289
§ 15. Equazioni lineari di 2.º ordine . . . . . „ 293
§ 16. Sistemi di equazioni lineari simultanee . . „ 296
§ 17. Equazioni differenziali d'ordine superiore . „ 300
§ 18. Integrazione per serie. . . . . . . . . „ 306
§ 19. Equazioni a derivate parziali. . . . . . „ 310

# CAPITOLO I.

## GLI INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI.

§ 1. **Definizione di integrale definito.** — Si abbia una funzione $f(x)$ *finita* in tutto un intervallo da $a$ a $b$; si divida quest'intervallo in altri $n$ intervalli parziali che chiameremo $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$; sia $f_r$ il valore della funzione in un punto qualunque dell'intervallo $\delta_r$, o anche il *limite superiore o inferiore* dei valori di $f$ in $\delta_r$; formiamo il sommatorio

$$\sum_1^n f_r\, \delta_r$$

esteso a tutti gli intervalli parziali. Tale sommatorio ha un valore finito, e avrà sempre un valore finito comunque noi facciamo crescere il numero $n$ degli intervalli, facendo impiccolire ciascuno di essi.

*Se il limite di tal sommatorio, quando ciascuno degli intervalli parziali impiccolisce indefinitivamente mentre il loro numero* n *tende all' infinito, esiste ed è indipendente dalla maniera colla quale si fanno decrescere le ampiezze degli intervalli, e* *indipendentemente dalla scelta dei valori* $f_r$, *allora esso limite si chiamerà l'integrale definito della funzione* f $(x)$ *da* a *sino* *a* b. I numeri *a* e *b* si chiamano rispettivamente *limiti inferiore e superiore* dell'integrale definito, e il tratto da *a* sino a *b* si chiama *cammino d'integrazione.* L'integrale definito si rappresenta con una notazione speciale, e propriamente col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

si premette cioè il segno $\int$ (che è una degenerazione del segno della lettera *S* iniziale della parola *somma*) e poi si scrive la funzione $f(x)$, di cui si vuol calcolare l'integrale, moltiplicata per il differenziale $dx$ della variabile indipendente.

Perchè esista il limite del sommatorio di cui si è parlato sopra, è necessario che la funzione $f(x)$ soddisfi a certe condizioni che considereremo nei paragrafi seguenti; inoltre perchè valga la data definizione di integrale definito, è necessario che la funzione $f(x)$ non sia mai infinita nell'intervallo da *a* a *b*, e inoltre che tali limiti sieno finiti.

Occorrerà poi estendere la data definizione anche nei casi in cui o la funzione diventi infinita in qualche punto, ovvero uno dei limiti d'integrazione è l'infinito.

Riserberemo ad un apposito capitolo lo studio dell'integrabilità delle funzioni; per ora nei paragrafi seguenti supporremo che le funzioni di cui si tratta sieno sempre integrabili.

Secondo la definizione data calcoliamo l'integrale da $a$ a $b$ della funzione semplicissima $(x - c)$, cioè

$$\int_a^b (x - c)\, d\, x\,.$$

Dividiamo per semplicità l'intervallo da $a$ a $b$ in $n$ parti eguali; ponendo $b - a = h$, ciascuno degli intervalli parziali $\delta_r$ sarà

$$\delta_r = \frac{h}{n}\,.$$

I punti di divisione degli intervalli saranno rispettivamente

$$x_0 = a \quad x_1 = a + \frac{h}{n}\,, \quad x_2 = a + \frac{2\,h}{n}\,, \ldots$$

In ciascuno di tali intervalli parziali dobbiamo scegliere un punto in cui calcolare il valore della funzione; scegliamo tal punto proprio nell'estremo di ciascuno intervallo; il sommatorio fondamentale resta dunque costruito così:

$$\frac{h}{n}\left[(a - c) + \left(a - c + \frac{h}{n}\right) + \left(a - c + \frac{2\,h}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(a - c + \frac{n-1}{n} h\right)\right]$$

che è eguale a:

$$\frac{h}{n}\left[n\,(a - c) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\frac{h}{n}\right] =$$
$$= (b - a)\,(a - c) + \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n}\,(b - a)^2\,.$$

Passando al limite per $n = \infty$ si ha pel valore dell'integrale definito:

$$(b-a)(a-c) + \frac{1}{2}(b-a)^2$$

cioè

$$\frac{b^2-a^2}{2} - c(b-a).$$

Come si vede, il processo del calcolo per questa via è certamente complicato dal punto di vista pratico; per funzioni più complicate il calcolo del limite potrebbe riuscire praticamente impossibile. In seguito però noi mostreremo come, per mezzo di una proprietà fondamentale degli integrali delle funzioni continue, questi si possono calcolare mediante le note nozioni e formole di calcolo differenziale; in ciò i due calcoli, differenziale e integrale, si uniscono sostanzialmente fra loro.

§ 2. **Proprietà elementari degli integrali definiti. Formola del valor medio.** — In questo paragrafo fisseremo alcune proprietà generali che risultano senz'altro dalla data definizione di integrale definito.

1. *Se si invertono i limiti di integrazione il valore del nuovo integrale è eguale a quello dell'antico ma col segno cambiato.*

Infatti eseguiamo, secondo la data definizione, la integrazione da $a$ sino a $b$, e poi l'integrazione in senso inverso da $b$ sino ad $a$. È evidente che sia nell'uno che nell'altro caso possiamo formare gli stessi intervalli parziali $\delta_r$, solo che i valori di questi, nei due casi dovranno considerarsi di segno contrario. Onde tutti i termini del sommatorio del primo caso riusciranno tutti di segno contrario, sebbene del medesimo valore dei termini del sommatorio del secondo caso.

2. È evidente inoltre la formola

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

essendo $c$ una costante.

3. Se $f(x) = 1$, allora l'integrale da $a$ a $b$ si riduce alla somma di tutti gli intervalli $\delta_r$, cioè si riduce alla lunghezza del cammino d'integrazione $b - a$.

4. Immaginiamo che in tutto un intervallo da $\alpha$ sino a $\beta$ una funzione sia integrabile, e scegliamo in tale intervallo tre punti in un ordine qualunque $a$, $b$, $c$. Si può facilmente dimostrare che

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

Infatti immaginiamo che $c$ sia compreso fra i due punti $a$, $b$. Formiamo l'integrale da $a$ a $b$ giusta la definizione. Essendo a nostro arbitrio la scelta degli intervalli $\delta_r$, noi possiamo fare in maniera che uno dei punti di divisione sia proprio il punto $c$, e questo resti sempre punto di divisione in tutti gli stadii del passaggio al limite, essendo arbitraria la maniera colla quale gli intervalli $\delta_r$ si debbono far tendere a zero.

Così facendo è evidente che il sommatorio

$$\Sigma f_r \cdot \delta_r$$

resta scisso in due parti, una che va da $a$ sino a $c$, e l'altra che va da $c$ sino a $b$; passando quindi al limite resta dimostrato il nostro assunto.

Se poi il punto $c$ è esterno all'intervallo $a$, $b$, p. es. è a destra di $b$, allora per ciò che abbiamo dimostrato si ha

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

ed essendo

$$\int_b^c = -\int_c^b$$

possiamo ricavare anche qui:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

5. *Se $f^{(1)}(x)$ $f^{(2)}(x)$... sono funzioni integrabili, sarà integrabile la loro somma, e l'integrale di questa è eguale alla somma degli integrali delle singole funzioni; in altri termini, il segno di integrale è invertibile col segno di somma.*

Formiamo infatti il sommatorio

$$(1) \qquad \Sigma \delta_r \cdot [f_r{}^{(1)} + f_r{}^{(2)} + \ldots]$$

con cui si viene a costruire, col passaggio al limite, l'integrale corrispondente alla somma

$$(2) \qquad f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \ldots .$$

Evidentemente quel sommatorio è eguale a

$$\Sigma\, \delta_r\, f_r^{(1)} + \Sigma\, \delta_r\, f_r^{(2)} + \dots \tag{3}$$

e avendo supposto che ciascuna delle funzioni date è integrabile, e che quindi esistono i limiti di

$$\Sigma\, \delta_r\, f_r^{(1)} \quad , \quad \Sigma\, \delta_r\, f_r^{(2)}\, , \dots$$

esisterà anche il limite della somma di queste espressioni, e quindi possiamo conchiudere la prima parte del nostro assunto, cioè che la somma delle funzioni in numero finito è una funzione integrabile. Inoltre passando al limite nella espressione (3) che è eguale alla (1), si vede che ciascuno dei termini di (3) diventa l'integrale corrispondente ad una delle funzioni $f^{(1)}\, f^{(2)} \dots$, e quindi resta dimostrata anche la seconda parte del nostro assunto.

6. Possiamo infine ricavare una formola sul valore di un integrale definito.

Immaginiamo di prendere tutti eguali fra loro gli intervalli $\delta_r$, e di conservarli sempre eguali fra loro in tutti gli stadi del passaggio al limite; in altri termini dividiamo tutto l'intervallo $b - a$ d'integrazione in un numero sempre maggiore di parti eguali. Allora ogni intervallo $\delta_r$ è eguale a $\frac{b-a}{n}$, e quindi per la definizione

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n f_r$$

donde

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n f_r}{n}$$

cioè: *il rapporto fra il valore dell'integrale definito e l'intervallo d'integrazione, può considerarsi come il limite della media aritmetica dei valori che la funzione prende nei singoli punti dell'intervallo totale.*

Di qui possiamo ricavare un teorema che ci sarà utile varie volte. Indichiamo con $f$ e $F$ rispettivamente il limite inferiore e superiore della funzione nell'intervallo da $a$ a $b$. Allora è evidente che la espressione

$$\frac{\sum_1^n f_r}{n}$$

che è una media aritmetica non può essere minore di $f$ nè maggiore di $F$, e quindi avrà un valore compreso fra tali due estremi, valore che possiamo indicare con $f+\theta(F-f)$ dove $\theta$ è un numero compreso fra 0 e 1.

Abbiamo quindi la formola

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\{f+\theta(F-f)\}.$$

Se la funzione $f(x)$ è una funzione continua, allora nell'intervallo acquisterà qualunque valore compreso fra il massimo e il minimo, e quindi *esisterà nell' intervallo* un punto in cui la funzione avrà il valore $[f + \theta(F - f)]$. Chiamando

$$a + \vartheta(b - a)$$

tale punto dove al solito $\vartheta$ è un numero compreso fra 0 e 1 possiamo scrivere l'altra formola *valevole pel caso in cui* f *sia funzione continua*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(a + \vartheta(b - a)).$$

Questa formola si chiama *la formola del valor medio*, e, come faremo vedere a suo tempo, ha una relazione con quella trovata nel calcolo differenziale, e similmente denominata.

§ 3. **L'integrale definito considerato come funzione dei limiti. La funzione integrale.** — In un integrale definito lasciamo fisso uno dei limiti p. es. il limite inferiore $a$ e facciamo variare il limite superiore che chiameremo $x$, facendolo però variare in modo che nell' intervallo da $a$ ad $x$ la funzione data sia sempre integrabile. Allora è evidente che per ogni valore di $x$, vi sarà un valore unico e determinato per l'integrale definito, il quale quindi potrà considerarsi funzione del limite superiore $x$.

Ora noi vogliamo dimostrare prima di tutto che tale funzione è una funzione *continua*.

Facciamo variare il limite superiore $x$, di una quantità $h$ che poi faremo decrescere sino a zero.

Formiamo la differenza fra i due integrali definiti, quello da $a$ sino ad $x + h$, e quello da $a$

sino ad $x$. Si ha:

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Per effetto del teorema del valor medio dimostrato al § precedente, noi possiamo scrivere

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = h\,[f + \theta\,(F - f)]$$

dove $f$, $F$ sono rispettivamente, il minimo e il massimo valore che la funzione $f$ ha nell'intervallo da $x$ sino ad $x + h$.

Essendo $f(x)$ una funzione sempre finita, il secondo fattore del secondo membro della formola superiore non potrà che essere una quantità finita, e, diminuendo $h$, non potrà che restare sempre finito. Quindi il secondo membro della formola superiore, avendo per fattore $h$, tenderà a zero con $h$, e con ciò resta dimostrata la *continuità* della funzione integrale.

Passiamo ora alla sua *derivabilità.*

Dalla formola superiore si ricava

$$\lim_{h=o} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} - \int_a^x}{h} = \lim_{h=o} [f + \theta\,(F - f)].$$

Il primo membro non è altro che la formola che dà la derivata dell'integrale, quindi tale derivata esisterà o no, secondochè esisterà o no il limite indicato dal secondo membro.

Supponiamo prima di tutto che la funzione $f(x)$ sia una funzione *continua* nel punto $x$. Allora si potrà sempre trovare un intervallo $h$ tale che la differenza fra due valori della funzione in tale intervallo, e quindi anche la differenza fra il suo massimo e il suo minimo, sia minore di qualunque quantità assegnabile. Essendo quindi la espressione $[f + \theta(F - f)]$ non altro che un certo valore compreso fra il valore, massimo e il minimo, e tali valori, massimo e minimo, tendendo evidentemente al valore stesso della funzione in $x$, a questo tenderà anche qualunque valore intermedio, e quindi *nel caso che $f(x)$ sia una funzione continua nel punto* x *possiamo dire che la derivata della funzione integrale*

$$\int_a^x f(x)\, d\, x$$

*nel punto* x *è il valore della funzione* f (x), *che sta sotto il segno integrale nel punto* x *stesso, cioè in formola:*

$$\frac{d}{d\,x}\int_a^x = f(x).$$

Similmente possiamo calcolare, sotto le analoghe ipotesi, la derivata dell'integrale rispetto al limite inferiore. Ricordando che

$$\int_a^x = -\int_x^a$$

e, applicando il teorema della derivazione rispetto al limite superiore, si ha

$$\frac{d}{d\,a}\int_a^x = -f(a).$$

Nel caso in cui la funzione non è continua nel punto $x$, allora la derivata dell'integrale avrà un valore diverso, e potrà anche non esistere.

Si vede quindi che per le funzioni continue il problema dell'integrazione si riduce al problema inverso di quello della derivazione, si riduce cioè e trovare un'altra funzione tale che la sua derivata sia proprio la funzione data.

È di questo fatto fondamentale che noi ci serviremo in seguito per trovare le principali formole del calcolo integrale.

§ 4. **L'integrale definito in due casi singolari.** — Nella definizione che abbiamo data nel § 1 dell'integrale definito, abbiamo dovuto supporre prima che la funzione resti sempre *finita* in tutto il cammino d'integrazione, e inoltre che i limiti d'integrazione sieno ambedue *finiti.* Ora vogliamo esaminare a parte i due casi singolari in cui queste condizioni non sono soddisfatte.

Supponiamo che la funzione diventi infinita in un punto, e per fissare le idee, supponiamo che diventi infinita proprio nel limite superiore $b$.

Allora noi consideriamo una quantità piccolissima $\varepsilon$, e l'integrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,d\,x$$

il quale potrà calcolarsi secondo l'antica definizione, perchè, per ipotesi, in tutto l'intervallo da $a$ sino a $b - \varepsilon$ (per quanto piccolo sia $\varepsilon$ ma diverso da zero) la funzione non diventa mai infinita.

Questo integrale riuscirà una funzione di $\varepsilon$, e *potrà avere un limite determinato per* $\varepsilon = 0$. Volendo dare la definizione di

$$\int_a^b$$

noi faremo naturalmente in modo da conservare le proprietà più fondamentali della funzione integrale; p. es. la proprietà della continuità rispetto al limite superiore; quindi vien spontanea l'idea di assumere come valore di

$$\int_a^b$$

il limite dei valori di

$$\int_a^{b-\varepsilon}$$

per $\varepsilon = o$, nel caso che questo limite esista.

Se poi il punto in cui la funzione diventa infinita non è un punto estremo dell'intervallo d'integrazione, cioè uno dei limiti, ma è un punto intermedio, allora, sempre nell'intento di conservare le proprietà generali degli integrali definiti, si può procedere nel seguente modo: sia $c$ il punto fra $a$, $b$ (limiti d'integrazione) in cui la funzione diventi infinita.

Spezziamo l'integrale da $a$ a $b$ in due parti nel punto $c$, estendendo così la proprietà nota degli integrali ordinarii, ponendo cioè

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

e definiamo ciascuno degli integrali del secondo membro colla formola già indicata. Per modo che infine *avremo per definizione*

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=o} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'=o} \int_{c+\varepsilon'}^b$$

*supposto naturalmente che i limiti indicati nel secondo membro esistano.*

Se in luogo di un solo punto d'infinito ve ne fossero varii non vi sarebbe che applicare ripetutamente questi stessi concetti.

È facile trovare la condizione necessaria è sufficiente per l'esistenza di tali limiti.

Se deve esistere il limite di $\int_a^{b-\varepsilon}$ per $\varepsilon = o$, giusta la teoria generale dei limiti, è necessario ed è sufficiente che dato $\sigma$ si possa trovare un tratto di variabilità di $\varepsilon$ in modo che per due $\varepsilon$ compresi in tale tratto, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ sia sempre in valore assoluto

$$\int_a^{b-\varepsilon_1} - \int_a^{b-\varepsilon_2} = \sigma$$

cioè

$$\int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} = \sigma.$$

Un'analoga condizione può stabilirsi per gli altri casi.

Possiamo stabilire un tipo di funzione in cui questa condizione è soddisfatta.

Immaginiamo che la funzione $f(x)$ nel punto $b$ diventi infinita ma sia tale che il suo valore assoluto sia sempre inferiore o eguale al valore assoluto di una funzione del tipo

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

dove $\nu$ è positivo minore di 1 e $\varphi(x)$ sia una funzione che nel punto $b$ acquista un valore finito, e che in tutto il tratto da $a$ a $b$ non diventi infinita in alcun punto.

*In particolare* la $f(x)$ potrebbe essere proprio di quel tipo.

Sia allora $M$ il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ in tale tratto. Per le ipotesi fatte tal numero è finito.

Si ha dunque *in valore assoluto*

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{|\varphi(x)|}{(x-b)^\nu}\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\,dx.$$

Questa disuguaglianza si ottiene ricorrendo direttamente alla definizione fondamentale di integrale definito, osservando cioè che, se si ha da calcolare l'integrale definito corrispondente ad una funzione che è minore in valore assoluto di un'altra per qualunque punto del cammino d'integrazione, i diversi termini del sommatorio relativo alla data funzione sono rispettivamente minori di quelli relativi alla seconda, e quindi l'integrale corrispondente alla prima funzione sarà certamente minore di quello relativo alla seconda.

Ora sarà dimostrato in seguito che (v. Cap. III, § 1).

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\, dx = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right].$$

Onde si vede che se $\nu - 1$ è una quantità minore di zero, cioè *se* $\nu$ *è minore di* 1, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}}$ per $\varepsilon = 0$ tende a zero e quindi quell'integrale tende ad una quantità finita. Possiamo dunque conchiudere:

*Se una funzione integrabile diventa infinita in un punto* b, *e il suo valore assoluto si mantiene sempre inferiore o eguale a quello di una funzione del tipo:*

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

*dove* $\nu < 1$, *in cui cioè l'ordine dell'infinito è minore di* 1, *allora l'integrale definito da* a *sino a* b *è una quantità finita.*

Immaginiamo invece che la funzione diventi in $b$ infinita ma il suo valore si mantenga sempre maggiore del valore di una funzione del tipo

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

dove $\nu \gtrless 1$, e $\varphi(x)$ sia sempre *positiva* e non diventi infinita in nessun punto nell'intorno di $b$, e non diventi *zero* in $b$. *In particolare* la $f(x)$ potrebbe essere proprio una funzione di quel tipo.

Sia $m$ il limite inferiore dei valori di $\varphi(x)$ nel tratto da $a$ a $b$.

Allora sarà

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}\,dx \geqq$$

$$\geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{m}{(x-b)^\nu}\,dx$$

Ma, come sopra, quest'ultimo integrale è

$$\frac{m}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right]$$

che per $\nu > 1$ e per $\varepsilon = 0$ tende all'infinito, dunque il nostro integrale non tenderà ad alcun limite finito.

Se poi $\nu = 1$ allora sarà in seguito dimostrato che quell'integrale ha per valore

$$m\,[\log\varepsilon - \log(a-b)]$$

che per $\varepsilon = 0$ tende anche all'infinito.

Quindi possiamo dire:

*Se una funzione diventa in un punto* b *infinita e il suo valore si mantiene maggiore di quello di un'altra funzione della forma* $\dfrac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$ *dove* $\nu \geqq 1$

*e* $\varphi(x)$ *è sempre positivo, allora l' integrale definito da* a *a* b *non ha un valore finito.*

Passiamo ora al caso in cui uno dei limiti è l'infinito.

Tenendo anche qui presente la proprietà fondamentale della funzione integrale, di essere cioè una funzione continua dei limiti, abbiamo il mezzo di definire l'integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

*supposto che la* f(x) *sia integrabile in qualunque tratto a cominciare da* a *sino ad un punto qualunque verso la parte positiva, o rispettivamente la parte negativa, secondochè si vuol calcolare l'integrale da* a *sino a* $+\infty$, *ovvero da* a *sino a* $-\infty$.

Scegliamo un limite superiore qualunque $x$ e calcoliamo l'integrale da $a$ a $x$, e poi calcoliamo il limite di tale espressione per $x = \infty$.

*Se questo limite esiste*, lo chiameremo il valore dell'integrale da $a$ ad $\infty$.

Si ha dunque

$$\int_a^\infty = \lim_{x=\infty} \int_a^x .$$

Anche qui può trovarsi la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tal limite. Ricordando la teoria generale dei limiti, ricaviamo che perchè quel limite esista è necessario e sufficiente che dato $\sigma$ piccolo a piacere si possa trovare un punto $a$ tale che per due qualunque punti $x'$ $x''$

compresi fra $a$ e l'$\infty$ si abbia sempre in valore assoluto

$$\int_{x'}^{x''} < \sigma.$$

Possiamo dimostrare un teorema che ha molta analogia con quello dimostrato sopra pel caso in cui la funzione diventi infinita.

*Se la funzione da integrare diventa zero per $x = \infty$, e propriamente in modo che il suo valore assoluto resti sempre minore o eguale al valore assoluto di una funzione del tipo*

$$\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$$

*dove $\nu$ sia maggiore di 1, e $\varphi(x)$ sia sempre finita e per $x = \infty$ abbia un valore finito diverso da zero, allora l'integrale definito da $a$ ad $\infty$ avrà un valore finito. In particolare la $f(x)$ potrebbe essere proprio una funzione di quel tipo.*

Sia $M$ il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$, e si ha allora

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\,dx \leqq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{|\varphi(x)|}{x^\nu}\,dx$$

$$\leqq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx.$$

Ma, come abbiamo già detto sopra,

$$\int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{x^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}}\right]$$

e, se $\nu > 1$ l'espressione del secondo membro tende ad un valore finito per $x = \infty$, dunque resta dimostrato il nostro assunto.

In simile maniera può dimostrarsi che *se* f(x) *si mantiene sempre maggiore od eguale al valore di una funzione del tipo*

$$\frac{\varphi(x)}{x^{\nu}}$$

*dove* $\varphi$(x) *è sempre positiva, e* $\nu$ *è minore o eguale ad* 1, *o anche, in particolare, è una funzione di questo tipo, allora l'integrale sino all'* $\infty$ *non ha un valore finito.*

Nei paragrafi seguenti sarà fatto vedere, man mano che ne capiterà l'occasione, quali cangiamenti subiscono i teoremi fondamentali sugli integrali definiti nei due casi singolari di cui abbiamo qui trattato (v. p. es. il § 7 di questo Cap. I).

§ 5. **Integrali indefiniti.** — La definizione che abbiamo data di integrale definito suppone essenzialmente la esistenza di due limiti d'integrazione determinati e fissi.

Noi abbiamo visto che pel caso della funzione $f(x)$ continua, il problema dell'integrazione si riduce a trovare una funzione $F(x)$ la cui funzione derivata sia proprio quella data.

Ora di funzioni le quali abbiano per derivata $f(x)$, ve ne sono infinite, e tutte, come si sa dal calcolo differenziale, differiscono fra loro per una costante; in altri termini trovata una di tali funzioni, se vi aggiungiamo una qualunque costante, si ha ancora una funzione della stessa specie.

Formiamo quindi la espressione generale

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + \text{cost.};$$

si ha una funzione generale di $x$ che si chiama l'*integrale indefinito* della funzione data. In questa formola per $a$ si intende un determinato valore numerico.

Si chiama *indefinito*, volendo contrapporlo all'integrale *definito* in cui i limiti sono fissi, mentre che in esso, da un certo punto di vista, i limiti possono considerarsi come mobili, dipendenti cioè dalla variabilità della costante arbitraria.

Se noi consideriamo l'integrale definito

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

e mutiamo il limite inferiore $a$, abbiamo l'integrale

$$\int_b^x$$

che è eguale a

$$\int_b^x = \int_a^x + \int_b^a$$

e il secondo integrale non dipende più da $x$ e quindi è una costante rispetto ad $x$.

Si vede quindi che, mutando il limite inferiore, il nuovo integrale definito è eguale all'antico aggiuntavi una certa costante il cui valore dipende naturalmente dal nuovo limite inferiore scelto.

L'integrale *indefinito* è una funzione di $x$, non dipendente più dal limite inferiore dell'integrale. Esso si indica col solo simbolo di integrazione senza alcuna designazione di limiti particolari.

Conosciuta questa funzione, se ne può dedurre il valore di qualunque integrale definito.

Sia $F(x)$ tale funzione, e se ne voglia dedurre il valore dell'integrale definito

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\,x$$

dove $\alpha\, \beta$ sono due numeri fissi.

La $F(x)$ è della forma

$$F(x) = \int_{a}^{x} + c.$$

Poniamo $x = \beta$ e si ha

$$F(\beta) = \int_{a}^{\beta} + c$$

e per $x = \alpha$

$$F(\alpha) = \int_{a}^{\alpha} + c$$

e sottraendo queste due eguaglianze si ha:

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{a}^{\beta} - \int_{a}^{\alpha} = \int_{a}^{\beta}$$

e con ciò resta calcolato il nostro integrale definito.

Si ha dunque che, *dato l'integrale indefinito, per calcolare un integrale definito qualunque, basta sostituire nel primo, in luogo di* x, *il limite superiore, poi il limite inferiore, e sottrarre i due risultati.*

Viceversa, se è dato il valore di un integrale definito, non se ne potrà in generale ricavare l'integrale indefinito, cioè la funzione di $x$. Avvertiamo però esplicitamente che quando diciamo *dato l'integrale definito*, intendiamo che di questo è dato il valore *numerico* fra limiti *numerici* dati; che non sarebbe più naturalmente lo stesso, se di esso fosse conosciuto il valore fra limiti indeterminati indicati p. es. colle lettere $a$, $b$ perchè allora quella conosciuta, funzione di $a$ o di $b$, sarebbe essa stessa, salvo il nome della variabile, l'integrale indefinito.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo mostrare che la relazione fondamentale fra gli integrali definiti e indefiniti continua a sussistere inalterata anche nei due casi singolari di cui abbiamo trattato nel § 4, cioè o quando la funzione sotto il segno integrale diventa infinita in un punto del cammino d'integrazione, ovvero quando uno dei limiti è l'infinito.

Infatti la funzione $f(x)$ diventi infinita nel punto $c$ compreso fra i limiti $a$, $b$ dell'integrale definito

$$\int^{b} f(x)\, d x.$$

Per definizione tale integrale sarà eguale a

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

e se $F(x)$ è l'integrale indefinito, il primo dei due integrali sarà

$$F(c-\varepsilon) - F(a)$$

e il secondo sarà

$$F(b) - F(c+\varepsilon')$$

Ora la funzione $F(x)$ è una funzione continua anche nel punto $c$, supposto verificate le disuguaglianze fondamentali

$$\int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} < \sigma$$

($\sigma$ piccolo a piacere)

$$\int_{c+\varepsilon'}^{c+\varepsilon_1'} < \sigma$$

(senza di che non esiste l'integrale definito da $a$ a $b$); onde

$$\lim_{\varepsilon=0} F(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon'=0} F(c+\varepsilon') = F(c)$$

e quindi l'integrale dato è eguale a

$$F(b) - F(a)$$

con che si dimostra il nostro assunto.

Supponiamo ora inoltre che uno dei limiti d'integrazione sia l'infinito. Allora per definizione e conservando le stesse notazioni:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx$$

$$= \lim \Big[F(x') - F(a)\Big].$$

Ma per la solita continuità della funzione $F(x)$ anche nel punto all'infinito si ha

$$\lim_{x'=\infty} F(x') = F(\infty)$$

dunque resta dimostrato il nostro assunto.

§ 6. **Trasformazione di un integrale semplice.** — Si abbia un integrale indefinito (che chiameremo *semplice* per distinguerlo da altri integrali che studieremo in seguito e che chiameremo *multipli)*

$$\int f(x)\,dx$$

dove $f(x)$ sia una funzione *continua.*

Si sa che la ricerca di tale integrale si riduce alla ricerca di una funzione la cui derivata sia $f(x)$, o anche, il cui differenziale sia $f(x)\,dx$ cioè la espressione che figura sotto il simbolo di integrale.

Vogliamo ora esaminare come si muta questo integrale se noi vogliamo mutare, con una data trasformazione, *la variabile d'integrazione* x.

Noi faremo vedere che *l'integrale si trasformerà in modo che sotto il simbolo* $\int$ *occorrerà porre ciò che risulta dalla trasformazione dell'espressione differenziale* f (x) d x.

In effetti si ponga $x = \varphi(y)$ e sia $y$ la nuova variabile indipendente. Il calcolo dell'integrale si riduce a quello di una funzione la cui derivata rispetto a $x$ sia $f(x$ ; quindi, la derivata sua rispetto a $y$ sarà $f(x)\frac{dx}{dy}$. Ora se esprimiamo tutto l'integrale colla variabile $y$, abbiamo una funzione la cui derivata rispetto ad $y$ deve essere proprio questa ora scritta; cioè la funzione di integrare espressa in $y$ è

$$f(\varphi(y))\frac{dx}{dy};$$

l'integrale quindi è

$$\int f(\varphi(y))\frac{dx}{dy}dy.$$

Nel calcolo degli integrali la trasformazione degli integrali può essere assai utile; perchè è evidente che tanto più complicata sarà la ricerca di un integrale indefinito per quanto più complicata è la funzione che comparisce sotto il segno; ora naturalmente potrà accadere che con opportuna trasformazione di variabile indipendente, l'integrale dato si riduca ad un altro meno complicato, o di un tipo che sia già noto.

Di questo principio avremo spesso occasione di servirci.

Si abbia per esempio da calcolare

$$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen} x}$$

Qui la funzione che sta sotto il segno è una funzione *trascendente*.

Poniamo

$$x = \operatorname{arc} \cos y$$

cioè

$$y = \cos x$$

Allora

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - y^2}$$
$$\frac{d\,x}{d\,y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

e quindi l'integrale diventa

$$-\int \frac{d\,y}{1 - y^2}$$

e si ha così da integrare una funzione *algebrica razionale*, invece di una funzione *trascendente*.

Se ora si tratti di un integrale *definito* fra i limiti $a$, $b$, il nuovo integrale nella variabile $y$, bisognerà naturalmente definirlo fra due limiti che corrispondono ai due dati. Mediante la relazione data

$$x = \varphi(y)$$

noi possiamo trovare qual valore di $y$ corrisponde al valor $a$ di $x$, e qual valore di $y$ corrisponde al valore $b$ di $x$. Sieno $a'$ $b'$ tali valori di $y$; essi dovranno assumersi come nuovi limiti d'integrazione.

Così nell'esempio dato, se l'integrale rispetto ad $x$ bisognava definirlo da $x = 0$ sino a $x = \frac{\pi}{2}$, quello trasformato in $y$, bisognerà definirlo da $y = 1$ sino ad $y = 0$ perchè è facile verificare che si ha proprio una siffatta corrispondenza fra i valori di $x$ e di $y$.

§ 7. **Derivazione rispetto ad un parametro. Invertibilità dei segni di limite e integrazione; invertibilità dei segni di derivazione e integrazione.** — Cominciamo collo studiare l'integrale definito di una funzione che contiene, oltre la variabile d'integrazione, anche un'altra variabile $y$.

Per maggiore generalità supponiamo che i limiti d'integrazione sieno anche funzioni della variabile $y$, $a(y)$, $b(y)$.

*La data funzione* $f(x\,y)$ *sia continua rispetto ad ambo le variabili in un certo campo, e sieno continue le funzioni* $a(y)$ $b(y)$. Allora prima di tutto si può far vedere che l'integrale definito da $x = a(y)$ sino ad $x = b(y)$ è anche una funzione *continua* di $y$.

Poniamo

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x\,y)\,dx.$$

Avvertiamo una volta per sempre che pei teoremi di questo paragrafo e dei paragrafi seguenti, noi in generale non daremo che delle *condizioni sufficienti* per la loro sussistenza, ma non *necessarie*.

Le condizioni puramente *necessarie*, se anche possono trovarsi, sono quasi sempre di una complicatezza, che quasi inutilizza quei teoremi, per la difficoltà dell'applicazione ai casi speciali. Questa osservazione capita continuamente in tutto il calcolo infinitesimale, come noi a suo tempo abbiamo avvertito (vedi prefazione del calcolo differenziale).

Allora sarà:

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=\int_{a(y+k)}^{b(y+k)} f(x,y+k)\,dx -$$

$$-\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y)}^{b(y)} [f(x,y+k)-f(x,y)]\,dx -$$

$$-\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x,y+k)\,dx + \int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x,y+k)\,dx.$$

Ora consideriamo:

$$\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x,y+k)\,dx.$$

Essendo $a$ una funzione *continua* di $y$ si ha che la differenza fra $a(y+k)$ e $a(y)$ tende a zero col tendere di $k$ a zero.

Se per un momento indichiamo con $F(x,y+k)$ l'integrale indefinito, si ha che l'integrale definito sarà

$$F[a(y+k),y+k]-F[a(y),y+k].$$

Ora per la continuità di $F$ e per un teorema noto, si ha

$$F[a(y+k), y+k] - F[a(y), y+k] =$$
$$= [a(y+k) - a(y)] \, F'[a(y+\theta k), y+k] =$$
$$= [a(y+k) - a(y)] \, f[a(y+\theta k), y+k]$$

e per la continuità delle funzioni $f$ ed $a(y)$ possiamo sempre porre:

$$f[a(y+\theta k), y+k] = f(a, y) + \varepsilon$$

essendo $\varepsilon$ una quantità che si può rendere piccola a piacere diminuendo opportunamente $k$, onde

$$\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k)\, dx = [a(y+k) - a(y)][f(a, y) + \varepsilon].$$

Analogamente

$$\int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k)\, dx = [b(y+k) - b(y)]\,[f(b, y) + \varepsilon']$$

indicando semplicemente con $a$, $b$, i valori di queste funzioni nel punto $y$.

Onde infine:

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) =$$
$$= \int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\, dx -$$
$$- [a(y+k) - a(y)]\,[f(a, y) + \varepsilon] +$$
$$+ [b(y+k) - b(y)]\,[f(b, y) + \varepsilon'].$$

Ora, supponendo la funzione $f$ una funzione *continua* delle due variabili $x\, y$, per tutti i valori di $x$ compresi fra i limiti d'integrazione, dato un numero $\sigma$ piccolo a piacere, si potrà sempre trovare un valore di $k$ tale che, *per ogni* x *compreso nell'intervallo d'integrazione* sia sempre in valore assoluto

$$f(x, y+k) - f(x y) < \sigma.$$

Ciò si ricava subito dal teorema di cui abbiamo discorso nel § 9, Cap. I del calcolo differenziale, cioè che anche per le funzioni di *più* variabili, la continuità semplice è contemporaneamente *continuità uniforme* per tutto il campo.

Si ha quindi che l'integrale

$$\int_a^b [f(x, y+k) - f(x y)]\, d x$$

è minore in valore assoluto di

$$\int_a^b \sigma\, d x$$

cioè di

$$\sigma \int_a^b d x = \sigma (b - a)$$

la quale quantità può rendersi piccola a piacere diminuendo $\sigma$.

Si vede quindi che tutti i termini del secondo membro della formola superiore si possono rendere piccoli a piacere, e quindi il limite di esso è zero, cioè la funzione $\varphi$ è *continua*.

Si ha dunque: *Se la funzione integranda è una funzione continua delle due variabili* x y, *allora il segno di limite è invertibile col segno di integrale.*

In formola

$$\lim_{y=y'} \int_a^b f(x\,y)\,d\,x = \int_a^b \lim_{y=y'} f(x\,y)\,d\,x$$
$$= \int_a^b f(x\,y')\,d\,x.$$

Supponiamo ora che le funzioni $\alpha(y)$ $\beta(y)$ $f(x\,y)$ oltre che continua, sieno anche derivabili rispetto ad $y$, e che inoltre la derivata $f'_y$ sia *continua* rispetto ad ambedue le variabili.

Si ha intanto

$$f(x\,,y+k)-f(x\,y)=k\,f'_y(x\,,y+\theta\,k)$$

essendo $\theta$ un numero compreso fra 0 e 1, onde

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\int_a^b f'_y(x\,,y+\theta\,k)\,d\,x$$
$$-\,[f(a\,,y)+\varepsilon]\left[\frac{a(y+k)-a(y)}{k}\right]$$
$$+\,[f(b,y)+\varepsilon']\left[\frac{b(y+k)-b(y)}{k}\right]$$

Ora per le ipotesi fatte si ha

$$f'_y(x\,,y+\theta\,k)=f'_y(x\,y)+\varepsilon''$$

essendo $\varepsilon''$ una quantità che converge a zero per $k=0$, e inoltre, per la solita ragione, che la continuità semplice è anche una *continuità uniforme* in tutto il campo, si ha che si può trovare un $k$ tale che *per qualunque coppia di valori* x, y *del campo*, in quella eguaglianza sia sempre $\varepsilon'' < \sigma$ quantità piccola a piacere. Allora per qualunque valore di $y$ compreso nel campo e per qualunque $\theta$ compreso fra 0 e 1 sarà sempre in valore assoluto l'integrale

$$\int_a^b f'_y(x, y + \theta k)\, dx$$

differente dall'integrale

$$\int_a^b f'_y(x y)\, dx$$

di una quantità

$$\int_a^b \varepsilon''\, dx$$

che è minore di

$$\sigma \int_a^b dx = \sigma (b - a)$$

cioè di una quantità piccola a piacere.

Ciò significa che il limite per $k = 0$ dell'integrale rappresentato dal primo termine della formola superiore è

$$\int_a^b f'_y(x y)\, dx$$

e quindi si ha la formola (passando al limite per $k = 0$).

$$\varphi'(y) = \int_a^b f'_y(x\,y)\,dx - f(a, y)\,a'(y)$$
$$+ f(b, y)\,b'(y)$$

indicando con $\varphi'$, $a'$, $b'$ le derivate delle funzioni $\varphi$, $a$, $b$.

Se in particolare $a$, $b$ non sono funzioni di $y$, ma costanti, allora la formola si riduce semplicemente a

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x\,y)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x\,y)\,dx.$$

Come si vede dunque, *nel caso in cui la funzione* f *soddisfi alle condizioni dette, cioè che essa e la sua derivata rispetto a* y, *sieno funzioni continue rispetto ad ambedue le variabili* x, y, *sussiste il teorema della invertibilità dei due segni di derivazione e di integrazione.*

Questo teorema si chiama *il teorema della derivazione sotto il segno.*

Dalla formola superiore possiamo subito ricavare le già note formole di derivazione di un integrale definito rispetto ai limiti (v. § 3).

Infatti basta supporre che $f$ non contenga $y$, e che delle due funzioni $a(y)$, $b(y)$ una sia costante, e l'altra sia la variabile stessa $y$.

Si può notare che il teorema della invertibilità di cui si è parlato sussiste ancora semprechè la funzione rappresentata dall' integrale definito

$$F(x\,y) = \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

è *una tal funzione di* x y *che per essa sussiste il teorema della invertibilità delle due derivazioni rispetto ad* x *e* y.

Infatti si ha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x} = f(x\,y) \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(x\,y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x.$$

Per l'ipotesi fatta si ha intanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x\,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

e integrando rispetto ad $x$ si ha

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f(x\,y)\,d\,x = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

la quale formola dimostra il nostro assunto.

Dobbiamo ora passare a considerare il teorema della derivazione sotto il segno, nei casi singolari in cui o uno dei limiti d'integrazione è l'*infinito*, ovvero la funzione integranda è *infinita* in qualche punto.

In tali casi le condizioni poste non bastano più, e noi potremo aggiungerne delle altre, espresse anche sotto una forma semplice, e che sono *sufficienti* per la validità del teorema.

Supponiamo prima che uno dei limiti d'integrazione sia l'*infinito*, che cioè si abbia da derivare l'integrale

$$\int_a^\infty f(x\,y)\,d\,x.$$

Noi abbiamo visto che in generale perchè un integrale definito sia funzione *continua* di un parametro $y$ contenuto nell'integrando, basta che la funzione integranda sia una funzione continua di ambedue le variabili $x$, $y$. Ora una tal condizione non basta più se uno dei limiti è l'infinito.

Per convincersi di questo basta ricorrere ad un esempio.

Si può trovare che

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y\,x}{x}\,d\,x = \frac{1}{2}\pi$$

per ogni valore finito di $y$; ma per $y = 0$ evidentemente essendo zero l'integrando, per qualunque $x$, anche per $x = \infty$ tutto l'integrale sarà zero, e quindi quell'integrale definito non resta una funzione continua di $y$, sebbene la funzione $\dfrac{\operatorname{sen} y\,x}{x}$ sia una funzione continua di ambo le variabili.

Questo esempio basta per intendere che nel caso in esame occorrono altre condizioni.

Noi dimostreremo che *nel caso in cui la funzione da integrare oltre che continua è tale che per* $x = \infty$ *diventa zero algebricamente di ordine maggiore di* 1, *allora si conserva la continuità dell'integrale definito considerato come funzione del parametro, anche quando uno dei limiti è l'infinito, e se poi lo stesso si verifica anche per la derivata di quella funzione rispetto al parametro* y, *allora si conserva il teorema della derivazione sotto il segno.*

Infatti nel caso in cui la funzione $f(x\,y)$ per $x = \infty$ diventa zero algebricamente di ordine maggiore di 1, sappiamo (v. § 4) che l'integrale definito sino all'$\infty$ ha un valore finito, e quindi che potrà sempre trovarsi un numero $a'$ tale che, scelti due *qualunque* numeri $x'\,x''$ fra $a'$ e $\infty$ si abbia sempre che l'integrale definito da $x'$ a $x''$ sia minore di $\sigma$, ovvero anche, scegliendo in particolare $x' = a'$:

$$\int_{a'}^{x''} f(x\,y)\,dx < \sigma$$

e quindi analogamente anche

$$\int_{a'}^{x''} f(x\,,y+k)\,d\,x < \sigma$$

donde

$$\int_{a'}^{x''} [f(x\,,y+k) - f(x\,y)]\,d\,x < 2\,\sigma$$

e quindi anche il limite di questo integrale per $x'' = \infty$ sarà minore di $2\sigma$.

Ora

$$\int_a^\infty [f(x, y+k) - f(x\, y)]\, dx =$$

$$= \int_a^{a'} + \int_{a'}^\infty = \int_a^{a'} + \lim_{x''=\infty} \int_a^{x''}.$$

Intanto per effetto della continuità della funzione $f(x\, y)$ si potrà sempre trovare un valore di $k$ tale che per ogni $k_1$ minore di esso e per qualunque $x$ sia sempre in valore assoluto

$$|f(x, y+k_1) - f(x\, y)| < |f(x, y+k) - f(x\, y)|$$

e allora fissato un tale $k$ si potrà trovare il punto $a'$ per il quale sussiste la disuguaglianza

$$\lim_{x''=\infty} \int_{a'}^{x''} < 2\sigma$$

e fissato così $a'$, si potrà poi diminuire il $k$ in maniera che sia anche

$$\int_a^{a'} < \sigma$$

e ciò per effetto della dimostrata continuità dell'integrale definito fra limiti finiti.

Si vede dunque che si potrà sempre, sotto le ipotesi fatte, rendere piccola a piacere col diminuire $k$ la quantità

$$\int_a^\infty [f(x, y+k) - f(x\, y)]\, d\,x$$

con che si dimostra la continuità rispetto ad $y$ dell' integrale.

Supponiamo ora che anche $f'_y$ sia zero di ordine maggiore di 1 per $x = \infty$.

Allora per effetto della dimostrazione ora fatta ricaviamo che

$$\int_a^\infty [f'_y(x, y + \theta k) - f'_y(x\, y)]\, d\,x$$

converge a zero col diminuire di $k$; ma intanto

$$\int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x\,y)}{k}\, d\,x = \int_a^\infty f'_y(x, y + \theta k)\, d\,x$$

onde la differenza

$$\int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x\,y)}{k}\, d\,x - \int_a^\infty f'_y(x\,y)\, d\,x$$

per $k = 0$ converge a zero, cioè

$$\lim_{k=o} \int_a^\infty \frac{f(x, y+k) - f(x\,y)}{k}\, d\,x,$$

che è la derivata dell' integrale rispetto a $y$, è proprio eguale all'integrale della derivata; con ciò resta dimostrato il teorema della derivazione sotto il segno anche nel caso in cui uno dei limiti è l'infinito.

Passiamo ora all'altro caso singolare in cui la funzione sotto il segno diventa infinita in un punto; per fissare le idee supporremo che diventi infinita nel limite superiore.

Dimostreremo il teorema:

*Se le funzioni* f$(x\,y)$ *e* f$'(x\,y)$ *diventano in un punto* x (*qualunque sia il valore di* y *compreso nel campo*) *infinite algebricamente di ordine minore di* 1, *e se inoltre sono continue rispetto ad ambo le variabili, allora sussiste ancora il teorema della derivazione sotto il segno.*

Infatti se $b$ è il punto d'infinito, nelle ipotesi fatte i due integrali

$$\int_a^b f(x\,y)\,dx \quad , \qquad \int_a^b f'_y(x\,,y+\theta k)\,dx$$

sono finiti per un qualunque $y$ compreso nel campo, giusta un teorema del § 4.

Quindi per i risultati dello stesso citato paragrafo l'integrale

$$\int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x\,,y+\theta\,k)\,dx$$

si potrà rendere piccolo a piacere, opportunamente diminuendo $\varepsilon$. Quindi anche il suo limite per $k=0$ potrà rendersi piccolo a piacere.

Intanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(xy)\,dx = \lim_{k=o}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{f(x\,,y+k)-f(xy)}{k}\,dx$$

$$+\lim_{k=o}\int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x\,,y+\theta\,k)\,dx$$

(applicando alla seconda parte il noto teorema del valor medio); e inoltre evidentemente, per effetto del teorema generale di derivazione sotto il segno, si ha che

$$\lim_{k=0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{f(x, y+k)-f(x\,y)}{k}\,d\,x=$$

$$=\int_a^{b-\varepsilon}f'_y(x\,y)\,d\,x$$

perchè fra i limiti $a$, $b-\varepsilon$ non esiste alcun punto in cui la funzione diventa infinita.

Si può dunque fissare $\varepsilon$ in modo che la differenza fra

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x\,y)\,d\,x$$

e

$$\int_a^{b-\varepsilon}f'_y(x\,y)\,d\,x$$

sia minore di una quantità piccola a piacere; per $\varepsilon=0$ si ha dunque l'eguaglianza della derivata dell'integrale coll'integrale della derivata.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo notare che il teorema della derivazione sotto il segno può servire alcune volte utilmente per la ricerca di certi integrali definiti ricavandoli da altri già noti.

Così p. es. si sappia che

$$\int_0^\infty \frac{dx}{y^2+x^2} = \frac{\pi}{4y}.$$

Applicando la derivazione rispetto ad $y$ si ha evidentemente l'altra formola

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(y^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4y^2}$$

e da questa riapplicando la derivazione rispetto ad $y$ si potrebbero ottenere altre formole.

Inoltre c'è anche un'altro modo con cui applicare il teorema della derivazione sotto il segno, per ricavarne il calcolo di integrali definiti.

Si voglia p. es. calcolare

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx.$$

Si può osservare che $x^\alpha \log x$ è la derivata rispetto ad $\alpha$ di $x^\alpha$; quindi possiamo scrivere

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{d}{d\alpha} x^\alpha\right) dx$$

e per il teorema della derivazione sotto il segno, possiamo invertire il segno di derivazione col segno di integrale e scrivere che quell'integrale è uguale a

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^1 x^\alpha \, dx$$

ed evidentemente abbiamo così ottenuto una rilevante semplificazione, perchè è naturalmente assai più facile il calcolo dell'integrale della funzione $x^\alpha$ che quello della funzione $x^\alpha \log x$. Ed in effetti possiamo subito osservare che essendo $x^\alpha$ una funzione continua, il calcolo dell'integrale corrispondente si riduce al calcolo di una funzione la cui derivata sia $x^\alpha$, e d'altra parte tale funzione è semplicemente

$$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$$

la cui derivata è proprio $x^\alpha$.

Abbiamo quindi

$$\int_0^1 x^\alpha d x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha + 1}$$

e quindi

$$\int_0^1 x^\alpha \log x \, d x = \frac{d}{d \alpha} \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{1}{(\alpha + 1)^2}.$$

§ 8. **Invertibilità di due segni d'integrazione.** — Nel § precedente abbiamo supposto che la funzione sotto il segno d'integrale contenga un parametro $y$, e abbiamo studiata la derivazione dell'integrale rispetto ad $y$. Ora consideriamo invece l'integrazione rispetto ad $y$ dell'integrale dato.

Posto, come nel § 7,

$$\varphi(y) = \int^b f(x\, y)\, d x$$

consideriamo

$$\int_c^d \varphi(y)\, d\, y$$

che è eguale a

$$\int_c^d d\, y \int_a^b f(x\, y)\, d\, x.$$

Una tale espressione si chiama un *integrale doppio;* noi in seguito avremo occasione di dedicare agli integrali multipli un capitolo speciale.

Per ora vogliamo solo rispondere alla domanda: Si può invertire l'ordine delle due integrazioni?

Questo problema è l'analogo di quello già trattato nel calcolo differenziale sull'invertibilità delle derivazioni.

Si può far vedere *che se i limiti* a, b *sono costanti, cioè non dipendenti da* y, *e sono naturalmente anche costanti i limiti* c, d, *e se la funzione* f (x y) *è una funzione continua delle due variabili in tutto il campo che si estende, per* x *da* a *a* b, *e per* y *da* c *a* d, *allora si può invertire l'ordine delle integrazioni.*

È facile infatti far vedere che le derivate delle due espressioni

$$A = \int_c^d d\, y \int_a^b d\, x\, f(x\, y)$$

$$B = \int_a^b d\, x \int_c^d d\, y\, f(x\, y)$$

considerate come funzioni delle quattro quantità $a$, $b$, $c$, $d$, sono fra loro tutte eguali; donde si conchiuderà che le due espressioni $A$ $B$ non possono che differire per una costante che poi sarà facile dimostrare eguale a zero,

Facciamo p. es. le derivate rispetto ad $a$.

Nell'integrale $A$, la quantità $a$ è un parametro che compare nella funzione che è sotto il primo integrale che è quello da $c$ a $d$; e tale funzione che è poi

$$\int_a^b dx\, f(x\, y)$$

è una funzione continua di $a$ e di $y$ in virtù delle ipotesi fatte e dei teoremi noti; e inoltre la derivata di questa funzione rispetto ad $a$ cioè $-\mathrm{f}(a\, y)$ (v. § 3) è anche una funzione continua delle due variabili $a$, $y$.

In virtù quindi dei teoremi del § precedente noi possiamo operare la derivazione sotto il segno e otteniamo quindi

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \int_c^d dy \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b dx\, f(x\, y)$$

$$= -\int_c^d dy\, f(a\, y)$$

Deriviamo invece $B$ rispetto ad $a$.

Essendo $a$ il limite inferiore del primo integrale che compare in $B$ si ha

$$\frac{\partial B}{\partial a} = -\left[\int_c^d d\,y\,f(x\,y)\right]_{x=a}$$

$$= -\int_c^d d\,y\,f(a\,y)$$

cioè si ha lo stesso risultato di prima.

Nella stessa maniera si possono riconoscere uguali le derivate rispetto a tutte quattro le variabili $a$, $b$, $c$, $d$.

Le due espressioni $A$, $B$ non possono dunque differire fra loro che per una costante $C$, cioè per una quantità che non dipende da nessuna delle quattro variabili $a$, $b$, $c$, $d$. Ponendo allora $a = b$, tale quantità costante $C$ non può che conservare il medesimo valore; ma in tal caso sia $A$ che $B$ diventano zero, dunque è zero anche la loro differenza, cioè possiamo scrivere $C = 0$, e quindi $A = B$.

Il teorema dimostrato si suol chiamare *il teorema della integrazione sotto il segno*.

Resta ora ad esaminare i soliti due casi singolari di cui abbiamo trattato nel § 4.

Esaminiamo se sussiste ancora il teorema dell'integrazione sotto il segno, se uno dei limiti è l'infinito, o lo sono ambedue.

Supponiamo che si verifichi la relazione.

$$\int_c^d d\,y \int_a^b d\,x\,f(x\,y) = \int_a^b d\,x \int_c^d d\,y\,f(x\,y)$$

qualunque sieno i limiti $b$, $d$ finiti, ma grandi a piacere. Facciamo tendere uno di essi all'infinito, p. es. $b$, e supponiamo naturalmente che esistano limiti determinati dei due membri per $b = \infty$. Allora il secondo membro diventa senz'altro per le definizioni del § 4.

$$\int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(xy)$$

mentre il primo membro lo indicheremo con

$$\lim_{b=\infty} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(xy).$$

Questa ultima espressione non può farsi eguale a

$$\int_c^d dy \lim_{b=\infty} \int_a^b dx\, f(xy) = \int_c^d dy \int_a^\infty dx\, f(xy)$$

almenochè non si possa mostrare che il segno di limite rispetto al parametro $b$ è invertibile col segno di

$$\int_c^d \cdot\,.$$

Ora pei teoremi del § precedente tale invertibilità sussiste senz'altre condizioni, perchè sappiamo che *essendo finiti i limiti* c, d, per tale invertibilità, cioè per la continuità dell'integrale considerato come funzione di $b$, basta che la funzione racchiusa sotto il segno di tale integrale cioè che

$$\int_a^b dx\, f(x\,y)$$

sia funzione continua di $b$ e $y$, il che effettivamente si verifica.

Ricaviamo quindi che *se uno solo dei quattro limiti è l'$\infty$, allora il teorema della integrazione sotto il segno sussiste, senza aggiungere altre condizioni sulla natura della funzione data, salvo naturalmente quelle che si riferiscono all'integrabilità sino al limite* $\infty$.

Ma non è più lo stesso se due dei limiti sono infiniti, cioè se si fanno convergere all'infinito sia $b$ che $d$.

Ed infatti nella relazione

$$\int_c^d dy \int_a^\infty dx\, f(x\,y) = \int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(x\,y)$$

se vogliamo passare al limite per $d = \infty$, il primo membro diventa esattamente

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty dx\, f(x\,y)$$

ma il secondo diventa

$$\lim_{d=\infty} \int_a^\infty dx \int_c^d dy\, f(x\,y)$$

che non è eguale a

$$\int_a^\infty d\,x \lim_{d=\infty} \int_c^d d\,y\, f(x\,y) = \int_a^\infty d\,x \int_c^\infty d\,y\, f(x\,y)$$

almenochè non si verifichino altre condizioni.

Sappiamo infatti dal paragrafo precedente che perchè un integrale $\int_a^\infty$ di una funzione di $d$ e $x$ sia funzione continua del parametro $d$, non basta più che la funzione sotto il segno sia funzione continua delle due variabili $d$, $x$.

Abbiamo trovata una condizione sufficiente per questo caso, ma tale condizione adattata al caso nostro non ci si presenterebbe sotto una forma facile.

Possiamo invece tener conto di quest'altra condizione anche solo *sufficiente*, che cioè *sussiste la invertibilità se la funzione* f (x y) *si conserva sempre minore in valore assoluto del valore di*

$$\frac{\varphi(x)}{y^\nu} \; (\nu > 1)$$

*dove* φ (x) *sia una funzione integrabile in un qualunque intervallo sino all'* ∞.

Infatti in tal caso avendosi

$$\int_a^\infty d\,x \int_c^\infty d\,y\, f(x\,y) = \int_a^\infty d\,x \int_c^b d\,y\, f(x\,y) +$$
$$+ \int_a^\infty d\,x \int_b^\infty d\,y\, f(x\,y)$$

e potendosi sempre scegliere $b$ tale che il secondo termine del secondo membro diventi piccolo a piacere, (perchè tal termine è minore in valore assoluto di

$$-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{b^{\nu-1}}\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \qquad \text{(v. § 4, Cap. I)}$$

che tende a zero per $b=\infty$), si ricava che il limite del primo termine del secondo membro per $b=\infty$, è eguale al primo membro.

Passiamo ora al caso in cui la funzione diventi infinita in un punto p. es. $x=b$.

Allora nell'eguaglianza

$$\int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(xy) = \int_a^{b-\varepsilon} dx \int_c^d dy\, f(xy)$$

passando al limite per $\varepsilon=0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(xy) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(xy)$$

e nel primo membro, come già sappiamo dal § precedente, il segno di limite non è invertibile col segno di integrale, almenochè la funzione $f(xy)$, oltre la continuità, non soddisfi ancora ad altre condizioni.

Possiamo trovare una condizione *sufficiente* sotto la seguente forma:

*Sussiste l'invertibilità delle due integrazioni anche nel caso in cui la funzione diventi infinita* *in un punto* $x = b$, *se la funzione oltre alla solita condizione della continuità, si conservi poi nel suo valore assoluto minore di una espressione della forma*

$$\frac{\varphi(y)}{(x-b)^{\nu}} \cdot (\nu < 1)$$

*dove* $\varphi(y)$ *sia sempre finita.*

La dimostrazione anche qui può procedere come quella di sopra osservando che

$$\int_c^d \int_a^b = \int_c^d \int_a^{b-\varepsilon} + \int_c^d \int_{b-\varepsilon}^b$$

e che nelle supposte ipotesi il secondo termine del secondo membro tende a zero coll'impiccolire di $\varepsilon$.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo notare che si potrebbe passare allo studio degli integrali doppi, non nel caso in cui i limiti sono costanti, ma nel caso più generale in cui i limiti della prima integrazione (quella rispetto ad $x$) sono funzioni della variabile $y$.

Con ciò si farebbe la ricerca più generale analoga a quella fatta a proposito della derivazione sotto il segno.

Ma di ciò tratteremo nell'apposito capitolo sugli integrali multipli.

Vogliamo poi ancora notare un esempio in cui non si può invertire l'ordine delle due integrazioni.

Tale esempio è

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{(y^2 - x^2)}{(y^2 + x^2)^2}$$

Facendo l'integrazione prima rispetto ad $x$ e poi rispetto ad $y$ si ha per risultato $+\frac{\pi}{4}$, e si ha invece $-\frac{\pi}{4}$ eseguendo le integrazioni nell'altro ordine. Si può osservare che la funzione data è discontinua nel punto ($x = 0$, $y = 0$).

## CAPITOLO II.

### L' INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI.

§ 1. **Prima forma delle condizioni di integrabilità.** — Finora noi abbiamo supposto che le funzioni di cui ci siamo occupati nei vari teoremi dei paragrafi precedenti erano tutte integrabili.

Ora ci si presenta naturalmente il problema: A quali condizioni deve soddisfare una funzione perchè sia integrabile fra limiti dati? cioè perchè, formato il sommatorio indicato nel capitolo precedente con

$$\Sigma f_r \cdot \delta_r ,$$

questo abbia un limite determinato e finito?

Cominciamo coll'osservare che, per ciò che abbiamo già detto nella definizione fondamentale di integrale definito, tale limite deve essere indipendente:

1.° Dal modo col quale gli intervalli $\delta_r$ si fanno tendere a zero.

2.° Dalla scelta dei valori $f_r$ in ogni intervallo $\delta_r$.

Ora supponiamo di fissare che ogni volta per valore di $f_r$ si debba scegliere il *massimo* o il *limite superiore* $L_r$ dei valori che la funzione $f(x)$ ha in tutto l'intervallo $\delta_r$ compresi gli estremi; allora il limite del sommatorio corrispondente

$$\Sigma L_r \delta_r$$

sarà il valore dell'integrale definito; e se invece scegliamo ogni volta per valore $f_r$, il *minimo* o il *limite inferiore* $l_r$ dei valori di $f$ in $\delta_r$, il limite dell'altro sommatorio

$$\Sigma l_r \delta_r$$

sarà anche il valore dell'integrale. Per modo che la differenza dei due limiti cioè il limite della differenza

$$\lim \Sigma \delta_r [L_r - l_r]$$

dovrà essere zero.

Chiamando *oscillazione* della funzione nell'intervallo $\delta_r$ la differenza $(L_r - l_r)$, e indicandola con $D_r$, si ha che

$$\lim \Sigma \delta_r D_r = o$$

Dalla data definizione di integrale ci appare dunque *come condizione necessaria per la esistenza del limite del sommatorio, che sia zero il limite della somma dei prodotti degli intervalli parziali per le oscillazioni che la funzione* f *fa in essi intervalli.*

Dimostreremo ora che tale condizione è anche una condizione *sufficiente.*

Facciamo vedere che se

$$\lim \Sigma \delta_r D_r = o$$

allora esiste il limite

$$\lim \Sigma f_r \delta_r$$

ed ha un valore indipendente dalla scelta degli $f_r$ e dalla legge colla quale i $\delta_r$ convergono a zero.

Supponiamo in effetti che si considerino due diverse divisioni dell'intervallo totale; gli intervalli parziali della prima divisione sieno indicati con $\delta_1 \ldots \delta_r \ldots$ e quelli della seconda con $\delta'_1 \ldots \delta'_s \ldots$

Queste due divisioni sieno fra loro indipendenti.

Consideriamo come punti di una terza divisione dell'intervallo quelli che stabiliscono la prima insieme a quelli che stabiliscono la seconda, e gli intervalli di questa terza divisione chiamiamoli $\rho$; per modo che ogni $\delta$ e ogni $\delta'$ sarà la somma di un numero *intero* di intervalli parziali $\rho$.

Sia

$$\delta_r = \rho_{h+1} + \rho_{h+2} + \ldots + \rho_{h+t}$$

e quindi

$$f_r \delta_r = f_r \rho_{h+1} + \ldots + f_r \rho_{h+t}$$

e chiamando

$$f_{h+1}, f_{h+2} \ldots f_{h+t}$$

dei valori della funzione $f$ negli intervalli $\rho_{h+1} \ldots \rho_{h+t}$, possiamo scrivere identicamente

$$f_r \delta_r = (f_{h+1} \rho_{h+1} + \ldots + f_{h+t} \rho_{h+t}) +$$
$$+ [(f_r - f_{h+1}) \rho_{h+1} + \ldots + (f_r - f_{h+t}) \rho_{h+t}].$$

Ora le differenze

$$f_r - f_{h+1} \quad , \quad \ldots f_r - f_{h+t}$$

sono differenze fra due valori di $f$ nell'intervallo $\delta_r$, giacchè ognuno degli intervalli $\rho_{h+1} \ldots \rho_{h+t}$ è sempre una parte dell'intervallo $\delta_r$; quindi quelle differenze saranno certamente minori o al massimo eguali al valore della oscillazione in $\delta_r$ cioè a quella quantità che abbiamo chiamata $D_r$.

Ponendo dunque

$$f_r\, \delta_r = (f_{h+1}\, \rho_{h+1} + \ldots + f_{h+t}) + \omega$$

possiamo dire che in valore assoluto

$$\omega \leqq [D_r\, \rho_{h+1} + D_r\, \rho_{h+2} + \ldots + D_r\, \rho_{h+t}]$$

cioè

$$\omega \leqq D_r\, \delta_r.$$

Formando quindi il sommatorio facendo variare l'indice $r$, abbiamo

$$\Sigma\, f_r\, \delta_r = \Sigma\, f_h\, \rho_h + \Sigma\, \omega$$

dove abbiamo indicato con $\Sigma\, f_h\, \rho_h$ il sommatorio analogo, in quanto al modo di formazione, a quello del primo membro ma formato cogli intervalli $\rho$. La espressione $\Sigma\, \omega$ soddisfa alla disuguaglianza

$$\Sigma\, \omega \leqq \Sigma\, \delta_r\, D_r$$

e quindi, per le ipotesi fatte, converge a zero.

Se ora rifacciamo le stesse considerazioni, ma partendo dagli intervalli $\delta'_s$ anzichè dagli intervalli $\delta_r$, otterremo la formola

$$\Sigma\, f_s\, \delta'_s = \Sigma\, f_h\, \rho_h + \Sigma\, \omega'$$

dove $\Sigma\, \omega'$ converge anche a zero.

Sottraendo si ha dunque

$$\Sigma f_r \delta_r - \Sigma f_s \delta'_s = \Sigma \omega - \Sigma \omega' = \Omega$$

dove $\Omega$ è evidentemente una quantità che converge a zero.

Supponiamo ora che la seconda divisione, quella cioè che dà luogo agli intervalli $\delta'$, non sia propriamente indipendente dalla prima divisione, ma rappresenti uno stadio successivo alla prima divisione; in altri termini che nel far tendere a zero gli intervalli parziali, in un precedente stadio, questi sono rappresentati dai $\delta$, e in un seguente stadio, sono invece rappresentati dai $\delta'$.

Allora l'ultima formola trovata ci dice che la differenza fra i valori della espressione $\Sigma f_r \delta_r$ in due stadi successivi si può rendere piccola a piacere; questa, come sappiamo, è condizione necessaria e sufficiente per conchiudere che quella espressione converge ad un limite determinato e finito. Resta con ciò dimostrato il nostro assunto.

Si può ora far vedere che questo limite è indipendente:

1) Dalla legge colla quale si è stabilita la divisione in intervalli parziali e si fanno tendere questi a zero;

2) Dalla scelta dei valori $f_r$.

Ed infatti dall'ultima formola ottenuta, supposto che gli intervalli $\delta$ e $\delta'$ sieno fra loro assolutamente indipendenti, si ricava che

$$\lim \left[\Sigma f_r \delta_r - \Sigma f_s \delta'_s\right] = o$$

e quindi *se esiste il limite del primo termine* noi possiamo scrivere

$$\lim \Sigma f_r \, \delta_r - \lim \Sigma f_s \, \delta'_s = o$$

donde concludiamo che *esisterà anche il limite del secondo termine e sarà lo stesso del primo.* Se poi inoltre stabiliamo un'altra legge per la scelta dei valori $f_r$ e formiamo $\Sigma \delta_r f_r^{(1)}$ e supponiamo che esiste il limite $\Sigma \delta_r f_r$, possiamo subito dimostrare che esiste anche il limite della prima espressione e che è lo stesso dell'altro. Perchè evidentemente

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r^{(1)} = \Sigma \delta_r \left[f_r - f_r^{(1)}\right],$$

ed essendo $(f_r - f_r^{(1)})$ la differenza fra due valori di $f$ nell'intervallo $\delta_r$, sarà minore o eguale all'oscillazione $D_r$, e quindi

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r^{(1)} \leqq \Sigma \delta_r D_r$$

cioè il primo membro, per le ipotesi fatte, converge a zero, e quindi, *esistendo il limite di una di quelle espressioni, esisterà, e sarà lo stesso, anche il limite dell'altra.*

§ 2. **Seconda forma del criterio d'integrabilità.** — Il criterio d' integrabilità trovato nel paragrafo precedente ci si presenta sotto una forma che nell' applicazione pratica potrebbe riuscire difficile; cercheremo perciò di trasformare quel criterio in un altro che sia di più facile applicazione.

Se

$$\lim \Sigma \delta_r D_r = o$$

vuol dire che possiamo rendere $\Sigma \delta_r D_r$ minore di qualunque quantità assegnabile $\sigma$; cioè possiamo trovare uno stadio di impiccolimento degli intervalli $\delta$, tale che *per esso e per tutti i successivi stadi*, sia sempre

$$\Sigma\, \delta_r.\, D_r < \sigma$$

Sia allora $\tau$ la somma di tutti gli intervalli parziali nei quali l' oscillazione sia maggiore di un certo numero fissato $\sigma'$.

Sarà evidentemente

$$\tau\, \sigma' \leq \Sigma\, \delta_r.\, D_r < \sigma$$

donde

$$\tau < \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Lasciando dunque fisso $\sigma'$, e facendo diminuire $\sigma$, diminuirà il valore di $\tau$, cioè il limite di $\tau$, per un qualunque $\sigma'$ fisso, è zero.

Resta dunque trovata come *condizione necessaria per l'integrabilità che la somma degli intervalli parziali nei quali l'oscillazione della funzione si può rendere maggiore di una certa qualunque quantità assegnata, deve tendere a zero. In formola: lim* $\tau = 0$.

Ed è facile dimostrare che questa è anche una condizione *sufficiente*.

Perchè chiamando $D$ la massima delle oscillazioni di $f$ nei vari intervalli la cui somma è $\tau$, e osservando che in tutti gli altri intervalli l'oscillazione è minore o eguale a $\sigma'$, abbiamo evidentemente la disuguaglianza

$$\Sigma\, \delta_r\, D_r \leq \tau\, D + (T - \tau)\, \sigma'$$

indicando con $T$ tutto l'intervallo d'integrazione e quindi con $T - \tau$ la somma di tutti gli intervalli che non compongono la somma $\tau$. Da questa relazione si vede che, *se $\tau$ può rendersi piccola a piacere*, cioè se $\lim \tau = o$, poichè $\sigma'$ è arbitrario e quindi può farsi piccolo a piacere, anche il primo membro potrà farsi piccolo per quanto si vuole, cioè converge a zero.

Possiamo dunque conchiudere che le due condizioni espresse dalle due formole

$$\lim \Sigma \, \delta_r \, D_r = o$$
$$\lim \tau = o$$

sono fra loro perfettamente equivalenti.

§ 3. **Funzioni integrabili e non integrabili. Applicazione dei criteri dimostrati.** — Applicando i teoremi dimostrati nei due paragrafi precedenti, possiamo trovare delle classi di funzioni integrabili. E prima di tutto è facile vedere che *ogni funzione continua è integrabile.*

Basta infatti ricordare i teoremi dimostrati nel Cap. I, § 8 del calcolo differenziale sulle funzioni continue. Ivi abbiamo fatto vedere che ogni funzione continua è anche *uniformemente continua*, e di qui ne abbiamo dedotto che data una funzione continua in tutto un intervallo si può dividere tale intervallo in altri intervalli parziali tali che in ognuno di questi l'oscillazione sia minore di una quantità $\sigma'$ piccola a piacere. Tenendo dunque presente il criterio del paragrafo precedente, possiamo dire che per le *funzioni continue* il numero $\tau$ può rendersi sempre zero, per quanto piccolo sia $\sigma'$ dato, e quindi le funzioni continue sono *integrabili.*

*Sono anche integrabili le funzioni finite discontinue aventi un numero finito di punti di discontinuità in ciascuno dei quali la funzione abbia naturalmente un salto finito.* Queste funzioni si sogliono chiamare *funzioni generalmente continue.* Ricordiamo a questo proposito che per una funzione discontinua in un punto $a$ si chiama *salto* della funzione in $a$ la differenza del valore della funzione in $a$, e del *limite* dei valori della funzione avvicinandosi al punto $a$, supposto che tale limite esista. Che se poi questo limite è indeterminato allora per *salto* della funzione in $a$ può intendersi la differenza fra i due valori estremi dentro i quali oscilla il valore della funzione coll'avvicinarsi ad $a$. Se, come abbiamo supposto, la funzione è sempre finita, allora naturalmente il *salto* della funzione è sempre finito.

Per dimostrare ora il teorema enunciato, indichiamo con $a_1\, a_2 \ldots a_n$ gli $n$ punti di discontinuità della funzione, e circondiamoli con $n$ intervalli piccoli a piacere. Se $d$ è il massimo di tutti questi intervalli, la somma di tutti essi è minore di $n\,d$. In tutto il rimanente tratto dell'intervallo totale di integrazione la funzione è continua, e quindi si può fare la divisione in intervalli parziali tali che l'oscillazione in essi sia sempre minore di una qualunque quantità fissata $\sigma'$. Gli intervalli in cui dunque l'oscillazione della funzione *potrà essere* maggiore di $\sigma'$ sono solo quelli attorno ai punti di discontinuità; ma la somma di essi è minore di $n\,d$, e può perciò rendersi piccola a nostro piacere perchè $n$ è finito, e $d$ è arbitrario; quindi anche nel nostro caso il numero $\tau$ può rendersi piccolo a piacere, cioè ha per limite zero.

Esistono poi anche altre classi di funzioni discontinue integrabili, e per trovarle occorrerà inoltrarci in qualche considerazione sulle varie specie di discontinuità delle funzioni.

I punti di discontinuità di una funzione possono formare un gruppo infinito di punti (v. Cap. I del *Calcolo differenziale*). Ora un gruppo infinito di punti può essere di due specie; può cioè accadere che si possano racchiudere tutti i punti del gruppo in intervalli la cui somma si possa rendere minore di qualunque quantità assegnabile; ovvero questo non possa farsi. Nel primo caso il gruppo di infiniti punti si suol chiamare un *gruppo discreto di punti*, e nel secondo caso un *gruppo lineare di punti*. Questa denominazione di gruppo *lineare* vuol ricordare il fatto che per *tutti* i punti di un tratto di *linea* effettivamente non si verifica quella proprietà.

Un esempio di un gruppo *discreto* di punti, è un qualunque gruppo avente un numero finito di punti-limiti (v. Cap. I, § 1 del *Calcolo differenz.*). Perchè circondando allora tali punti limiti con intervalli piccoli a piacere, al di fuori di questi, resteranno solo dei punti del gruppo ma in numero *finito*, e ciascuno di questi perciò potrà circondarsi con intervalli la cui somma sia anche piccola a piacere.

Ciò premesso diciamo ancora che una funzione discontinua si chiamerà una *punteggiata discontinua*, se i punti di discontinuità formano un *gruppo discreto;* e si dirà invece una *funzione discontinua lineare* se quei punti formano un gruppo lineare.

Possiamo allora subito dedurre il teorema di

Riemann: *Una funzione punteggiata discontinua è integrabile.*

La dimostrazione può procedere esattamente come quella fatta sopra per il caso in cui è finito il numero dei punti di discontinuità, giacchè anche per la punteggiata discontinua si verifica la proprietà fondamentale che ci è servita per quel caso, che cioè tutti i punti di discontinuità possono racchiudersi in intervalli la cui somma può rendersi piccola a piacere.

Un esempio di una funzione punteggiata discontinua può esser dato da una funzione così definita. Abbia $f(x)$ il valore *1 in tutti i punti* del gruppo

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

e il valore zero *in tutti gli altri punti* del tratto da *0* ad *1*. Una tal funzione' è integrabile in tale intervallo. Applicando la definizione di integrale definito, è facile trovare che il valore dell'integrale di una tal funzione è zero. Perchè infatti facciamo la divisione di tutto il tratto da *0* ad *1* in intervalli parziali, e di questi distinguiamone due specie, cioè quelli attorno i punti di discontinuità, e quelli che non comprendono quei punti. Quella parte del sommatorio

$$\Sigma f_r \, \delta_r$$

corrispondente a questi secondi intervalli è evidentemente zero, perchè $f(x)$ è sempre zero in qualunque punto di essi; e la parte del sommatorio corrispondente invece ai primi intervalli avrà sempre un valore minore o eguale al prodotto della somma di tutti gli intervalli, per *1* che è il valore della funzione nei punti di discontinuità.

Ma la somma di tutti i primi intervalli può impicciolirsi a piacere, dunque il limite del sommatorio non può essere che zero.

§ 4. **Teoremi sulle funzioni integrabili. Integrazione per serie.** — Una domanda che ci viene spontanea sulle funzioni integrabili è la seguente: Componendo fra loro, con segni di operazioni analitiche, più funzioni integrabili in numero finito o infinito, si ha una funzione integrabile?

*In quanto alla somma di due funzioni integrabili, è evidente che essa è anche una funzione integrabile* e a questo risultato si può giungere direttamente colla definizione di integrale definito, anche senza ricorrere ai teoremi di integrabilità sviluppati in questo capitolo; ed è perciò che noi nel capitolo precedente abbiamo potuto già servirci di questo teorema. Ed infatti se si suppongono $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funzioni integrabili e quindi che i due sommatorii

$$\Sigma\, \varphi_{r}.\, \delta_{r}. \quad , \quad \Sigma\, \psi_{r}.\, \delta_{r}.$$

hanno limiti determinati e finiti, avrà anche limite determinato e finito la somma di tali due sommatorii; e tenendo cura di scegliere i valori di $\varphi_{r}.$, $\psi_{r}.$ sempre nei medesimi punti, la somma di essi nel limite sarà precisamente l'integrale della somma delle due funzioni.

Un poco più difficile è invece dimostrare l'altro teorema:

*Il prodotto di due funzioni integrabili è anche una funzione integrabile.*

Infatti cominciamo coll'esaminare l'oscillazione del prodotto $\varphi(x)\psi(x)$ nell'intervallo $\delta_r$.

Supponiamo per un momento che i valori di $\varphi$, $\psi$ *sieno sempre positivi* per tutto il cammino di integrazione.

Indichiamo con $M_\varphi, m_\varphi$ i limiti, superiore e inferiore, dei valori di $\varphi$ in $\delta_r$, e così analogamente con $M_\psi, m_\psi$ quelli di $\psi$, e con $M_{\varphi\psi}, m_{\varphi\psi}$ quelli relativi al prodotto $\varphi\psi$.

Allora le differenze

$$M_\varphi - m_\varphi$$
$$M_\psi - m_\psi$$
$$M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi}$$

sono le oscillazioni di $\varphi$, $\psi$, $\varphi\psi$, rispettivamente in $\delta_r$. Essendo intanto positive tutte le quantità $M$, $m$, possiamo senz'altro scrivere le disuguaglianze

$$M_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi$$
$$m_{\varphi\psi} \geqq m_\varphi m_\psi$$

donde

$$\begin{aligned} M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} &\leqq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi \\ &\leqq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi) \end{aligned}$$

e indicando con $D^{(r)}{}_{\varphi\psi}$, $D^{(r)}{}_\varphi$, $D^{(r)}{}_\psi$ le oscillazioni delle tre funzioni $\varphi\psi$, $\varphi$, $\psi$, abbiamo

$$D_{\varphi\psi}{}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi{}^{(r)} + m_\psi D_\varphi{}^{(r)},$$

e se in luogo di $m_\psi$ poniamo $M_\psi$ rinforziamo la disuguaglianza e quindi possiamo scrivere

$$D_{\varphi\psi}{}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi{}^{(r)} + M_\psi D_\varphi{}^{(r)}$$

Questa disuguaglianza vale per un qualunque intervallo $\delta_r$; se dunque si indicano con $M\,M'$ i limiti superiori dei valori di $\varphi$, $\psi$ in *tutto* l'intervallo d'integrazione, e se sostituiamo in quella formola, $M$, $M'$ in luogo di $M_\varphi$, $M_\psi$ evidentemente quella disuguaglianza si rinforza ancora, perchè $M$, $M'$ non possono essere minori di $M_\varphi$, $M_\psi$ rispettivamente. Abbiamo dunque

$$D_{\varphi\psi} \leqq M\, D_\psi^{(r)} + M'\, D_\varphi^{(r)}$$

e di qui si ha

$$\Sigma\, \delta_r\, D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq M\, \Sigma\, \delta_r\, D_\psi^{(r)} + M'\, \Sigma\, \delta_r\, D_\varphi^{(r)}.$$

Supposto ora le due funzioni date integrabili, tenderanno a zero le sommatorie

$$\Sigma\, \delta_r\, D_\psi^{(r)}$$
$$\Sigma\, \delta_r\, D_\varphi^{(r)}$$

per effetto del teorema dimostrato nel § 1, e quindi, in forza della relazione di sopra, tenderà a zero anche

$$\Sigma\, \delta_r\, D_{\varphi\psi}^{(r)}$$

e quindi il prodotto $\varphi\psi$ è integrabile.

Abbiamo fatta questa dimostrazione facendo la ipotesi che le due funzioni $\varphi$, $\psi$ sieno sempre positive per qualunque punto dell'intervallo d'integrazione. Ma è chiaro che dimostrata la cosa per quel caso resta dimostrato anche in generale, perchè noi possiamo sempre aggiungere alle due funzioni $\varphi$, $\psi$ due costanti $C$, $C'$ tali che le somme

$$\varphi + C$$
$$\psi + C'$$

abbiano sempre valore positivo; basterà perciò prendere $C, C'$ maggiori dei valori assoluti dei limiti inferiori delle due funzioni $\varphi, \psi$ in tutto l'intervallo dato.

Allora il prodotto

$$(\varphi + C)(\psi + C') = \varphi\psi + C\psi + C'\varphi + CC',$$

per le dimostrazioni fatte, è integrabile, e quindi sarà integrabile anche il prodotto $\varphi\psi$, che è eguale a

$$(\varphi + C)(\psi + C') - C\psi - C'\varphi - CC'$$

cioè che si compone mediante la somma di funzioni integrabili.

Vogliamo ora supporre che il numero delle operazioni non sia più *finito*, ma infinito, cioè p. es., che si tratti di una somma di infiniti termini ognuno dei quali rappresenti una funzione integrabile. Entriamo così nel cosiddetto problema dell'*integrazione per serie*. Questo problema è analogo a quello trattato nel volume primo e riferentesi alla derivazione per serie (v. vol. I, Cap. II, § 2).

Immaginiamo data una serie convergente, i cui termini sieno funzioni integrabili di $x$ in un intervallo da $a$ a $b$. Noi ci domandiamo:

In quali casi una tal serie rappresenterà *una funzione integrabile* di $x$, e quando potrà farsi l'integrazione di tutta la serie facendo la somma degli integrali dei singoli termini?

Al solito noi non vogliamo le condizioni *puramente necessarie* perchè questo accada; ci basterà solo trovare una condizione *sufficiente* sotto una forma facile, di uso frequente e di facile applicazione.

Noi dimostreremo il teorema:

*Se la serie data è una serie convergente in ugual grado, e se tutti i suoi termini sono funzioni integrabili, allora la serie rappresenta una funzione integrabile e l' integrazione si fa facendo la serie degli integrali dei singoli termini.*

Sia infatti

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$$
$$= \sum_1^{\infty} u_h(x).$$

Indichiamo con $R_n(x)$ il resto di questa serie; si ha allora

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x)$$

e per le ipotesi fatte *sulla convergenza in ugual grado della serie*, la quantità $R_n(x)$ può rendersi minore di $\sigma$ per qualunque punto $x$.

Dimostriamo prima che $f(x)$ è integrabile supposto che sieno integrabili i diversi termini $u(x)$.

Indichiamo con

$$D_r^{(1)}\, D_r^{(2)} \dots$$

le oscillazioni dei termini

$$u_1(x)\, u_2(x) \dots$$

nell'intervallo parziale $\delta_r$, che è al solito uno degli intervalli in cui si è diviso l' intervallo totale di integrazione, mentre poi indichiamo con $D_r^{(f)}$,

$D_r^{(R)}$ le oscillazioni di $f$ e $R$ nello stesso intervallo $\delta_r$.

Allora è evidente che il valore del limite superiore nell'intervallo $\delta_r$ della funzione $f$ che è la somma di $u_1\, u_2 \ldots R$ non può superare la somma dei limiti superiori di tutte queste funzioni; se queste p. es., hanno i loro valori massimi tutte nel medesimo punto $x$, allora e allora solo il massimo di $f$ corrisponde alla somma dei massimi; ma in generale, non avverandosi questa specialità, il massimo di $f$ sarà *minore* della somma dei massimi; e così anche il minimo di $f$ sarà *maggiore* della somma dei minimi. Onde abbiamo, indicando con $M_{(f)}, m_{(f)}, M^{(1)}, m^{(1)}, \ldots M^{(R)}, m^{(R)}$, rispettivamente i massimi e i minimi di $f, u_1, \ldots R$:

$$M^{(f)}, \leq M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots + M^{(R)}$$
$$m^{(f)} \geq m^{(1)} + m^{(2)} + \ldots + m^{(R)}.$$

donde sottraendo si ha

$$D_r^{(f)} \leq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots + D_r^{(R)}.$$

Se ora per qualunque $x$ è in valore assoluto

$$R_n(x) < \sigma$$

è evidente che l'oscillazione di $R$ non può superare la quantità $2\sigma$, e quindi

$$D_r^{(f)} \leq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots + 2\sigma$$
$$\Sigma\, \delta_r D_r^{(f)} \leq \Sigma\, \delta_r D_r^{(1)} + \Sigma\, \delta_r D_r^{(2)} + \ldots + 2\sigma\, \Sigma\, \delta_r.$$

e osservando che $\Sigma\, \delta_r = b - a$ cioè è eguale a tutto l'intervallo d'integrazione, che tutte le sommatorie del secondo membro convergono a zero perchè abbiamo supposto che i termini $u_1(x)$, $u_2(x)$ . . . sono funzioni integrabili, e che $\sigma$ può rendersi piccolo a piacere, si ricava che anche il sommatorio del primo membro può rendersi piccolo per quanto si vuole, e quindi che *la funzione* f *è integrabile.*

È facile ora dimostrare infine che il suo integrale è la somma degli integrali dei singoli termini.

Ed infatti formiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \\ + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

dove nel secondo membro possiamo, appunto come abbiam fatto, distribuire il segno d'integrale a ciascun termine perchè il secondo membro è la somma di un numero *finito* di termini.

Se noi dimostriamo che

$$\int_a^b R_n(x)\,dx$$

col crescere del numero $n$ può rendersi minore di qualunque quantità assegnabile, cioè tende a zero, allora è chiaro che la serie degli integrali

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \int_a^b u_h(x)\,dx$$

è una serie convergente e il suo valore è proprio il valore dell'integrale di $f(x)$.

Ora se $R_n(x)$ può rendersi minore di $\sigma$ per qualunque $x$ compresa nell'intervallo d'integrazione, è chiaro che quell'integrale

$$\int_a^b R_n(x)\,dx$$

è in valore assoluto minore di

$$\int_a^b \sigma\,dx = (b-a)\,\sigma$$

cioè è minore di una quantità che può impicciolirsi per quanto si vuole. Resta con ciò dimostrato il nostro assunto.

Applicando il teorema ora dimostrato ad *una serie di potenze*, che, come si sa, (v. vol. I, Cap. I, § 7) quando è convergente in un certo campo *compresi gli estremi*, è anche sempre certamente *convergente in ugual grado* nel medesimo campo *ma esclusi gli estremi*, otteniamo il teorema:

*Una serie di potenze della variabile* x, *è una funzione integrabile, e il suo integrale si calcola facendo la somma degli integrali dei singoli termini.*

Facciamo ora vedere come i teoremi dimostrati possono utilizzarsi per lo sviluppo in serie di alcune funzioni.

Si voglia p. es., sviluppare in serie la funzione *arc sen* x.

Noi cominciamo coll'osservare che tale funzione può esprimersi mediante un integrale definito.

Perchè sappiamo che la derivata di arc *sen* $x$ è

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

e quindi, per le cose note sugli integrali, possiamo scrivere

$$\text{arc}\, sen\, x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

supposto che la funzione sia definita in modo che per $x = o$, sia zero.

Ora per lo sviluppo binomiale (v. vol. I, Cap. III, § 3) si ha (se $x^2 < 1$):

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots;$$

essendo questa una serie di potenze, possiamo allora effettuare l'integrazione per serie. È evidente che l'integrale di ogni termine è un integrale del tipo (a meno di fattori costanti)

$$\int_0^x x^{2n}\, dx$$

e quindi eguale a

$$\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

perchè infatti la derivata di questa espressione è proprio $x^{2n}$ (v. Cap. I, § 3).

Onde la serie degli integrali è

$$\text{arc}\, sen\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Si può osservare che questa serie è convergente anche per $x^2 = 1$, sebbene allora la serie binomiale da cui si è partiti non è più convergente. La funzione sotto il segno integrale diventa allora infinita di ordine $\frac{1}{2}$, ma l'integrale resta finito $\left(\text{il suo valore è } \frac{\pi}{2}\right)$.

Un bell'esempio di integrazione per serie è quello dato da

$$\int \log(1 - 2\rho\cos x + \rho^2)\, d x$$

Essendo molto complicata la funzione sotto il segno integrale, non riuscirebbe facile eseguire qui direttamente l'integrazione; invece si può far vedere che se si sviluppa in serie la funzione, si può poi fare l'integrazione per serie, e quindi ottenere il valore dell'integrale, sebbene sotto forma di serie.

Un esempio di una serie che *non essendo convergente in ugual grado, non può dar luogo all'integrazione per serie*, è dato da Darboux, ed è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\, x\, e^{-nx^2} - (n+1)\, x\, e^{-(n+1)x^2}\right]$$

il cui valore è semplicemente

$$x\, e^{-x^2}$$

Non entriamo ora nei dettagli di questa discussione che del resto sarebbe facile.

# CAPITOLO III.

## CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI.

§ 1. **Integrali indefiniti fondamentali.** — Nei due capitoli precedenti abbiamo considerato le proprietà generali che derivano dalla definizione di integrale; passiamo ora alla parte pratica del calcolo integrale, cioè passiamo a rispondere a questa domanda:

*Data una funzione come se ne può calcolare l'integrale indefinito?*

Nel calcolo differenziale il problema della derivazione si può risolvere in modo completo, supposto che nella data funzione entrino solo gli ordinarii simboli di operazioni analitiche; ma non è più lo stesso nel calcolo integrale; infatti qui, almenochè non si tratti di tipi elementari di funzioni, noi non possiamo stabilire delle proprie regole d' integrazione, ma il successo dipende dall' adoperare un artifizio piuttosto che un altro, e non sempre si riesce a trovare l'artifizio che fa giungere alla meta; oltre di che, mentre colla derivazione dei tipi ordinarii di funzioni si ottengono sempre funzioni che non escono dall'orbita di quei tipi, non è più lo stesso per l'integrazione; perchè integrando gli ordinarii tipi di funzioni si ottengono alle volte funzioni che non sono più rappresentabili, come quelle da cui si è partiti, con un numero *finito* delle ordinarie operazioni analitiche fatte sulla variabile indipendente, intendendo per ordinarie operazioni analitiche tutte quelle che capitano nelle matematiche elementari, cioè le sei operazioni fondamentali dell'algebra, e poi l'operazione logaritmica ed esponenziale, le operazioni trigonometriche e le inverse di queste.

Per convincersi che coll'integrazione si possa giungere a delle funzioni nuove più complicate, facciamo la seguente considerazione.

Noi sappiamo che la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$, e quindi ne deduciamo che l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\log x$, essendo $\frac{1}{x}$ una funzione *continua* (v. Cap. I, § 3).

Ora immaginiamo per un momento che la funzione logaritmica non entri ancora nell'orbita delle funzioni che vogliamo considerare come ordinarie, e quindi non vi entri neanche la sua inversa, cioè la funzione esponenziale; è chiaro allora che col semplice processo d'integrazione della funzione razionale semplicissima $\frac{1}{x}$ si sarà già introdotta la funzione logaritmica.

Ponendo in una prima classe le funzioni razionali, in una seconda classe le funzioni irrazionali, e in una terza classe le funzioni trascendenti (trigonometriche e loro inverse, logaritmiche ed esponenziali), colla derivazione delle funzioni di una classe non si hanno mai funzioni di una classe superiore, ma si hanno funzioni o della stessa classe o di una classe inferiore, mentre coll'integrazione si *possono* avere funzioni di una classe superiore.

Nei paragrafi seguenti noi stabiliremo alcuni fondamentali artifizii di integrazione; ma intanto per ora dobbiamo stabilire le cosiddette *formole fondamentali di integrazione.*

Consideriamo tutte le funzioni che abbiamo sopra distinte in tre classi; esse sono tutte funzioni continue, e derivandole si ottengono ancora funzioni continue.

Ricordando ora che l'integrale indefinito di una funzione *continua* è una funzione la cui derivata è proprio la funzione data, noi possiamo stabilire alcune formole che saranno per noi le *formole fondamentali.*

Dalle undici relazioni:

1. $\frac{d}{dx}\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m$ (per $m$ qualunque ma diverso da $-1$)

2. $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$$5.\quad \frac{d}{d\,x}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$6.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$8.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11.\quad \frac{d}{d\,x}\operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1+x^2},$$

ricaviamo nove formole fondamentali:

$$1.\quad \int x^m\,d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

(per $m$ diverso da $-1$)

$$2.\quad \int \frac{1}{x}\,d\,x = \log x$$

$$3.\quad \int e^x\,d\,x = e^x$$

$$4.\quad \int \cos x\,d\,x = \operatorname{sen} x$$

$$5.\quad \int \operatorname{sen} x\,d\,x = -\cos x$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 x} \, d\,x \quad = \operatorname{tg} x$$

$$7. \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, d\,x \quad = - \operatorname{ctg} x$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \, d\,x = \operatorname{arc\,sen} x = - \operatorname{arc\,cos} x$$

$$9. \int \frac{1}{1 + x^2} \, d\,x \quad = \operatorname{arc\,tg} x = - \operatorname{arc\,ctg} x.$$

S'intende che ai secondi membri di queste nove formole si può aggiungere sempre una costante arbitraria, per la formazione completa dell' integrale indefinito.

Dato che sia ora da calcolare l'integrale di una funzione che non comparisce in questa tabella, bisognerà cercare con opportuni artifizii, di ridurre il calcolo a uno di questi già noti.

Di ciò saranno dati vari esempi nel paragrafo seguente.

§ 2. **Artifizii di integrazione. Integrazione per parti. Integrazione per serie.** — Si abbia da calcolare

$$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen} x}$$

che non è uno dei nove tipi stabiliti nel paragrafo precedente.

Si ha

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Ora una funzione la cui derivata rispetto ad $x$ è quella contenuta in quest'ultima espressione, è proprio

$$\log \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

dunque possiamo conchiudere

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \text{Costante}.$$

Un metodo che si può adoperare frequentemente per la ricerca degli integrali definiti è quello così detto *di sostituzione*, e che consiste nel trasformare la variabile indipendente in un'altra (v. Cap. I, § 6) in modo che la nuova funzione da integrare sia più semplice per l'integrazione che quella data.

Naturalmente non possono stabilirsi regole per riconoscere quale sia la sostituzione da farsi, e il succcsso dipenderà sempre dalla maggiore o minor pratica che si ha in calcoli di tal genere.

Lo scopo della sostituzione sarà sempre di giungere ad un tipo di funzione il cui integrale sia già anteriormente noto, anche che qualche volta la nuova funzione sia di una specie più elevata che quella da cui si è partiti; che cioè p. es., la nuova sia una funzione trascendente, mentre che la data sia algebrica.

Così p. es., l'integrale

$$\int \frac{d\,x}{1-x^2}$$

colla sostituzione

$$x = \cos y$$

si trasforma in (v. Cap. I, § 6)

$$-\int \frac{d\,y}{\operatorname{sen} y}$$

che per le considerazioni fatte sopra è eguale a

$$-\log \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \text{Cost.}$$

onde l'integrale dato è

$$-\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos x + \text{cost.}$$

Questo risultato può semplificarsi giovandosi delle formole di trigonometria.

Infatti si ha:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} y}{\cos \frac{1}{2} y} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} y \cos \frac{1}{2} y}{2 \cos^2 \frac{1}{2} y}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y}{1 + \cos y}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x};$$

onde infine il nostro integrale è eguale a

$$\log \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} + \text{cost.}$$

Si abbia da calcolare

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$$

che non è compreso nella tabella fondamentale.

Poniamo identicamente

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = (a x + b)^2 + c$$

dove $a$, $b$, $c$ sono tre costanti da determinare.

Sviluppando il quadrato e eguagliando i coefficienti delle potenze di $x$ si ha

$$\begin{aligned} \alpha &= a^2 \\ \beta &= a b \\ \gamma &= b^2 + c \end{aligned}$$

donde

$$a = \sqrt{\alpha}$$

$$b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$$

$$c = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

e quindi l'integrale dato resta intanto trasformato in

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2+c}.$$

Facciamo ora la sostituzione

$$ax+b=y$$

donde

$$dx=\frac{dy}{a}$$

e quell'integrale diventa

$$\frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2+c}$$

il quale colla nuova sostituzione (se $c$ è positivo)

$$y=\sqrt{c}\,z$$
$$dy=\sqrt{c}\,dz$$

diventa

$$\frac{1}{a\sqrt{c}}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

e, se $c$ è quantità negativa, facendo invece la sostituzione

$$y=\sqrt{-c}\,z$$
$$dy=\sqrt{-c}\,dz$$

si ha

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

Nel primo caso l'integrale cui ci siamo ridotti è di un tipo compreso nella tabella fondamentale e nell'altro caso è del tipo di un integrale che abbiamo già sopra calcolato.

Si ha quindi per risultato, nel primo caso

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a x + b}{\sqrt{c}}$$

e nel secondo caso

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{2} =$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc\,cos} \frac{a x + b}{2\sqrt{-c}}.$$

Potremmo continuare a dare esempii di integrazioni fatte col metodo delle sostituzioni, ma ci bastino per ora questi dati.

Passiamo invece ad esporre i principi di un altro metodo che può rendere moltissimi servizii nella pratica, intendiamo parlare del *metodo di integrazione per parti.*

Siano $u(x)$, $v(x)$ due funzioni derivabili; per le regole di derivazione del prodotto si ha

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$$

donde

$$u(x)\frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] - v(x)\frac{d}{dx}u(x).$$

Facendo le integrazioni dei singoli termini e tenendo presente che l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa, si ha la formola fondamentale

$$\int u(x)\frac{d\,v(x)}{d\,x}\,d\,x = u(x)\,v(x) - \int v(x)\frac{d\,u(x)}{d\,x}\,d\,x.$$

Fermiamoci un momento su questa formola per intendere in che modo essa può essere utile al nostro scopo.

Si abbia da calcolare l'integrale di una funzione continua $f(x)$. Noi potremo sempre immaginare questa $f(x)$ scissa nel prodotto di due fattori, di cui uno lo chiamiamo $u(x)$ e l'altro lo chiamiamo $\frac{d\,v(x)}{d\,x}$, cioè il secondo lo poniamo eguale alla derivata di una ignota funzione di $x$ che chiamiamo $v(x)$.

Ciò fatto, noi possiamo con quella formola, ridurre il calcolo dell'integrale dato, al calcolo di un altro integrale in generale assolutamente diverso dal primo, e che *potrà* essere più semplice, o già noto.

Noi possiamo fare in infiniti modi la decomposizione di cui si è parlato; ma naturalmente fra tutti questi infiniti modi noi sceglieremo quello (se esiste o se lo possiamo trovare) che soddisfa contemporaneamente a queste due condizioni:

1.° Che si possa conoscere immediatamente la funzione $v(x)$;

2.° Che la funzione

$$v(x)\frac{d\,u(x)}{d\,x}$$

sia più facile da integrare che la funzione data.

Anche qui tutto dipende dall'acume personale e dalla perizia che si è acquistata in siffatta specie di calcolo.

Alcuni esempi rischiareranno meglio la cosa.

Si abbia da integrare

$$\int \log x \, d\, x.$$

Consideriamo la funzione $\log x$ come il prodotto di

$$\log x \, . \, 1$$

e il primo fattore lo chiamiamo $u\,(x)$, mentre il secondo lo chiamiamo $\frac{d\, v\,(x)}{d\, x}$.

Dalla relazione

$$\frac{d\, v}{d\, x} = 1$$

si ha subito

$$v = x;$$

e da

$$u = log x$$

si ha

$$\frac{d\, u}{d\, x} = \frac{1}{x}.$$

Applicando la formola dell'integrazione per parti si ha dunque

$$\int \log x \, d\, x = x \log x - \int d\, x$$
$$= x \; log \; x - x + cost.$$



e così resta calcolato l'integrale dato, Alcune volte non si riesce a compire l'integrazione applicando una sola volta il metodo sviluppato, ma applicandolo più volte di seguito.

Diamo un esempio di questo caso.

Si abbia

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x.$$

Scindendo la funzione sotto il segno nei due fattori

$$x^2 = u$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{d\, v}{d\, x}$$

donde

$$\frac{d\, u}{d\, x} = 2\, x$$

$$v = -\cos x$$

si ha

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x = -\, x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, d\, x$$

Ora l'integrale del secondo membro neanche si conosce, ma evidentemente esso è più semplice di quello dato perchè l'esponente di $x$ è restato diminuito di un' unità.

Applicando di nuovo l'integrazione per parti si riuscirà al risultato finale.

Infatti si ha colla solita formola

$$\int x \cos x \, d\, x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, d\, x$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x$$

onde infine

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x = - x^2 \cos x + 2\, x \operatorname{sen}\, x +$$
$$+ 2 \cos x + \text{cost.}$$

Nei paragrafi seguenti noi ci proporremo il problema dell'integrazione di alcuni tipi speciali di funzioni, e per alcuni tipi anche abbastanza generali potremo dare le formole generali di risoluzione.

Ma quando la funzione data non è riducibile a nessuno dei tipi che si sanno integrare, quando cioè sono riusciti vani tutti i tentativi e gli artifizii adoperati, allora non resta altro espediente che ricorrere all'*integrazione per serie* la cui teoria noi la abbiamo sviluppata nel § 4 del Cap. II; si cercherà cioè allora di sviluppare la funzione in una serie che sia integrabile termine a termine. e si otterrà così il risultato espresso sotto forma di serie.

A questo proposito sviluppiamo il seguente esempio. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (k^2 < 1).$$

Esso si suol chiamare *integrale ellittico*, e nelle matematiche superiori si studiano estesamente questi integrali che danno luogo a delle funzioni più elevate che le ordinarie funzioni trascendenti, mediante le quali essi quindi non possono esprimersi.

È naturale quindi che se li vogliamo esprimere mediante le ordinarie funzioni, qualunque tentativo ed artifizio, deve riuscire vano, e non si potrà che applicare l'integrazione per serie.

Per non ridurre molto complicato quest'esempio, noi ci limiteremo a calcolare non l'integrale indefinito, ma il definito fra *o* e $\frac{\pi}{2}$.

La funzione sotto il segno sviluppata in serie dà

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \\ + \frac{1.3}{2.4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \ldots$$

Questa serie è *convergente in ugual grado*, perchè ponendo per sen $\varphi$ il suo massimo valore che è *1*, la serie dei massimi

$$1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4 + \ldots$$

è una serie convergente per $k^2 < 1$, e quindi per un principio noto (v. Calcolo differenziale, Cap. I, § 7) la serie in esame è convergente in ugual grado.

Può quindi farsi l'integrazione termine a termine e si ha

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \\ + \frac{1.3}{2.4} k^4 \int \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \ldots$$

Per giungere al risultato finale dovremmo quindi conoscere un integrale della forma

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi.$$

Un tale integrale lo possiamo calcolare col metodo d'integrazione per parti.

Si ha

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = -\operatorname{sen}^{2n-1} \varphi \cos \varphi + \\ + (2n-1) \int \operatorname{sen}^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

e ponendo

$$\cos^2 \varphi = 1 - \operatorname{sen}^2 \varphi$$

e raccogliendo poi i termini simili, si ha infine la formola

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = -\frac{\operatorname{sen}^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{2n} + \\ + \frac{2n-1}{2n} \int \operatorname{sen}^{2n-2} \varphi \, d\varphi.$$

Con questa formola l'integrale corrispondente all'esponente $2n$, si fa dipendere da quello corrispondente all'esponente $2n-2$; applicando quindi ripetute volte questa formola, sino a che ci riduciamo all'esponente zero, possiamo ottenere il valore finale del primo membro.

Il calcolo si semplifica, se come abbiamo detto, vogliamo limitarci al calcolo dell'integrale definito fra $0$ e $\frac{\pi}{2}$. Allora l'ultima formola diventa semplicemente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2} \varphi \, d\varphi,$$

e quindi applicando questa formola $n$ volte di seguito si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

il qual valore sostituito nella serie dà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

§ 3. **Integrazione delle funzioni razionali.** — I metodi indicati nei capitoli precedenti servono a trasformare un integrale dato in un altro il cui calcolo sia in molti casi più facile.

Ora supporremo che la funzione da integrarsi sia di una specie particolare e propriamente sia una *funzione razionale.* Allora possiamo effettivamente indicare un metodo generale col quale calcolare l'integrale in ogni caso. S'intende però che la soluzione supporrà sempre in generale quella di un altro problema di una natura meno elevata, come p. es., la risoluzione di un'equazione algebrica, risoluzione che praticamente potrebbe essere difficile e anche inattuabile; il che però non toglie che dal punto di vista teorico il problema dell'integrazione resti considerato come risoluto.

Supponiamo dunque una funzione razionale qualunque che sarà il quoziente di due funzioni intere $\frac{F(x)}{f(x)}$, che possiamo sempre immaginare prime fra loro.

Dividiamo il numeratore pel denominatore (supposto che il grado di $F$ sia maggiore di quello di $f$) e ci riduciamo ad una parte intera più una parte frazionaria in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

In quanto alla parte intera, la sua integrazione si riduce ad integrare termini del tipo

$$a\,x^n$$

dove $a$ è una costante; tali integrali si calcolano colle regole note.

La questione si riduce dunque ad integrare una funzione dal tipo:

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

dove $F, f$ sono prime fra loro, e $F$ è di grado minore di $f$.

Siano $a_1\, a_2 \ldots a_r$ le radici di $f$ che supporremo per ora tutte reali e sieno rispettivamente $n_1\, n_2 \ldots n_r$ i loro gradi di molteplicità. Allora si ha dall'algebra (come faremo vedere alla fine di questo paragrafo) che la frazione $\frac{F(x)}{f(x)}$ può scomporsi nella somma di tante altre frazioni nel seguente modo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{b_1^{(n_1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{b_1^{(n_1-1)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{b_1'}{x-a_1} + \\ + \frac{b_2^{(n_2)}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{b_2^{(n_2-1)}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{b_2'}{x-a_2} + \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + \frac{b_p^{(n_p)}}{(x-a_p)^{n_p}} + \frac{b_p^{(n_p-1)}}{(x-a_p)^{n_p-1}} + \dots + \frac{b_p}{x-a_p} .\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove le $b$ sono costanti di cui alcune possono essere zero, ma certamente però sono diverse da zero le:

$$b_1^{(n_1)} \quad , \quad b_2^{(n_2)} \quad , \ \dots \ b_p^{(n_p)}.$$

Applicando allora l'integrazione al secondo membro, si vede che ci riduciamo sempre ad integrare termini del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} .$$

Ora per $n = 1$ tale integrale è

$$\log (x - a)$$

e per $n$ diverso da $1$, esso è invece

$$-\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} .$$

Si vede quindi che in questa maniera resta completamente risoluta la data integrazione e si vede inoltre che ***il risultato non è che un assieme di funzioni razionali e funzioni logaritmiche.***

Facciamo un'applicazione di questo metodo.

Si voglia calcolare:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)}\,.$$

Le radici del denominatore sono tutte reali e sono

$$x=0,\ x=1,\ x=-1$$

e sono tutte di molteplicità *1*. Allora poniamo

$$\frac{1}{x(1-x^2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}\,.$$

Per calcolare $a$, $b$, $c$, moltiplichiamo consecutivamente per $x, x-1, x+1$, e poi poniamo rispettivamente $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

Si ha così:

$$a=1\quad,\quad b=-\frac{1}{2}\quad,\quad c=-\frac{1}{2}$$

onde infine

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)}=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\log x-\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+1)+C$$

$$=\log\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}+C.$$

Questo metodo si può utilmente adoperare nel caso che tutte le radici $a$ di $f$ sieno ***reali***. Se alcune delle $a$ sono immaginarie allora noi non possiamo procedere nel calcolo, perchè tutte le considerazioni fatte fin qui sul calcolo differenziale ed integrale si riferiscono essenzialmente a funzioni non complicate con immaginari.

Bisognerebbe prima di tutto cominciare ad estendere tutte le considerazioni fatte fin qui al caso delle funzioni immaginarie, e si potrebbe effettivamente dimostrare che operando sulle quantità immaginarie come se fossero quantità reali, si giungerebbe a risultati finali dai quali l'immaginario deve sparire, ed i risultati che così si verrebbero ad ottenere sotto forma reale sarebbero esattamente i richiesti.

Però è utile mostrare come anche nel caso che alcune radici di $f$ sono immaginarie si può condurre avanti il calcolo dell'integrale senza introdurre alcuna quantità immaginaria.

Supponiamo perciò che $f$ abbia la radice *immaginaria* $(\alpha + i\,\beta)$ il cui grado di molteplicità sia $n$. Avrà allora anche la radice coniugata $(\alpha - i\,\beta)$ collo stesso grado di molteplicità. Quindi avrà per fattore

$$[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n = (x^2 + a\,x + b)^n\,.$$

Allora si sa dall'algebra (e noi lo faremo vedere alla fine di questo paragrafo) che la frazione $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ si può scomporre anche in un'altra maniera diversa da quella rappresentata dalla formola (*1*), cioè si può scomporre in una serie di termini di cui alcuni sono come in (*1*), e sono quelli corrispondenti alle radici reali di $f$, e altri sono del tipo

$$\frac{c\,x+d}{(x^2+a\,x+b)^n}$$

dove le radici di

$$x^2+a\,x+b=0$$

sono immaginarie

Tutta la questione si riduce dunque a calcolare

$$\int \frac{c\,x+d}{(x^2+a\,x+b)^n}\,d\,x.$$

Se, come avanti, sono $(\alpha+i\,\beta)$, $(\alpha-i\,\beta)$ le radici del denominatore, si ha:

$$x^2+a\,x+b=(x-\alpha)^2+\beta^2$$

e l'integrale diventa

$$\int \frac{c\,x+d}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,d\,x \qquad (n>0).$$

Questo integrale può scriversi identicamente

$$\int \frac{c\,(x-\alpha)+(c\,\alpha+d)}{[x-\alpha^2)+\beta^2]^n}\,d\,x=$$

$$=c\int \frac{(x-\alpha)}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^n}\,d\,x+(c\,\alpha+d)\int \frac{d\,x}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^n}$$

Il primo di questi integrali colla sostituzione

$$x-\alpha=y.$$

diventa

$$c\int\frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}$$

che è eguale a

$$-\frac{c}{2n-2}\,\frac{1}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}\qquad(\text{se}\ \ n>1)$$

oppure a

$$\frac{c}{2}\log(y^2+\beta^2)\qquad(\text{se}\ \ n=1).$$

Resta quindi a considerare solo l'altro integrale, il quale colla medesima trasformazione in $y$ diventa intanto

$$\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}\ .$$

Se $n=1$, allora questo integrale è eguale a

$$\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\beta}\ .$$

Se $n>1$ facciamo le seguenti altre trasformazioni.

Osserviamo che

$$\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}=\int\frac{(y^2+\beta^2)^n}{(y^2+\beta^2)^n}\,dy=$$

$$=\int\frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^n}+\beta^2\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}$$

e facendo l'integrazione per parti si ha inoltre:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = -\frac{y}{(2n-2)(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \\ + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}$$

la quale formola combinata colla precedente dà

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \\ + \frac{y}{(2n-2)\beta^2(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)\beta^2}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}\,.$$

Si vede che colla successiva applicazione di questa formola di riduzione, dobbiamo giungere (poichè $n$ è un numero intero positivo) al calcolo di un integrale della stessa specie, ma dove l'esponente di $(y^2+\beta^2)$ è l'unità; un tale integrale si esprimerà allora mediante la funzione *arco tangente*, come abbiamo visto sopra.

Resta così risoluta completamente l'integrazione della funzione razionale data, supposte naturalmente note le radici dell'equazione $f(x)=o$, e si è visto anche che può condursi il calcolo in ogni caso, sempre colla introduzione di sole quantità *reali*, anche se le radici dell'equazione $f(x)=o$ sieno *immaginarie*.

Come risultato di tutta questa ricerca possiamo dire: *che l'integrale di una funzione razionale si esprime sempre mediante i soli tre tipi di funzioni, 1.° funzioni razionali, 2.° funzioni logaritmiche, 3.° funzione arcotangente. Se nel calcolo non si* *vogliono introdurre le quantità complesse occorrono anche le funzioni della terza specie; si può invece limitarsi solo alle due prime specie volendo introdurre gli immaginarii.*

Prima di terminare questo paragrafo, ci occorre ora, per rendere più completa la nostra trattazione, riassumere i teoremi generali dell'algebra relativi alla decomposizione delle funzioni fratte razionali in frazioni elementari, teoremi che sono il fondamento di tutti gli sviluppi fatti in questo paragrafo.

Divideremo questa trattazione, che del resto è una parte puramente algebrica, in vari sottoparagrafi.

*a) Teoremi generali sulla decomposizione delle funzioni razionali fratte.* Immaginiamo una funzione di cui il numeratore e il denominatore sieno due polinomi in $x$

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

dei gradi $m$, $n$ rispettivamente.

Se il grado di $F$ è maggiore o eguale di quello di $f$, si esegua la divisione dei due polinomi, e si ha una parte intera $Q(x)$ di grado $m-n$, e un resto $R(x)$ di grado minore di $n$; allora può scriversi:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{f(x)}.$$

Prima di tutto dimostriamo che questa scomposizione in una parte intera e in una frazionaria non può farsi che in un sol modo. Sia:

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$
$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n;$$

dico che *in un sol modo* si possono *sempre* trovare altri due polinomi $Q(x)$ di grado $m-n$, e $R(x)$ di grado minore di $n$, tali che si abbia *identicamente, cioè per qualunque valore di* x:

$$F(x) = Q(x) f(x) + R(x).$$

Poniamo:

$$Q(x) = q_0 x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}$$
$$R(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1}.$$

Allora si deve avere:

$$a_0 x_m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m =$$
$$= (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n)(q_0 x^{m-n} q_1 x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}) +$$
$$+ r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1}.$$

E poichè questa eguaglianza deve sussistere qualunque sia il valore di $x$, si ha che i coefficienti delle diverse potenze di $x$ nel primo e nel secondo membro debbono essere uguali e quindi si hanno le relazioni:

$$\left\{\begin{array}{ll}
a_0 & = b_0 q_0 \\
a_1 & = b_0 q_1 + b_1 q_0 \\
a_2 & = b_0 q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_0 \\
a_3 & = b_0 q_3 + b_1 q_2 + b_2 q_1 + b_3 q_0 \\
\dots & \dots \\
a_{m-n} & = b_0 q_{m-n} + b_1 q_{m-n-1} + \dots + b_{m-n} q_0
\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a_{m-n+1} = b_1 q_{m-n} + b_2 q_{m-n-1} + \dots + b_{m-n+1} q_0 + r_0 \\ a_{m-n+2} = b_2 q_{m-n} + b_3 q_{m-n-1} + \dots + b_{m-n+2} q_0 + r_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m \qquad = b_n q_{m-n} + r_{n-1}. \end{cases}$$

Da questo quadro risulta che la prima categoria di formole non contiene i coefficienti $r$, e contiene invece *tutti* i coefficienti $q$. La seconda categoria contiene i coefficienti $r$ ed i coefficienti $q$.

Inoltre dalla prima categoria di formole i coefficienti $q$ si determinano in una sola maniera, perchè la prima di esse contiene solo il coefficiente $q_0$, e quindi lo determina in un modo unico; la seconda determinerà poi in un modo unico il valore del coefficiente $q_1$, determinato che sia $q_0$; e così di seguito l'ultima di quelle equazioni determinerà il valore di $q_{m-n}$.

Determinate così tutte le $q$, le equazioni della seconda categoria determineranno in un modo unico le $r$.

Resta così dimostrato che esistono *sempre* i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ colle proprietà indicate e non si possono determinare che *in una sola maniera*.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

*Sia* $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^\alpha$ *un fattore della funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *cioè sia* a *una radice di* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *multipla di grado* $\alpha$. *Allora la funzione irreducibile* $\frac{\mathrm{F}(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$ *si può sempre scomporre in*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

*essendo* A *una costante*, $F_1(x)$ *un polimonio intero e* $f_1(x)$ *il quoziente di* $f(x)$ *per* $(x-a)^\alpha$.

Infatti essendo

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

si ha identicamente

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Ora possiamo sempre scegliere la costante $A$ in modo che

$$F(a) - A f_1(a) = 0$$

cioè possiamo porre $A$ uguale a

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)},$$

e allora la funzione

$$F(x) - A f_1(x)$$

avrà per fattore $x-a$, e quindi nel secondo termine della formola superiore possiamo sopprimere un fattore $x-a$ e resta una funzione $F_1(x)$ di grado $m-1$, mentre al denominatore resta:

$$(x-a)^{\alpha-1} f_1(x);$$

si è operato così la richiesta scomposizione.

Da questo teorema possiamo dedurne un altro:

*Immaginiamo che tutte le radici di* $f(x)$ *reali o immaginarie sieno:*

$$a, b, \ldots l$$

*colla molteplicità:*

$$\alpha, \beta, \ldots \lambda,$$

*allora la frazione* $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ *può decomporsi in*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*dove le* A, B, ... $A_1$ $B_1$ ... *sono delle costanti.*

Infatti, tenendo presente la scomposizione dimostrata sopra, e riapplicandola alla frazione

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

si ha

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}$$

e al secondo termine applicando daccapo la formola di scomposizione, e sostituendo, e poi così proseguendo si ha infine la dimostrazione del nostro assunto.

Possiamo osservare che i primi coefficienti $A$, $B$, ... non possono essere mai zero, perchè sappiamo che essi sono dati da

$$A = \frac{F(a)}{f(a)} \quad , \quad B = \frac{F(b)}{f(b)} \ldots$$

e dovrebbe essere $F(a)=0$, cioè $a$ essere una radice di $F(x)=0$ contro l'ipotesi che $\frac{F(x)}{f(x)}$ sia una frazione *irriducibile.*

*b) Metodi per effettuare la decomposizione nel caso delle radici reali.* — Distinguiamo ora due casi fondamentali, cioè il caso in cui le radici di $f(x)$ sieno tutte reali e il caso in cui ve ne sia qualcuna immaginaria.

Nel caso in cui tutte le radici sono reali distinguiamo quello in cui sono tutte semplici e quello in cui ve n'è qualcuna multipla.

Sia dunque in primo luogo:

$$f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-l).$$

Allora il teorema precedente ci dice che può porsi

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\dots+\frac{L}{x-l};$$

ora vogliamo dare un metodo per trovare i valori dei coefficienti $A, B, C\dots$

Sappiamo già che posto

$$f(x)=(x-a)f_1(x)$$

cioè

$$f_1(x)=(x-b)(x-c)\dots(x-l)$$

sarà:

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Ora facciamo la prima derivata di $f$, e si ha:

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) +$$
$$+ (x-a)(x-c)\dots(x-l) + (x-a)(x-b)\dots(x-l) + \dots$$

donde:

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\dots(a-l) = f_1(a).$$

Ne deduciamo dunque senz'altro in questo caso

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)} \quad , \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \dots$$

Possiamo applicare questi risultati per dimostrare una formola che può essere utile in diversi casi.

Supponiamo che $F(x)$ sia di grado $n-2$ essendo $f(x)$ di grado $n$.

Allora nella formola di scomposizione, moltiplicando per

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$$

si ha

$$F(x) = A(x-b)(x-c)\dots +$$
$$+ B(x-a)(x-c)\dots +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e nel secondo membro il coefficiente di $x^{n-1}$ è

$$A + B + C + \dots$$

cioè

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \dots = \Sigma \frac{F(x)}{f'(x)}$$

intendendo che il segno $\Sigma$ si debba estendere a tutte le $n$ radici di $f(x) = 0$.

Intanto in $F(x)$ il coefficiente di $x^{n-1}$ è zero, onde possiamo scrivere:

$$\Sigma \frac{F(x)}{f'(x)} = 0.$$

Passiamo ora a vedere come si calcolano i coefficienti $A, A_1 A_2 \ldots B, B_1, B_2 \ldots$ del caso generale.

Naturalmente essi si potrebbero determinare col procedimento tenuto in $a$); ma questo metodo sarebbe lungo, e noi vogliamo trovare delle formole che ci possano dare i valori delle $A$ mediante le derivate di $f$ e $F$.

Partiamo dalle formole

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \quad , \quad A_1 = \frac{F_1(a)}{f_1(a)} \ldots$$

dove

$$F_1(x) = \frac{F(x) - A f_1(x)}{x - a}$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - A_1 f_1(a)}{x - a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Essendo

$$f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x)$$

si ha derivando colla formola di Leibnitz

$$f^\alpha(x) = \alpha! f_1(x) + \alpha \frac{\alpha!}{1}(x - a) f'_1(x) +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \frac{\alpha!}{1 . 2}(x - a)^2 f''_1(x) + \ldots$$

$$f^{\alpha+1}(x) = (\alpha+1)!\, f'_1(x) + \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{2}\,\frac{\alpha!}{1}(x-a)\, f''_1(x) +$$

$$+ \frac{(\alpha+1)\,\alpha\,(\alpha-1)}{2\,.\,3}\,\frac{\alpha!}{1\,.\,2}(x-a)^2 f'''_1(x) + \ldots$$

e per $x = a$ si ha

$$f^{\alpha}(a) = \alpha!\, f_1(a),$$

$$f^{\alpha+1}(a) = \frac{(\alpha+1)!}{1!} f'_1(a)\,,\; f^{\alpha+2}(a) = \frac{(\alpha+2)!}{2!} f''_1(a)\,, \ldots$$

Ora derivando successivamente le formole

$$(x-a)\, F_1(x) = F(x) - A\, f_1(x)$$
$$(x-a)\, F_2(x) = F_1(x) - A_1\, f'_1(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si ha

$$F_1(x) + (x-a)\, F'_1(x) = F'(x) - A\, f'_1(x)$$
$$F_2(x) + (x-a)\, F'_2(x) = F'_1(x) - A_1\, f'_1(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\, F'_1(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F''(x) - A\, f''_1(x)$$
$$2\, F'_2(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F''_1(x) - A_1\, f''_1(x)$$

e per $x = a$ si ha:

$$F_1(a) = F'(a) - A\, f'_1(a)$$
$$= F'(a) - \frac{A}{(a+1)!} f^{a+1}(a)$$

$$F_2(a) = F'_1(a) - A_1 f'_1(a)$$

$$= \frac{F''(a) - A f''_1(a)}{2} - A_1 f'_1(a)$$

$$= \frac{1}{2} F''(a) - \frac{A}{\alpha+2} f^{\alpha+2}(a) - \frac{A_1}{(\alpha+1)} f^{\alpha+1}(a)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Sostituendo nelle espressioni che danno i valori di $A, A_1, A_2 \ldots$ si hanno le richieste formole di ricorrenza:

$$F(a) - \frac{A}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

$$F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{\alpha+1}(a) - \frac{A_1}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

$$F''(a) - \frac{A}{(\alpha+2)!} f^{\alpha+2}(a) -$$

$$- \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{\alpha+1}(a) - \frac{A_2}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

la cui legge di formazione è evidente.

*c) Decomposizione delle funzioni fratte nel caso in cui il denominatore abbia radici immaginarie.* — Nel caso in cui fra le radici di $f(x)$ ve ne siano alcune immaginarie, allora si potrebbe anche effettuare la decomposizione operata nei paragrafi precedenti, ma allora le formole verrebbero complicate con immaginari, e si avrebbe una decomposizione immaginaria.

Però in questo caso si può fare un'altra decomposizione, che è quella che noi passeremo adesso ad esporre.

Tale decomposizione risulta dal seguente teorema:

Se $(x^2 + p\,x + q)$ *è un fattore del denominatore* f(x), *cioè si abbia*

$$f(x) = (x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)$$

*e si ha identicamente*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^{n-1} f_1(x)}$$

*essendo* P, Q *due costanti, e* $\mathrm{F}_1(x)$ *una nuova funzione intera.*

Infatti si ha:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)} =$$

$$= \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{F(x) - (P\,x + Q)\,f_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)}\,.$$

Ora possiamo determinare le due costanti $P$, $Q$ in modo che

$$F(x) - (P\,x + Q)\,f_1(x)$$

abbia per fattore $x^2 + p\,x + q$; giacchè sieno

$$\alpha + i\,\beta$$

$$\alpha - i\,\beta$$

le due radici di

$$x^2 + p\,x + q = 0;$$

allora deve essere

$$F(\alpha + i\,\beta) - [P(\alpha + i\,\beta) + Q]\,f_1\,(\alpha + i\,\beta) = 0$$
$$F(\alpha - i\,\beta) - [P(\alpha - i\,\beta) + Q]\,f_1\,(\alpha - i\,\beta) = 0$$

donde:

$$P(\alpha \pm i\,\beta) + Q = \frac{F(\alpha \pm i\,\beta)}{f(\alpha \pm i\,\beta)}$$

e calcolando il secondo membro che sarà in generale della forma:

$$M \pm i\,N.$$

si ha

$$P\alpha + Q = M$$
$$P\beta = N$$

donde:

$$P = \frac{N}{\beta}$$

$$Q = M - \frac{M\alpha}{\beta}.$$

Per i valori di $P$, $Q$ così determinati sarà

$$F(x) - (P\,x + Q)\,f_1\,(x) = (x^2 + p\,x + q)\,F_1\,(x)$$

e quindi resta dimostrato il nostro assunto.

Colla successiva applicazione di questo teorema si vede, analogamente come in *a)*, che si ha la decomposizione

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)} .$$

I coefficienti $P, Q, P_1, Q_1, \dots$ sono determinati dalle relazioni:

$$Pk + P = \frac{F(k)}{f_1(k)} \quad , \quad (Pk + Q) f_1(k) = F(k)$$

$$P_1 k + Q_1 = \frac{F_1(k)}{f_1(k)} \quad , \quad (P_1 k + Q_1) f_1(k) = F_1(k)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

dove $k$ è una delle due radici di

$$x^2 + px + q = 0$$

e $F_1(x), F_2(x), \dots$ sono definite dalle formole:

$$(x^2 + px + q) F_1(x) = F(x) - (Px + Q) f_1(x)$$

$$(x^2 + px + q) F_2(x) = F_1(x) - (P_1 x + Q_1) f_1(x)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Prima di abbandonare questo argomento è utile osservare che nel caso in cui le radici immaginarie di $f$ sono semplici e non multiple, allora questa decomposizione si può ricavare facilmente dalla prima decomposizione.

Infatti sieno $k, k'$ le due radici immaginarie coniugate di $x^2 + px + q$; allora facendo la decomposizione col primo metodo si hanno le due frazioni:

$$\frac{R}{x-k}+\frac{R}{x-k'}$$

dove

$$R=\frac{F(k)}{f_1(k)(k-k')} \qquad R'=\frac{F(k')}{f_1(k')(k'-k)};$$

riunendo in una le due frazioni si ha:

$$\frac{(R+R')x-(Rk'+R'k)}{(x-k)(x-\kappa')}=\frac{(R+R')x-(Rk'+R'k)}{x^2+px+q};$$

essendo $k$, $k'$ due numeri immaginarii coniugati, anche $R$,$R'$ saranno immaginarii coniugati, e quindi anche $Rk$, $R'k$, onde:

$$R+k'$$
$$R.k'+R'k$$

saranno certamente numeri reali, perchè somme di numeri immaginarii coniugati. Inoltre ponendo $\frac{F(k)}{f_1(k)}$ sotto la forma

$$M+Ni$$

e

$$k=a+i\beta \quad , \quad k'=a-i\beta,$$

si ha:

$$R=\frac{M+Ni}{2i\beta}$$

$$R'=\frac{M-Ni}{-2i\beta}$$

onde

$$R + R' = \frac{N}{\beta} = P$$

$$-(Rk' + R'k) = \frac{(M+Ni)(\alpha - i\beta) - (M-Ni)(\alpha + i\beta)}{-2i\beta} =$$

$$= M - N\frac{\alpha}{\beta} = Q.$$

§ 4. **Integrazione delle funzioni irrazionali. Integrali binomii. Integrali ellittici.** — Mentre nel caso delle funzioni *razionali* noi abbiamo potuto risolvere completamente il problema dell'integrazione, non possiamo più fare lo stesso nel caso delle funzioni *irrazionali.*

Per questo dobbiamo limitarci a considerare solo dei tipi speciali, e vedere se è possibile, e come, assegnare per tali tipi il metodo generale di risoluzione.

Uno dei tipi più facili di funzioni irrazionali è quello in cui compariscono varie potenze *frazionarie* della variabile $x$; quello cioè di una funzione

$$f(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma \ldots)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono dei numeri qualunque razionali frazionarii. La funzione $f$ è così effettivamente una funzione irrazionale di $x$; ma con una semplice trasformazione possiamo subito ridurci al caso delle funzioni razionali.

Sia in effetti $\mu$ il minimo comune multiplo di tutti i *denominatori* delle frazioni $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; allora i prodotti

$$\mu\alpha,\ \mu\beta,\ \mu\gamma,\ldots$$

saranno tutti numeri interi.

Poniamo

$$x = y^{\mu}$$

e quindi

$$x^{\alpha} = y^{\mu\alpha}, \quad x^{\beta} = y^{\mu\beta}, \ldots$$
$$dx = \mu y^{\mu-1} dy.$$

Con questa sostituzione si ottiene una funzione in $y$, ma in cui gli esponenti di $y$ sono tutti numeri interi; si ottiene cioè una funzione razionale in $y$; siamo così ricondotti al caso già considerato nel paragrafo precedente.

Consideriamo ora un integrale del tipo

$$\int f(x, \sqrt{R})\, dx$$

dove $R$ sia un polinomio di 2.° grado in $x$, cioè

$$R = a + 2bx + cx^2,$$

e $f$ rappresenti una combinazione *razionale* di $x$ e di $\sqrt{R}$. La $f$ è naturalmente una funzione *irrazionale* di $x$, e l'irrazionalità proviene dal radicale di 2.° grado $\sqrt{R}$.

Facciamo delle trasformazioni preliminari per mostrare come, a meno di trasformazioni algebriche, l'integrale dato può comporsi mediante alcuni di tipo determinato.

Considerando che la seconda potenza di $\sqrt{R}$ è già un' espressione razionale, ricaviamo che in $f$, il $\sqrt{R}$ non ci potrà comparire che solo *a primo grado*; la forma generale di $f$ è dunque

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}} .$$

Moltiplicando il numeratore e denominatore per

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{R(x)}$$

la $f(x)$ diventa

$$\frac{\varphi(x)(\varphi_1(x) - \psi(x)\psi_1(x)R(x) + \sqrt{R(x)}(\varphi_1(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi_1(x))}{\varphi_1^2(x) - \psi_1^2(x)R(x)}$$

cioè il denominatore diventa razionale. La $f$ può dunque sempre ridursi al tipo

$$G(x) + H(x)\sqrt{R}$$

dove $G$, $H$ sono due funzioni razionali di $x$.

Quindi dobbiamo occuparci solo di un integrale del tipo

$$\int H(x)\sqrt{R(x)}\,dx$$

o anche, moltiplicando e dividendo per $\sqrt{R}$,

$$\int \frac{H(x)R(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int \frac{K(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

dove $K(x)$ è una funzione razionale qualunque.

Se ora scomponiamo la funzione $K$ in una parte intera, e in frazioni elementari, giusta la teoria esposta nel paragrafo precedente, si vede che *volendo stare sempre nel campo delle quantità reali*, ci riduciamo a soli *tre* tipi di integrali, cioè

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

proveniente dalla parte *intera* contenuta in $K$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}}\, dx,$$

proveniente dalle radici *reali* del denominatore di $K$,

$$\int \frac{c\,x+d}{(x^2+p\,x+q)^n \sqrt{R(x)}}\, dx,$$

proveniente dalle radici *immaginarie* del denominatore di $K$. Si può far vedere che ciascuno di questi integrali può sempre ridursi ad integrale razionale.

Una tal dimostrazione la faremo per un integrale del tipo generale

$$\int f(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

e non per un integrale di uno dei tipi speciali soprasegnati; però praticamente le trasformazioni ora indicate potranno essere molto utili.

Distinguiamo i due casi di $c$ positivo e $c$ negativo.

Sia in primo luogo $c$ positivo. Allora poniamo

$$\sqrt{R} = y + \sqrt{c}\, x$$

donde

$$a + 2\,b\,x + c\,x^2 = y^2 + 2\sqrt{c}\,x\,y + c\,x^2$$

e quindi

$$x = \frac{y^2 - a}{2\,(b - \sqrt{c}\,y)}$$

$$\sqrt{R} = y + \frac{\sqrt{c}\,(y^2 - a)}{2\,(b - \sqrt{c}\,y)} = -\frac{\sqrt{c}\,y^2 - 2\,b\,y + a\sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c}\,y)}$$

$$d\,x = \frac{2\,y\,(2\,b - 2\sqrt{c}\,y) + 2\,(y^2 - a)\sqrt{c}}{4\,(b - \sqrt{c}\,y)^2}\,d\,y$$

$$= -\frac{\sqrt{c}\,y^2 - 2\,b\,y + a\sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c}\,y)^2}\,d\,y.$$

Con queste sostituzioni è evidente che la $f$ diventa una funzione *razionale* di $y$.

Applichiamo questa trasformazione all'integrale

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{R}}\,.$$

Esso diventa semplicemente

$$\int \frac{d\,y}{b - \sqrt{c}\,y}$$

che è eguale a

$$-\frac{1}{\sqrt{c}} \log\,(b - \sqrt{c}\,y) + \text{cost.}$$

onde infine il nostro integrale è

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(b-\sqrt{c}\sqrt{R}+c\,x\right)+\text{cost.}$$

Supponiamo ora $c<0$. Se la funzione da integrare è una funzione di $x$ *reale* per ogni $x$ *reale*, non potrà essere $\sqrt{R}$ una quantità immaginaria, cioè $R$ non potrà essere *negativo* per ogni valore di $x$; ora

$$R=c\left(x^2+\frac{2b}{c}x+\frac{a}{c}\right)$$
$$=c\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$$

se $\alpha, \beta$ sono le radici di $R=0$. Queste radici non potranno perciò essere immaginarie perchè se lo fossero, il prodotto

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)$$

per ogni $x$ *reale* sarebbe il prodotto di due quantità complesse coniugate e quindi sarebbe eguale alla somma di due quadrati di numeri reali, cioè una quantità essenzialmente positiva; per $c$ negativo la $R$ sarebbe perciò negativa per qualunque $x$ reale, e quindi $\sqrt{R}$ sarebbe immaginaria, e la funzione data contenente razionalmente l'espressione $\sqrt{R}$ sarebbe complessa, mentre che noi supponiamo che la funzione data sia sempre una funzione *reale.*

Se le radici $\alpha, \beta$ sono reali, possiamo noi allora fare la trasformazione

$$\sqrt{R}=y\,(x-\alpha)$$

la quale riuscirà una sostituzione *reale*. Di qui, quadrando si ha:

$$R = a + 2\,b\,x + c\,x^2 = y^2\,(x - \alpha)^2$$

cioè

$$c\,(x - \alpha)\,(x - \beta) = y^2\,(x - \alpha)^2$$
$$c\,(x - \beta) = y^2\,(x - \alpha)$$

donde

$$x = \frac{c\,\beta - \alpha\,y^2}{c - y^2}$$

$$d\,x = \frac{-\,2\,\alpha\,y\,(c - y^2) + 2\,(c\,\beta - \alpha\,y^2)\,y}{(c - y^2)^2}\,d\,y$$
$$= \frac{2\,c\,y\,(\beta - \alpha)}{c - y^2}\,d\,y$$
$$\sqrt{R} = y\left(\frac{c\,\beta - \alpha\,y^2}{c - y^2} - \alpha\right)$$
$$= \frac{c\,y\,(\beta - \alpha)}{c - y^2}$$

e, come si vede, anche con questa trasformazione ci riduciamo ad una funzione razionale di $y$. Questa trasformazione può naturalmente farsi anche nel caso in cui $c$ è positivo, purchè le radici di $R = 0$ sieno reali.

Applicando questa trasformazione all' integrale già considerato sopra, esso diventa

$$2\int\frac{d\,y}{c - y^2} = -\frac{2}{c}\int\frac{d\,y}{1 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{-c}}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{\sqrt{-c}} + \text{cost.}$$

Dopo avere studiati gli integrali di funzioni contenenti la radice quadrata di un polinomio di 2.° grado in $x$, viene spontanea l'idea di considerare gli integrali di funzioni contenenti la radice quadrata di un polimonio di 3.° o di 4.° o di grado superiore.

Senonchè mentre nel caso del polinomio di 2.° grado, si è visto che si può sempre effettuare la integrazione per mezzo delle funzioni ordinarie, non è più lo stesso per gli altri casi. Per questi casi occorre l'introduzione di funzioni trascendenti più elevate delle ordinarie. Tali integrali si chiamano *integrali ellittici* e furono studiati per la prima volta dal matematico italiano Fagnano (1682-1766; e da Eulero (1707-1783) e poi più diffusamente da Legendre (1752-1833).

La denominazione di *ellittici* viene a loro dal fatto che per mezzo di essi si risolve il cosiddetto *problema della rettificazione dell'ellisse.*

Noi non possiamo entrare in una trattazione degli integrali ellittici. Ci limiteremo solo a stabilire alcune nozioni fondamentali.

Con una trasformazione nei cui dettagli noi non vogliamo entrare, si giunge a far vedere che *supposto che nel calcolo si vogliano includere anche le quantità complesse ogni integrale della forma*

$$\int f(x, \sqrt{R})\, d\,x$$

*dove* R *è un polinomio di 4.° grado e* f *è il simbolo di una funzione razionale, si può sempre esprimere mediante una combinazione lineare di* *integrali dei soli tre tipi:*

$$1. \int \frac{dy}{\sqrt{R}}$$

$$2. \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{R}}$$

$$3. \int \frac{dy}{(y^2 - a)\sqrt{R}}$$

*dove* R *è il polinomio di 4.° grado sotto la forma:*

$$R = (1 - y^2)(1 - k\, y^2) \qquad (k^2 < 1).$$

Tali integrali si chiamano gli *integrali normali* rispettivamente di *1.ª*, *2.ª*, *3.ª specie di Legendre.*

Vogliamo ora mostrare come questi tre integrali si possono ridurre ad un' altra forma che viene molto spesso adoperata, e che noi abbiamo anche altra volta avuto occasione di studiare a proposito degli sviluppi in serie degli integrali (v. Cap. III, § 2).

Poniamo

$$y = \operatorname{sen} \varphi$$
$$dy = \cos \varphi \, d\varphi$$

e i tre integrali diventano

$$1. \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$2. \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$3. \int \frac{d\varphi}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$$

(a meno di un fattore costante)

ponendo poi anche $a = -\frac{1}{n}$.

Questi tre integrali sogliono indicarsi rispettivamente coi simboli

$$F(\varphi), \qquad Z(\varphi), \qquad \Pi(\varphi)$$

e il primo di essi è proprio quello da noi considerato nel luogo citato.

Essi potrebbero calcolarsi operando l'integrazione per serie.

Passiamo ora a considerare un altro tipo di integrali, assai meno complicati cioè i cosiddetti *integrali binomii*, considerati per la prima volta da Eulero.

Un tale integrale è della forma

$$\int x^m (a + b\,x^n)\,d\,x$$

dove $m, n, p$ sono dei numeri *razionali frazionarii positivi o negativi*. Se il numero $p$ fosse un numero intero positivo o negativo, allora si potrebbe sviluppare la potenza del binomio o al numeratore o al denominatore secondochè $p$ fosse positivo o negativo, e si avrebbe una funzione razionale di varie potenze frazionarie di $x$; un tal tipo di funzione lo abbiamo già considerato sul principio di questo paragrafo.

Supponiamo quindi che $p$ sia un numero frazionario.

I numeri $m, n$ possono sempre supporsi dei numeri qualunque, ma è facile vedere che, senza diminuire la generalità, essi possono sempre supporsi *interi*.

Perchè se non lo fossero, e sia $\mu$ il minimo comune moltiplo fra i loro denominatori, ponendo

$$x = y^{\mu}$$

l'integrale si trasforma in

$$\mu \int y^{(m+1)\mu-1} (a + b\, y^{n\mu})^p \, d\, y$$

che è anche un integrale binomio, ma dove però gli esponenti di $y$ dentro e fuori parentesi sono numeri interi.

Inoltre $n$ può sempre immaginarsi positivo, perchè altrimenti l'integrale dato può scriversi

$$\int x^{m+np} (a\, x^{-n} + b)^p \, d\, x$$

moltiplicando e dividendo il primitivo per $x^{np}$; se $n$ è negativo, $-n$ sarà positivo, e quindi l'integrale dato resta sempre ricondotto ad un altro in cui l'esponente di $x$ dentro parentesi è positivo.

Facciamo ora la seguente trasformazione; poniamo

$$a + b\, x^n = y$$

donde

$$x = \left(\frac{y - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy$$

e quindi l'integrale diventa

$$\frac{1}{nb}\int\left(\frac{y-a}{1}\right)^{\frac{m}{n}} y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{1}{nb}\int y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \qquad \text{(I)}$$

Se invece di prender le mosse dalla forma data dell' integrale binomio, prendiamo le mosse dall'altra forma equivalente

$$\int x^{m+np}(a\,x^{-n}+b)^p\,dx$$

ponendo $a\,x^{-n} + b = y$, abbiamo invece

$$-\frac{1}{na}\int y^p \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} \qquad \text{(II)}$$

Ora se $\frac{m+1}{n}$ è un numero intero, allora la I si può subito ridurre ad una funzione razionale ponendo $y = z^{\mu}$ dove $\mu$ sia il denominatore del numero $p$. E così analogamente se $\frac{m+1}{n}+p$ è un numero intero la II potrà colla medesima sostituzione ridursi ad una funzione razionale.

Abbiamo dunque: *esistono due casi in cui l'integrale binomio può immediatamente ridursi ad un integrale razionale, e questi due casi sono:*

*1.° Quando* $\frac{m+1}{n}$ *è un numero intero;*

*2.° Quando* $\frac{m+1}{n}+p$ *è un numero intero.*

Quando non sono verificati questi casi allora si possono adoperare delle formole di riduzione colle quali l'integrale binomio dato resta espresso mediante altri in cui gli esponenti $m, n, p$ sono diversi.

Tali formole di riduzione si ottengono applicando il metodo dell'integrazione per parti. Così ponendo

$$u=(a+b\,x^n)^p$$

$$\frac{d\,v}{d\,x}=x^m$$

donde

$$v=\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{d\,u}{d\,x}=b\,p\,n\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,x^{n-1}$$

si ha la formola

$$\int x^m\,(a+b\,x^n)^p\,d\,x=\frac{x^{m+1}(a+b\,x^n)^p}{m+1}-$$

$$-\frac{b\,p\,n}{m+1}\int x^{m+n}\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,d\,x \qquad (A)$$

colla quale l'integrale binomio corrispondente agli esponenti $m, n, p$, resta espresso mediante quello cogli esponenti $m+n, n, p-1$.

Se ora poniamo

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \int x^m (a+bx^n)(a+bx^n)^{p-1} dx$$

$$= a\int x^m (a+bx^n)^{p-1} dx + b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1} dx$$

e eliminiamo colla formola precedente quest'ultimo integrale otteniamo

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+pn} -$$

$$+ \frac{apn}{m+1+pn}\int x^m (a+bx^n)^{p-1} dx \qquad (B)$$

colla quale formola il solo esponente che resta cangiato, e propriamente resta diminuito di una unità, è l'esponente della parentesi.

Combinando così fra loro in vari modi questi artifizii potrebbero trovarsi quante formole di riduzione si voglia. È inutile del resto stabilirle qui, sia perchè non offrono nessuna difficoltà teorica, sia perchè è più conveniente adoperare quelli artifizii caso per caso, e, adattarli alla natura particolare dell'integrale che si sta considerando.

Molte volte è più conveniente applicare le formole di riduzione che si ottengono cogli artifizii indicati, anzichè servirsi, anche che si verifichi, del criterio dell' integrabilità di cui abbiamo parlato sopra.

Quando con nessuna formola di riduzione possiamo ridurci ad un integrale noto, allora non resterà che adoperare la integrazione per serie, sviluppando in serie la potenza p$^{ma}$ di $(a + b x^n)$.

Come esempio si potrebbe scegliere il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (m = \text{intero})$$

che può scriversi

$$\int x^m (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

e quindi è un integrale binomio, dove $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$.

È facile vedere che esso rientra nei casi elementari d'integrabilità.

Infatti se $m$ è pari allora

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

è un numero intero, e se invece $m$ è dispari allora

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m+2}{n}$$

è un numero intero.

§ 5. **Integrazione delle funzioni trascendenti.** — In questo paragrafo studieremo alcuni speciali tipi di funzioni trascendenti e faremo vedere come si possono integrare.

1.° Si abbia una funzione del tipo

$$f(e^x)$$

essendo $f$ il simbolo di una funzione razionale.

Ponendo

$$e^x = y$$
$$e^x\, d\,x = d\,y$$
$$dx = \frac{d\,y}{y}$$

l'integrale della funzione data si riduce a quello di una funzione razionale di $y$.

2.° Consideriamo ora gli integrali del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, d\,x$$

Ponendo

$$\operatorname{sen} x = t$$

si ha da integrare

$$\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\,t$$

e quindi ci riduciamo ad un integrale binomio.

Però possiamo procedere diversamente.

Operiamo il metodo d' integrazione per parti prendendo:

$$u = \cos^{n-1} x \qquad , \qquad \frac{d\,v}{dx} = \operatorname{sen}^m x \cos x$$

e si ha:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, d\,x = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$
$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\, d\,x$$

e facendo una trasformazione analoga a quella adoperata per gli integrali binomii, cioè ponendo

$$\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x \, d\, x =$$

$$= \int \operatorname{sen}^{m} x \, (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, d\, x$$

$$= \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n-2} x \, d\, x - \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d\, x$$

e sostituendo e risolvendo rispetto a:

$$\int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d\, x$$

si ha infine

$$\int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d\, x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n-2} x \, d\, x.$$

3.° Si abbia inoltre da calcolare

$$\int e^{ax} \cos b\, x \, d\, x \qquad , \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x \, d\, x.$$

Operando la integrazione per parti si ha:

$$\int e^{ax} \cos b\, x \, d\, x = \frac{e^{ax} \cos b\, x}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x \, d\, x$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x \, d\, x = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} b\, x}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos b\, x \, d\, x$$

donde

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,d\,x = \frac{a \cos b\,x + b \operatorname{sen} b\,x}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} b\,x\,d\,x = \frac{a \operatorname{sen} b\,x - b \cos b\,x}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C.$$

4.° Si abbia infine da calcolare l' integrale corrispondente ad una funzione del tipo

$$f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)$$

essendo $f$ il simbolo di una funzione razionale.

Ponendo

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t$$

si ha:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tang} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{2}{1 + t^2}.$$

Onde con questa sostituzione la funzione da integrarsi diventa una funzione razionale di $t$ e quindi si integra coi metodi noti.

Così p. es., determiniamo

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}.$$

Si ha, operando la trasformazione precedente:

$$2\int \frac{dt}{2at + b(1-t^2)} = 2b\int \frac{dt}{(a^2+b^2)-(bt-a)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}+(bt-a)} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}-(bt-a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+(bt-a)}{\sqrt{a^2+b^2}-(bt-a)} + C.$$

e sostituendo poi per $t$ il suo valore in $x$ si ha la formola finale.

§ 6. **Calcolo di integrali definiti. Integrali Euleriani.** — Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato vari speciali tipi di funzioni coll'intento di calcolarne gli integrali *indefiniti* corrispondenti.

Può però accadere alcune volte che pur non potendosi calcolare l'integrale indefinito, si possa invece calcolare l'integrale definito fra limiti assegnati, e che per l'uso che noi ne dobbiamo fare non ci occorra effettivamente altro che proprio l'integrale definito.

Perciò noi dedichiamo questo paragrafo all'esposizione di artifizi e di metodi per la ricerca di integrali definiti.

Nei paragrafi 7, 8 del Cap. I abbiamo già notato che un metodo abbastanza fecondo per la ricerca di integrali definiti è la derivazione e l'integrazione sotto il segno.

Diamo qualche esempio di questo metodo.

Da

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

colla derivazione rispetto al parametro $a$ otteniamo

$$\int_0^1 x^{a-1} \log x\, dx = -\frac{1}{a^2}$$

$$\int_0^1 a^{a-1} (\log x)^2\, dx = \frac{1\,.\,2}{a^3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}{a^{n+1}}$$

Invece coll'integrazione rispetto ad $a$ fra due qualunque limiti $\alpha$, $\beta$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x}\, dx = \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Da una formola trovata nel paragrafo precedente ricaviamo

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} +$$

$$+ \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

e limitando l'integrazione fra $0$ e $\frac{\pi}{2}$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, d\, x$$

e quindi se $n$ è pari si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2}$$

e se $n$ è dispari si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3}\ .$$

Ora osserviamo che fra i limiti $o$ e $\frac{\pi}{2}$ il sen x è un numero positivo minore di *1*, e quindi sarà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, d\, x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, d\, x >$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, d\, x$$

cioè

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} >$$

$$> \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

donde

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}>\frac{\pi}{2}>$$

$$>\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\,.$$

I due numeri fra i quali è sempre compreso $\frac{\pi}{2}$ differiscono fra loro per il fattore

$$\frac{2n}{2n-1}$$

il quale tende a *1* se $2n$ tende all'infinito.

Dunque possiamo conchiudere che

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

cioè abbiamo l'espressione di $\frac{\pi}{2}$ sotto forma di un prodotto infinito.

Questa formola è la cosiddetta formola di Wallis (1616-1703).

Nella formola trovata sul principio di questo paragrafo

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\,dx=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{a^{n+1}}$$

ponendo

$$x=e^{-y}$$

si ha

$$\log x = -y$$

$$dx = -e^{-y}\,dy$$

$$y = \infty \text{ per } x = o;\ y = o \text{ per } x = 1$$

onde

$$\int_o^1 x^{a-1} (\log x)^n\,dx = +\int_o^\infty e^{-ay} (-y)^n\,dy$$

da cui

$$\int_o^\infty e^{-ay}\,y^n\,dy = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Per $a = 1$ si ha dunque

$$\int_o^\infty e^{-y}\,y^n\,dy = n!$$

Questa formola sussiste per $n$ intero positivo; perchè pel modo con cui abbiamo ricavato questa formola, il numero $n$ in esso contenuto, rappresenta il numero di volte che si è fatta la derivazione rispetto ad una certa variabile.

Lo studio del valore di questo integrale definito nel caso in cui $n$ non è più un numero intero positivo, costituisce lo studio del cosiddetto *integrale Euleriano di 2.ª specie.* Si adopera la seguente notazione

$$\int_o^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,dx = \Gamma(a).$$

Si introduce così nel calcolo lo studio della cosiddetta *funzione gamma di Eulero*. Questa funzione *gamma* gode di molte proprietà singolari. Si trova che essa può svilupparsi in un prodotto infinito, cioè

$$\Gamma(a) = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}}{(a+m-1)}.$$

Noi non possiamo entrare nei dettagli dello studio di queste funzioni.

## CAPITOLO IV.

### GLI INTEGRALI MULTIPLI.

§ 1. **Definizione di integrale doppio e multiplo. Condizioni di integrabilità.** — Nel § 8 del Cap. I noi abbiamo accennato per incidente ad una definizione di integrale doppio. Ora passiamo ad una trattazione completa. Daremo prima di tutto una definizione che non è che la estensione diretta di quella data per gli integrali semplici.

Si abbia una funzione di due variabili $f(x, y)$, e sia definita o si voglia considerare solo in una area piana il cui contorno sia una curva chiusa di equazione $\varphi(x, y) = o$. Per ogni punto interno a questa curva la $f$ sia *finita*.

I campi di variabilità di $x$ e $y$ non sono indipendenti l'uno dall'altro; fissato un valore ad $y$, il campo di variabilità di $x$ resta definito nella seguente maniera: meniamo la retta parallela all'asse $x$ e avente per ordinata la $y$ fissata; questa retta taglierà il contorno dell'area chiusa almeno in due punti, e *il campo di variabilità di* x *per quella* y *fissata si intenderà esteso dal valore dell'ordinata del punto più a sinistra, sino al valore* *dell'ordinata del punto più a destra.* I limiti di variabilità di $x$ sono dunque funzioni del valore di $y$, o viceversa.

Se si volessero effettivamente trovare queste funzioni, basterebbe risolvere rispetto ad $x$ la equazione $\varphi(xy) = o$ la quale darà in generale almeno due valori di $x$ per ogni valore di $y$, darà cioè luogo a due funzioni di $y$, i cui valori per ogni $x$ corrisponderanno ai limiti del campo di variabilità di $x$.

In particolare, i limiti di variabilità riescono costanti, quando l'area data è un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati di $x$ e $y$. Allora per ogni $y$ i limiti di variabilità di $x$ sono sempre i medesimi.

In questo caso noi possiamo dire che la funzione $f$ è definita o si vuol considerare fra limiti *costanti* di variabilità di $x$ e $y$, per es. da $x = a$ sino ad $x = b$ e da $y = a'$ sino ad $y = b'$.

Dividiamo l'area data in un numero arbitrario di parti, e tale divisione la possiamo fare con *una legge qualunque.*

Per es., per fissare le idee, si può procedere così: Fra tutte le infinite $y$ dei diversi punti dell'area si consideri la minima e la massima, e sieno $a'$, $b'$; e così sieno $a$, $b$, la minima e la massima $x$. Si disegnino le rette $y = a'$, $y = b'$, $x = a$, $x = b$ le quali formeranno un rettangolo nel cui interno è tutta compresa l'area data. Si divida l'intervallo $a' b'$ in un numero arbitrario di parti, e quello $a b$ similmente.

Menando pei punti di divisione delle rette parallele agli assi, tutto il rettangolo resterà diviso in tanti rettangoli parziali; e tutta l'area resterà anche divisa in tante parti di cui alcune sono rettangolari, e altre (quelle che sono situate prossime al contorno) sono parti di rettangoli. Di questi rettangoli consideriamo solo quelli che sono interamente interni all'area data.

Se $\delta_1\, \delta_2 \ldots,\ \delta_1'\, \delta_2' \ldots,$ sono gli intervalli parziali in cui si sono divisi gli intervalli $ab$ sull'asse di $x$ e $a'\, b'$ sull'asse di $y$, allora l'area di un rettangolo sarà data dal prodotto $\delta_r\, \delta'_s$.

Consideriamo un punto nell'interno di ciascun rettangolo parziale $(\delta_r\, \delta'_s)$ e in esso calcoliamo il valore della funzione, che chiameremo $f_{rs}$, e formiamo il sommatorio doppio

$$\sum_{rs} f_{rs}\, \delta_r\, \delta_s$$

il quale avrà un valore *finito* in qualunque modo si è fatta la scelta dei valori di $f$, e in qualunque modo si è effettuata la divisione.

Facciamo ora, come si fa per la definizione di integrali semplici, tendere a zero gli intervalli $\delta$, $\delta'$ mentre il loro numero lo facciamo crescere all'infinito; allora il sommatorio doppio *potrà* tendere ad un limite determinato, che sia lo stesso qualunque sia la scelta dei valori $f_{rs}$ e qualunque sia la maniera colla quale si fanno tendere a zero gli intervalli; se questo accade noi chiameremo quel limite *l'integrale doppio definito della funzione* f *in tutta l'area data*, e lo indicheremo col simbolo

$$\int\!\!\int f(x\, y)\, d\, x\, d\, y.$$

Come si vede la definizione data è la diretta estensione di quella già data per gli integrali semplici, e si possono poi fare delle considerazioni che sono le medesime di quelle fatte altra volta, e che noi solo accenneremo.

La condizione *necessaria* e *sufficiente* per l'esistenza del limite del sommatorio è che sia zero il limite

$$\lim \Sigma D_{rs} \delta_r \delta'_s$$

dove con $D_{rs}$ si indica l'*oscillazione* della funzione $f$ nell'area $(\delta_r \delta'_s)$.

La dimostrazione di ciò si fa in una maniera perfettamente simile a quella tenuta nel § 1 del Cap. II. Di qui si ricava che sono integrabili:

1. le funzioni continue di due variabili $x\, y$;
2. le funzioni discontinue in un numero *finito* di punti o di linee del piano;
3. le funzioni discontinue in un numero *infinito* di punti o di linee, ma tali però che possano racchiudersi in aree la cui somma può rendersi piccola a piacere.

Per intendere ora meglio la natura dell'integrale doppio definito, e per poter avere un mezzo per calcolarlo, facciamo vedere che relazione c'è fra esso e gli integrali semplici.

Per la costruzione dell'integrale doppio noi dobbiamo fare un sommatorio doppio, nel quale dobbiamo passare al limite per $\delta_r$, $\delta'_s$ tendenti a zero, essendo poi arbitraria la maniera colla quale li facciamo tendere a zero.

Ora immaginiamo di effettuare prima il sommatorio rispetto all'indice $r$ e poi quello rispetto all'indice $s$. Vuol dire che allora noi sommiamo prima tutti i termini $f_{rs}\,\delta_r\,\delta'_s$ provenienti dai rettangoli situati in una striscia orizzontale cioè parallela all'asse di $x$, (propriamente la striscia $s^{ma}$), e poi facendo acquistare all'indice $s$ tutti i suoi valori, facciamo la somma di tutti i termini che si ottengono relativi alle varie strisce orizzontali.

La scelta dei valori $f_{rs}$ è anche a nostro arbitrio; ora noi possiamo in particolare scegliere tutti questi valori in punti situati su rette parallele all'asse di $x$ e interne naturalmente alle varie striscie orizzontali. Esaminiamo allora il valore del sommatorio relativo ad una sola striscia orizzontale, per es. la striscia $s^{ma}$. Sia $y^{(s)}$ l'ordinata della retta interna a tale striscia e sulla quale scegliamo i valori di $f_{rs}$.

Allora tutti i valori di $f$ che consideriamo saranno quelli della funzione di sola $x$

$$f(x\,y^{(s)})$$

che si ottiene dalla data ponendo $y = y^{(s)}$.

Il sommatorio rispetto all'indice $r$ e relativo alla striscia $s^{ma}$ sarà

$$\delta'_s \sum_r \delta_r\, f(x^{(r)}\, y^{(s)})$$

indicando con $x^{(r)}$ l'ascissa di un punto compreso nell'intervallo $\delta_r$. Questo sommatorio deve estendersi fra due limiti che dipendono dall'indice $s$, cioè dal valore dell'ordinata $y^{(s)}$ della striscia $s^{ma}$. Secondochè si considera un valore di $y$ piuttosto che un altro, il campo di variabilità di $x$ muta, come abbiamo sviluppato sul principio di questo paragrafo. Passando allora al limite solo in quel sommatorio semplice, facendo cioè convergere a zero solo i $\delta_r$, è evidente per la definizione di integrale semplice, che esso si muta in

$$\delta'_s \int f(x\, y^{(s)})\, d\, x$$

dove l'integrazione bisognerà estenderla fra due valori di $x$, che corrispondono alle ascisse degli estremi della striscia $s^{ma}$; tali due limiti saranno due funzioni di $y$ che si ricavano dalla equazione del contorno $\varphi\,(x\, y) = o$ risolvendola rispetto ad $x$ e ponendo $y = y^{(s)}$.

Se ora formiamo il sommatorio di tutti i valori già ottenuti, estendendolo alle varie strisce orizzontali, cioè facendo variare l'indice $s$, otteniamo

$$\Sigma\, \delta'_s \int f(x\, y^{(s)})\, d\, x$$

e passando al limite per i $\delta'_s = o$ si ha

$$\int d\, y \int f(x\, y)\, d\, x$$

dove la seconda integrazione rispetto ad $y$ bisogna farla fra limiti costanti che corrisponderebbero alle ordinate della più bassa e della più alta striscia, cioè (essendo le strisce divenute infinitamente sottili) alle ordinate delle due tangenti orizzontali del contorno piano.

Vediamo con ciò che l'integrale doppio corrisponde alla successione di due integrali semplici, di cui il primo è fatto fra limiti che sono funzioni di $y$, e il secondo fra limiti costanti.

Se l'area d'integrazione data è un rettangolo, coi lati paralleli agli assi coordinati, allora anche la prima integrazione si fa fra limiti costanti.

È così che queste considerazioni si rannodano con quelle del § 8 del Cap. I.

Se la funzione $f(xy)$ è *integrabile*, allora è evidente che il suo integrale doppio fra limiti costanti sia rispetto ad $x$ che rispetto ad $y$, è eguale sia a

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} dx\, f(xy)$$

sia a

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a'}^{b'} dy\, f(xy)$$

supposto che le ascisse e le ordinate del rettangolo dentro cui si fa la doppia integrazione sieno rispettivamente $a$, $b$; $a'$, $b'$.

Di qui si ricava che tali due ultime espressioni sono fra loro eguali; cioè come generalizzazione del teorema dell'integrazione sotto il segno (vedi Cap. I § 8) otteniamo che *questa è possibile quando la funzione data è una funzione integrabile di due variabili.*

Le considerazioni fatte per gli integrali doppi si potrebbero estendere senza sostanziali modificazioni agli *integrali tripli*, *quadrupli*, ecc. in generale *multipli*.

Ogni integrale multiplo (la cui definizione sarebbe analoga a quella data sopra per gli integrali doppi) si potrà comporre mediante una successione di integrali semplici. Ci pare completamente inutile insistere su queste idee.

§ 2. **L'integrale multiplo come funzione dei limiti; sua definizione nei casi singolari.** — Dobbiamo ora per gli integrali doppi fare considerazioni analoghe a quelle del § 3 del Cap. I; dobbiamo cioè esaminare la continuità e la derivabilità di essi considerati come funzioni dei limiti.

Consideriamo l'integrale doppio

$$\int_{a'}^{y}\int_{a}^{x} f(x, y)\, d\,x\, d\,y$$

dove abbiamo voluto indicare con $x$, $y$ i limiti superiori della doppia integrazione.

Il valore di questo integrale riuscirà una funzione di $x$ e $y$, che chiameremo $\varphi\,(x\,y)$.

Per esaminare la *continuità* di questa funzione formiamo

$$\varphi\,(x+h, y+k) - \varphi\,(x\,y) = \int_{a'}^{y+k}\int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y}\int_{a}^{x}$$

che può trasformarsi in

$$\left[\int_{a'}^{y} + \int_{y}^{y+k}\right]\int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y}\left[\int_{a}^{x+h} - \int_{x}^{x+h}\right] =$$

$$= \int_{y}^{y+k}\int_{a}^{x+h} + \int_{a'}^{y}\int_{x}^{x+h}$$

ed essendo invertibile la successione delle due integrazioni nel secondo integrale, possiamo scrivere

$$= \int_y^{y+k} \int_a^{x+h} + \int_x^{x+h} \int_{a'}^{y} .$$

Ora gli integrali da $y$ a $y+k$, e da $x$ a $x+h$ sono, come si sa, delle quantità tendenti a zero (v. § 3, Cap. I), quindi l'ultima espressione trovata, potendo considerarsi come somma di due integrali semplici di due diverse funzioni, estesi appunto fra i limiti citati, tenderà a zero con $h$, $k$ tendenti a zero; ciò dimostra la continuità della funzione $\varphi\,(x\,y)$.

Passiamo ora alle derivate parziali di $\varphi$.

Sapendo che l'integrale doppio non è che una successione di due integrali semplici, e potendo poi permutare l'ordine delle due integrazioni, la $\varphi$ può considerarsi sia come un integrale rispetto alla variabile $x$, sia come un integrale rispetto alla variabile $y$. Quindi volendo la derivata parziale rispetto ad $x$, noi considereremo la $\varphi$ come un integrale rispetto ad $x$, e per il noto teorema della derivazione degli integrali ricaviamo che *se*

$$\int_{a'}^{y} f(x\,y)\,d\,x$$

*è una funzione continua di* x, *allora la derivata parziale di* $\varphi$ *in un punto* x' *è data da*

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial x'} = \left[\int_{a'}^{y} f(x\,y)\,d\,y\right]_{x=x'} .$$

Se ora noi supponiamo che *la funzione* f(x y) *sia una funzione continua delle due variabili* $x\,y$, allora essendo l'integrale $\int_a^y f(x\,y)\,dy$ una funzione continua di $x$, e quindi essendo il suo valore per $x = x'$ eguale al limite dei suoi valori per $x$ tendente ad $x'$, e inoltre (v. § 7, Cap. I) tal limite essendo eguale all'integrale del limite della funzione, si ha semplicemente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \int_{a'}^{y} f(x'\,y)\,d\,y\,.$$

Analogamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \int_a^x f(x\,y')\,d\,x\,.$$

Al solito la condizione posta per $f$, che sia continua rispetto al sistema delle due variabili. è una *condizione sufficiente, ma non necessaria.*

*Colle condizioni poste sussiste poi ancora per la funzione* $\varphi$ *il teorema della invertibilità delle derivazioni.* Perchè è evidente che dalle formole di sopra si ricava

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'\,\partial x'} = f(x'\,y')$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\,\partial y'} = f(x'\,y')$$

e quindi le due derivate seconde sono eguali.

Possiamo ora passare a stabilire il concetto di integrale doppio nei soliti due casi singolari già considerati per gli integrali semplici, cioè il caso in cui la funzione diventi infinita in qualche punto o linea del campo d'integrazione, e il caso in cui uno dei limiti d'integrazione è l'infinito.

Il criterio che ci serve per la definizione in questi casi è sempre lo stesso, cioè quello di conservare la proprietà fondamentale della *continuità* dell'integrale. Quindi se la funzione diventa infinita in un punto allora chiameremo integrale doppio della funzione esteso in un campo comprendente quel punto, il limite (supposto che esista e che sia unico) dei valori dell' integrale in campi che escludono quel punto.

Per esempio immaginiamo di circondare quel punto con un cerchietto, e di considerare poi il campo primitivo diminuito di questo cerchietto; facendo diminuire il raggio di questo cerchio, il limite del valore dell'integrale doppio, sarà il richiesto valore dell' integrale definito in tutto il campo.

Ma qui capitano naturalmente tante distinzioni, perchè potrebbe accadere che il limite di cui si parla esiste avvicinandosi colle variabili $x\,y$ al punto singolare solo per certe determinate direzioni, e non per tutte le direzioni, oppure che si ottenga un limite per certe direzioni di avvicinamento e se ne ottenga un altro per certe altre. In tali casi non esisterà propriamente l' integrale esteso a tutto il campo; può accadere allora anche che esista e sia finito il valore dell' integrale calcolato mediante le due integrazioni semplici, e non esista invece quello dato dalla nostra definizione, e che bisogna considerare come valore dell'integrale doppio.

Non possiamo fermarci sui dettagli di queste considerazioni.

Se poi il campo d'integrazione si estende all'infinito allora per integrale doppio intenderemo anche il limite dei valori degli integrali definiti in campi che man mano si estendono sino all'infinito, supposto che questo limite esista e sia unico qualunque sia il modo col quale si fa crescere il campo all'infinito.

Anche qui potrebbero farsi alcune considerazioni speciali che per brevità tralasciamo.

§ 3. **Trasformazione degli integrali multipli** — Abbiamo già visto a suo tempo (Cap. I § 6) come si fa a trasformare un integrale semplice; se cioè si ha l'integrale:

$$\int R\,dx$$

dove $R$ è una funzione di $x$, e si vuol trasformare in un altro integrale colla variabile indipendente $y$ legata ad $x$ da una qualunque relazione, allora bisognerà moltiplicare la funzione sotto il segno per la derivata dell'antica variabile rispetto alla nuova.

Vogliamo fare lo stesso nel caso degli integrali multipli. Si abbia cioè un integrale multiplo:

$$\int\int\ldots\int R(x_1\, x_2\ldots x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

e si voglia trasformare in un integrale colle variabili indipendenti non più $x_1\, x_2 \ldots x_n$, ma $y_1\, y_2 \ldots y_n$ legate alle $x$ da $n$ date relazioni.

Si abbiano le formole che esprimono le $x$ mediante le $y$, cioè

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ x_2 = x_2\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_n\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \end{array} \tag{1}$$

Nella seconda di esse sostituiamo in luogo di $y_1$ il valore ricavato dalla prima equazione, e allora $x_2$ resterà espresso mediante $x_1\, y_2 \ldots y_n$; poi nella terza poniamo in luogo di $y_1\, y_2$ i valori ricavati dalle due prime equazioni; e allora $x_3$ resterà espresso mediante $x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n$, e così continuiamo, sino a che in tal maniera esprimeremo $x_n$ mediante $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, y_n$.

Si hanno cioè le seguenti formole:

$$\begin{array}{l} x_1 = f_1\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ x_2 = f_2\,(x_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n) \\ x_3 = f_3\,(x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = f_n\,(x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, y_n) \end{array} \tag{2}$$

Cominciamo ora nell'integrale multiplo a fare l'integrazione rispetto a $x_n$, e mediante l'ultima di queste relazioni introdurremo la variabile $y_n$ in luogo della variabile $x_n$, considerando tutte le altre variabili per un momento come costanti; allora il nostro integrale diventa

$$\int R \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d x_1 \, d x_2 \dots d x_{n-1} \, d y_n$$

Possiamo ora analogamente, mediante la penultima delle formole precedenti, introdurre la variabile $y_{n-1}$ in luogo della variabile $x_{n-1}$, e l'integrale allora diventa:

$$\int R \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d x_1 \, d x_2 \dots d y_{n-1} \, d y_n$$

e così seguitando, si ha infine che il nostro integrale si trasforma in:

$$\int R \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d y_1 \, d y_2 \dots d x_n$$

e così otteniamo l'integrale trasformato nelle variabili $y$.

Per eseguire questa trasformazione occorre conoscere le funzioni $f_1 \, f_2 \dots f_n$, le quali non sono propriamente quelle che esprimono le antiche variabili mediante le nuove, e che sono direttamente date, ma si ricavano da esse con eliminazioni opportune di variabili nel modo indicato. Però naturalmente si presenta ora la questione di operare la trasformazione dell'integrale facendo a meno della formazione delle funzioni $f$, ma operando direttamente sulle funzioni colle quali le $x$ si esprimono mediante le $y$.

Consideriamo il *determinante funzionale* o *jacobiano* delle $x$ rispetto alle $y$, cioè il determinante formato colle derivate prime delle $x$ rispetto alle $y$

(vedi *Calcolo differenziale*, Cap. V § 2).

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Ora si può subito dimostrare che il prodotto

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$$

pel quale, come abbiam visto, si dovea moltiplicare la funzione che sta sotto il segno di integrale, per avere l'integrale trasformato, non è altro che tale *determinante funzionale*; e quindi allora possiamo stabilire il risultato, *che per avere l'integrale trasformato basta moltiplicare la funzione sotto il segno*, *per l'jacobiano delle antiche variabili considerate come funzioni delle nuove.*

Cominciamo infatti a stabilire la seguente formola riguardo alle derivate delle $x$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \ldots + \\ + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j}$$

dove nel primo membro s'intende la derivata di $x_i$ rispetto ad $y_i$ ricavata dalle formole esplicite, (1) e nel secondo membro le derivate della $f$, s'intendono ricavate dalle formole (2).

Se l'indice $j$ è inferiore ad $i$ allora il primo termine del secondo membro è zero; poichè la prima delle (2) è la stessa della prima delle (1), così le derivate di $x_1$ sono esattamente eguali alle derivate di $f_1$.

Ora dalla teoria del prodotto di due determinanti, tenendo presente la formola precedente messa sotto la forma

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j}-\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j}-\dots-$$
$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j}+\frac{\partial x_i}{\partial y_j}=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$$

si ricava senz'altro la eguaglianza:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +1 & 0 \dots 0 \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_2}+ & 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_1}-\frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots +1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}.$$

Ma il secondo determinante del primo membro è uguale a 1, dunque il prodotto

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$$

è uguale al determinante funzionale, come si voleva dimostrare.

Resta così completata la teoria della trasformazione di un integrale multiplo. Occorre appena notare che pel caso di $n=1$, cioè pel caso di un integrale semplice, la formola di trasformazione ora data coincide con quella già nota per gli integrali semplici.

Facciamo un'applicazione di queste formole. Si abbia l'integrale doppio

$$\int\int f(x\,y)\,d\,x\,d\,y$$

e si vogliano trasformare le variabili $x\,y$ in altre due variabili $\rho$, $\varphi$, mediante le formole che danno la trasformazione di coordinate *cartesiane* in coordinate *polari*, cioè

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\,\text{sen}\,\varphi.$$

Il determinante funzionale è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\rho\,\text{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\,(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi) = \rho.$$

L'integrale trasformato è dunque

$$\int\int f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

§ 4. **Proprietà degli integrali doppi. — Teorema di Green.** — Noi sappiamo che per le funzioni continue $f(x)$ la ricerca dell'integrale semplice indefinito si riduce a quella di un'altra funzione $F(x)$ la cui derivata sia $f(x)$, e trovata poi tale funzione, la ricerca del valore di un qualunque integrale definito in un intervallo si fa formando *la differenza fra i valori di* F (x) *nei due estremi dell'intervallo, per modo che il valore dell'integrale definito non verrà a dipendere che dai valori di* F (x) *nei due estremi dell'intervallo e non dai valori di* F (x) *negli altri punti dell'intervallo stesso.*

Vediamo ora che cosa c'è di analogo a questo per il caso degli integrali doppi.

Si abbia l'integrale doppio

$$\int\int f(x\,y)\,d\,x\,d\,y$$

esteso a tutta un'area piana, il cui contorno abbia per equazione $\varphi\,(x\,y) = o$. Per fissare le idee supponiamo che questo cortorno sia formato di una curva della forma di un ovale, per modo cioè che ogni retta lo incontri al più in *due* punti. Facendo la prima integrazione indefinita rispetto ad $x$ abbiamo una funzione di $x$ e $y$, nella quale dobbiamo porre per limiti le due funzioni di $y$ che si ricaverebbero da $\varphi\,(x\,y) = o$ risolvendo questa equazione rispetto ad $x$. Sieno $x = \varphi_1\,(y)$, $x = \varphi_2\,(y)$

queste due funzioni e propriamente per ogni valore di $y$, la *prima* dia il valore dell'ascissa del punto *più a sinistra*, e la *seconda* dia il valore dell'ascissa del punto *più a destra;* e sia $F(xy)$ l'integrale indefinito ottenuto facendo l'integrazione rispetto ad $x$, per modo che

$$\frac{\partial F(xy)}{\partial x} = f(xy).$$

Bisognerà allora integrare rispetto ad $y$ la espressione

$$F(\varphi_2(y), y) - F(\varphi_1(y), y).$$

Questa integrazione bisogna estenderla fra due limiti che sono rispettivamente le ordinate del punto più basso della curva e del punto più alto, cioè di quei due punti in cui le tangenti sono parallele all'asse di $x$. Sieno $y_1\, y_2$ rispettivamente queste ordinate; noi allora dobbiamo calcolare

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_1(y), y)\, dy$$

cioè, scambiando i limiti nel secondo integrale,

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), dy + \int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y)\, dy.$$

Ora la somma di questi due integrali può interpretarsi nel seguente modo.

Consideriamo l'integrale

$$\int F(xy)\, dy$$

dove in luogo di $x$ si debba intendere messo il valore ricavato dalla equazione $\varphi(x\,y) = o$, e immaginiamo che questo integrale si debba estendere a tutte le coppie di valori di $x\,y$ soddisfacenti quella equazione, cioè *si debba estendere a tutto il contorno dell'area data.* Spezziamo in due parti quest' integrale; partiamo dal punto più basso della curva cioè da quello di ordinata $y_1$ e percorrendo il lato *destro* della curva (cioè quello i cui punti hanno le loro ascisse date dalla funzione $\varphi_2(y)$) andiamo sino al punto più alto la cui ordinata è $y_2$; ciò facendo veniamo a calcolare l'integrale

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y),\ y)\,d\,y.$$

Poi proseguiamo il cammino da $y_2$ sino ad $y_1$ ma percorrendo il lato *sinistro* della curva (cioè quello i cui punti hanno le loro ascisse date dalla funzione $\varphi_1(y)$).

Si ha così l'integrale

$$\int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y),\ y)\,d\,y.$$

La somma di questi due integrali sarà l'integrale esteso a tutto il contorno dell'area. Risulta anche senza indeterminazione la direzione colla quale si deve percorrere il contorno detto. Noi siamo partiti dal punto *più basso* e abbiamo percorso la parte *destra* del contorno, e poi abbiamo seguitato nello stesso senso. Dunque *il contorno* *bisogna percorrerlo in modo che l'area resti sempre a sinistra.*

Possiamo dunque scrivere la formola

$$\int\int f(xy)\, dx\, dy = \int F(xy)\, dy$$

dove nel primo membro si intende l'integrale doppio esteso all'area data, e nel secondo membro s'intende l'integrale semplice esteso al contorno dell'area. Si ha così *la trasformazione di un integrale doppio, in un integrale semplice, e il valore dell'integrale doppio dipendente solo dai valori che la funzione* F (x y) *ha sul contorno dell'area e non nei punti interni all'area stessa.* Si ha così la perfetta generalizzazione della proprietà già citata sul principio di questo paragrafo. In ciò consiste *la formola di Green* che può porsi poi anche sotto altre forme.

Nello stesso modo con cui abbiamo ottenuto la formola precedente, assumendo la $x$ per prima variabile d'integrazione, così scambiando le due variabili si ha analogamente

$$\int\int f(xy)\, dx\, dy = - \int F'(xy)\, dy$$

dove gli integrali hanno gli analoghi significati come sopra, e inoltre

$$\frac{\partial F'(xy)}{\partial y} = f(xy).$$

Il segno negativo del secondo membro si ottiene volendo sempre immaginare che il contorno sia percorso nello stesso senso di prima.

Le due formole possono anche scriversi

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx\,dy = \int F dy$$

$$\iint \frac{\partial F'}{\partial y} dx\,dy = -\int F' dx$$

dove le due funzioni $F F'$ sono legate dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial y} = f.$$

Del resto queste due formole sono fra loro indipendenti, e le due funzioni $F F'$ potrebbero anche non essere legate da quella relazione.

In tal caso si ha la formola (sottraendo le due formole di sopra)

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial y}\right) dx\,dy = \int (F dy + F' dx)$$

intendendo per $F F'$ due funzioni qualunque, fra loro indipendenti, di $x y$. Sotto questa forma può porsi *la formola di Green.*

*Se in particolare* F F′ *sono due tali funzioni che per tutti i punti dell'area data soddisfanno alla relazione*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial y},$$

*il primo membro della formola superiore è zero e* *quindi si ha*

$$\int (F\,d\,y + F'\,d\,x) = 0$$

*cioè l'integrale di* F d y + F' d x *esteso a tutto il contorno dell'area è identicamente zero.*

Da questo teorema ne possiamo ricavare un altro.

Consideriamo due qualunque punti dell'area o del contorno, e sieno rispettivamente di coordinate $x_0\,y_0$, $x\,y$. Disegniamo una linea tutta compresa nell'area e che vada dal primo punto al secondo. Se noi disegniamo poi un'altra simile linea che torni dal secondo punto al primo, è naturale che, poichè per tutto il nuovo contorno che così si è formato e per l'area che vi è racchiusa, valgono le condizioni di sopra, si avrà che l'integrale

$$\int (F\,d\,y + F'\,d\,x)$$

esteso a questo nuovo contorno deve essere zero, e quindi l'integrale esteso da $(x_0\,y_0)$ a $(x\,y)$ lungo la prima linea sarà eguale a quello che va dagli stessi limiti ma lungo la seconda linea; il che significa che *per qualunque linea compresa nell'area, si giunga al punto* (x y) *si ha sempre lo stesso valore per l'integrale.* Fissato dunque un limite inferiore, l'integrale potrà definire una funzione di un punto qualunque appartenente all'area.

Si può dimostrare che questa funzione ha per derivate parziali rispetto ad $x$ e $y$ rispettivamente le funzioni $F'$ $F$ date, e quindi ha per differenziale totale la espressione

$$F' \, d\,x + F \, d\,y.$$

Resta così risoluto il problema: *Date due funzioni* F F' *tali che*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial y}$$

*trovare la funzione le cui derivate parziali sieno eguali alle funzioni date.*

Questo problema si chiama il problema dell'integrazione del differenziale totale, e noi avremo occasione di tornarci.

# CAPITOLO V.

## INTEGRAZIONE DEI DIFFERENZIALI TOTALI.

Abbiamo visto che se $f(x)$ è una funzione continua, allora il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int f(x)\, d\, x$$

si riduce a calcolare un'altra funzione $\varphi(x)$ la cui derivata sia proprio $f(x)$, o, ciò che è lo stesso, il cui differenziale sia $f(x)\, d\, x$.

Quindi se $f(x)$ è continua il problema di trovare una funzione il cui differenziale sia $f(x)\, d\, x$ si riduce al calcolo dell'integrale indefinito corrispondente alla funzione $f$.

Vogliamo estendere questo problema al caso di un numero qualunque di variabili.

Se abbiamo una funzione $\varphi(x_1\, y_2 \dots)$ di un numero qualunque di variabili, sappiamo che il differenziale totale è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots$$

Ora ci proponiamo il problema inverso. Data una espressione di questo tipo, e sia:

$$X_1 \, d x_1 + X_2 \, d x_2 + \ldots + X_n \, d x_n \tag{1}$$

dove le $X$ sieno funzioni continue e finite di tutte le variabili $x_1 \, x_2 \ldots x_n$, come si trova una funzione $\varphi$ di tutte queste variabili tale che il suo differenziale totale coincida con quello dato? Ed esiste sempre una tale funzione?

In un problema di questo genere siamo anche capitati per incidente alla fine del capitolo precedente.

Noi troveremo che non è sempre possibile trovare una tale funzione $\varphi$, ma perchè essa esista, le funzioni date $X$ debbono soddisfare a certe relazioni.

Incominciamo prima di tutto col supporre che le $X$ sieno finite e continue, e lo siano anche le loro derivate rispetto a tutte le variabili. Inoltre se esiste $\varphi(x_1 \, x_2 \ldots x_n)$ il cui differenziale totale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} d x_n$$

debba coincidere con (1) è necessario che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = X_1 \, , \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = X_2 \, , \ldots , \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_n$$

e considerando p. es., solo le prime due di queste formole, e derivando la prima rispetto ad $x_2$ e la seconda rispetto ad $x_1$ si ha:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \, \partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \, , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \tag{3}$$

Ora avendo supposto che le $X$ sieno finite insieme colle loro derivate prime, si ha in virtù delle (2) e (3) che sono finite e continue le derivate di 1.° e 2.° ordine di $\varphi$, e quindi sono soddisfatte le condizioni perchè le derivazioni rispetto alle due variabili $x_1\, x_2$ sieno invertibili, cioè perchè sia (v. *Calcolo diff.*, Cap. II, § 7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \, \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2}$$

onde possiamo dire che sarà anche:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

È chiaro che gli stessi ragionamenti possono farsi prendendo a considerare due altre qualunque delle $X$. Onde accanto a questa condizione se ne hanno tante altre tutte dello stesso tipo, combinando le $X$ a due a due in tutti i modi possibili; cioè si hanno in tutto $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ relazioni.

Possono esprimersi colla formola generale:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} \tag{4}$$

dove $r, s$ prendono tutti i valori da *1* sino ad $n$.

Dobbiamo ora passare a dimostrare che tali condizioni sono anche sufficienti; cioè che se esse si verificano, allora esisterà sempre la funzione $\varphi$.

Infatti consideriamo per un momento come costanti le $x_2 \ldots x_n$ e calcoliamo:

$$\int X_1 \, d\, x_1$$

il quale esisterà sempre perchè $X_1$ è continua. Sia $L_1$ l'integrale indefinito. Noi possiamo aggiungervi una costante arbitraria rispetto alla variabile $x_1$, epperò tale costante potrà essere una funzione delle altre variabili. Allora l' integrale sarà rappresentato da:

$$\varphi = L_1 (x_1 x_2 \ldots x_n) + \psi_1 (x_2 x_3 \ldots x_n)$$

e resta a vedere se si può determinare la $\psi_1$ in modo che $\varphi$ sia il richiesto integrale del differenziale totale.

Ora il differenziale totale di $\varphi$ è:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d x_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right) d x_2 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}\right) d x_n .$$

Se questo differenziale deve coincidere col dato (1) è necessario che la loro differenza sia zero, e osservando che

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = X_1 ,$$

si ha che deve essere:

$$\left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) d x_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right) d x_n = \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} d x_3 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} d x_n$$

cioè la funzione $\psi_1$ delle sole variabili $x_2 \ldots x_n$

deve essere determinata in modo che il suo differenziale totale sia:

$$\left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) d x_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right) d x_n \quad (5)$$

Siccome $\psi_1$ non contiene la variabile $x_1$, così è chiaro in primo luogo che in questa espressione non deve comparire più la variabile $x_1$. Inoltre debbono senz'altro verificarsi per questo nuovo differenziale totale le condizioni da noi già riconosciute *necessarie* per l'integrabilità.

Ora è facile dimostrare che in (5) non vi comparisce che solo apparentemente la variabile $x_1$. Infatti facciamo la derivata rispetto ad $x_1$ di uno dei coefficienti:

$$X_r = \frac{\partial L_1}{\partial x_r} .$$

Si ha, derivando:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_r} \quad (6)$$

cioè:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_r}$$

che è zero in virtù delle condizioni a cui supponiamo che soddisfino le $X$.

Dimostriamo ora che in (5) sono soddisfatte le condizioni di integrabilità.

Si ha in forza delle condizioni poste:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(X_s - \frac{\partial L_1}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial L_1}{\partial x_s} =$$

$$= \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}\right)$$

e con ciò è dimostrata anche la seconda parte del nostro assunto.

Allora sul differenziale (5) possiamo riapplicare daccapo il metodo già adoperato e così troviamo che $\psi_1$ sarà eguale ad una funzione

$$L_2(x_2 \ldots x_n)$$

più una costante rispetto a $x_2$ che potremo porre eguale a $\psi_2(x_3 \ldots x_n)$.

Così seguitando ci riduciamo ad un differenziale contenente una sola variabile $x_n$, e che è quindi sempre integrabile.

Si avrà infine:

$$\varphi = L_1 + L_2 + \ldots + L_n + \text{costante}$$

dove la costante ora lo è nel senso assoluto, cioè costante rispetto a tutte le variabili.

Si vede adunque che senza servirci di altre condizioni che di quelle poste nella formola (4) possiamo giungere alla ricerca di $\varphi$. Con ciò le (4) sono anche condizioni *sufficienti*.

Come esempio prendiamo a considerare.

$$\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy.$$

È facile vedere che la condizione d'integrabilità è soddisfatta.

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Per effettuare l'integrazione calcoliamo:

$$\int\frac{y}{x^2+y^2}\,d\,x=\text{arco tang}\,\frac{x}{y}+\psi_1(y).$$

Formando ora l'espressione:

$$\left(2y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)-\frac{d}{d\,y}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{y}=$$

$$=\left(2y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{x}{y^2}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=2y$$

e integrando si ha:

$$\int 2y\,d\,y=y^2$$

onde infine l'integrale è:

$$\text{arco tang}\,\frac{x}{y}+y^2+\text{costante}.$$

# CAPITOLO VI.

## GEOMETRIA INTEGRALE.

§ 1. **Area delle curve piane.** — Sia data una curva piana di equazione:

$$y = f(x)$$

e consideriamo due punti $AB$ di essa, di ascisse $\alpha, \beta$.

La porzione del piano compresa fra la curva, l'asse di $x$ e le due ordinate estreme dei punti $A, B$, la chiamiamo l'*area della curva.*

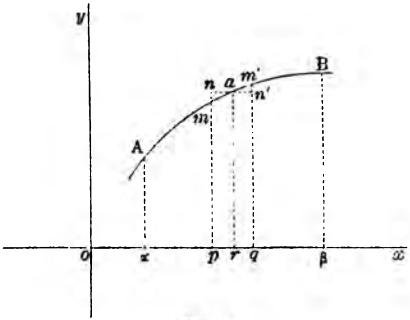


Fig. 1.

È necessario però fissare con più precisione la definizione di area. Perciò dividiamo l'intervallo

$\alpha\,\beta$ in intervalli parziali $\delta_r$, e per ogni punto di divisione meniamo l'ordinata corrispondente.

Uno di tali intervalli sia $p\,q$ di ampiezza $\delta_r$ e le ordinate corrispondenti incontrino la curva nei punti $m$, $m'$.

Scegliamo un punto qualunque $a$ sulla curva, compreso fra $m$ e $m'$ e da esso meniamo la $n\,n'$ parallela ad $x$ e formiamo il rettangolo $n\,n'\,p\,q$ la cui misura è $n\,p\,.\,p\,q$ cioè $f(x)\,\delta_r$ cioè il prodotto di $\delta_r$ per il valore che la funzione $f$ ha nel punto $a$.

Facciamo la somma di tutti i prodotti analoghi e poi facciamo tendere a zero gli intervalli $\delta_r$. Allora per la definizione di integrale definito si ha che il limite di tale somma (se esiste) non è che l'integrale definito da $\alpha$ a $\beta$ della funzione $f(x)$.

Ora $f(x)$ è l'ordinata della curva data, e *noi supporremo che essa sia continua o al più abbia un numero finito di punti di discontinuità.* Ricordando allora che per una funzione continua o avente un numero finito di discontinuità l'integrale definito esiste sempre, si ha che

$$\lim \Sigma\, f(x)\,\delta_r$$

cioè

$$\lim \Sigma\,(n\,n'\,p\,q)$$

*esiste ed è determinato.*

Tale limite lo chiamiamo l'*area della curva.*

In questa maniera veniamo anche a vedere come il calcolo integrale ci dà un mezzo per calcolare l'area; basta cioè calcolare l'integrale definito:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,d\,x$$

o anche:

$$\int_{\alpha}^{\beta} y\,d\,x$$

essendo:

$$y = f\,(x)$$

Se lasciamo indeterminato il limite superiore $\beta = x$ e lasciamo fisso il limite inferiore, il che equivale a lasciar fissa la prima ordinata estrema, e a far variare l' altra, allora per ogni posizione di quest'altra ordinata si ha un valore dell' area, cioè l'area $u$ può considerarsi funzione di $x$.

$$u = \varphi\,(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,d\,x = \int_{\alpha}^{x} y\,d\,y.$$

Essendo la $f$ una funzione continua, noi sappiamo che la derivata della funzione integrale è precisamente la funzione sotto il segno, onde possiamo conchiudere che *la derivata dell'area rispetto ad* x *non è altro che il valore dell'ordinata della curva.*

Per questa analogia che c'è fra il calcolo delle curve piane e gli integrali semplici delle funzioni continue, tali integrali si chiamano anche *quadrature*, giacchè si suol dire *quadrare una curvatura piana* il calcolare la sua area.

Passiamo ad alcuni esempi:

1.° Si abbia una iperbole equilaterale la cui equazione riferita a' suoi assintoti è, come è noto,

$$x\,y = m^2$$

essendo $m^2$ una costante.

Vogliamo calcolare l'area $A\,B\,\alpha\,\beta$ che avrà per equazione:

$$u = \int_{\alpha}^{\beta} y\,d\,x = m^2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\,x}{x}$$

Essendo

$$\int \frac{d\,x}{x} = \log x$$

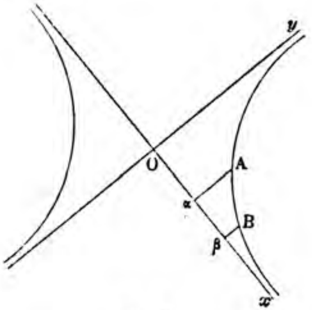


Fig. 2.

si ha

$$u = m^2 (\log \beta - \log \alpha) = m^2 \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ora supponiamo in particolare che la costante $m^2$ sia *1*, e che $A$ sia il vertice dell'iperbole. Allora $\alpha$ (ascissa del punto $A$) sarà *1*, perchè nel vertice dovendo essere $x$, $y$ uguali, e dovendo essere uguale ad *1* il loro prodotto, ciascuno di essi sarà *1*.

Onde resta:

$$u = \log \beta$$

cioè *l'area è misurata dal logaritmo neperiano dell'ascissa* $O\,\beta$.

Per questa ragione i logaritmi neperiani si chiamano anche *iperbolici.*

2.° Si abbia il cerchio:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e si voglia calcolare l'area $S\,O\,P\,Q$.

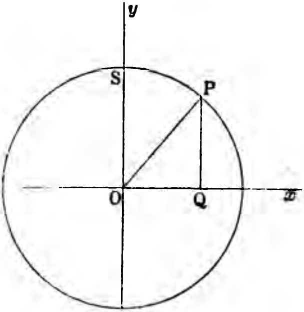


Fig. 3.

Dobbiamo calcolare:

$$\int y\,d\,x = \int \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$$

dove i limiti sono da $x = 0$ sino ad $x = O\,Q$ che lascieremo indeterminato, cioè scriveremo:

$$\int^x \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x.$$

Calcoleremo prima l'integrale indefinito, e poi ponendo in esso una volta per $x$ il valore $x$ e poi per $x$ il valore zero e sottraendo i due risultati avremo l'integrale definito.

Per calcolare l'integrale indefinito usiamo prima la formola d'integrazione per parti e abbiamo

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = x \sqrt{r^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1)$$

E inoltre:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, d\, x =$$

$$= r^2 \int \frac{d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\, d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (2)$$

e sommando (1) con (2) si ha:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = \frac{1}{2}\, x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{x} \text{ arc sen } \frac{x}{r}$$

Poichè per $x = 0$ il secondo membro è zero, così questo risultato rappresenta esattamente anche l'integrale definito da $0$ a $x$.

Si osservi che poichè il triangolo $O P Q$ ha proprio per misura

$$\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}$$

così si ha che l'area del settore circolare $O P S$ è data da:

$$\frac{r^2}{2} \text{ arco sen } \frac{x}{r}.$$

3.° Si voglia ora calcolare l'area di una curva di equazione:

$$y^n = p\,x^m$$

dove $n, m$ sono due numeri razionali qualunque.

Le curve rappresentate da queste equazioni sono dette in generale *parabole*.

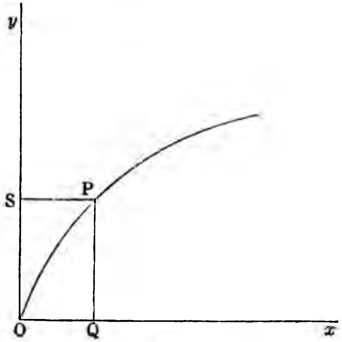

Fig. 4.

Calcoliamo $OPQ$. Si ha:

$$\int_0^x y\,dx = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n}{m+n}\,p^{\frac{1}{n}}\,x^{\frac{m}{n}+1} =$$

$$= \frac{n}{m+n}\,x\,y$$

cioè ricaviamo il risultato, che l'area parabolica $OPQ$ sta all'area del rettangolo $OSPQ = x\,y$ come $n$ sta ad $m + n$.

Quindi se dal rettangolo togliamo l'area parabolica abbiamo

$$\left(1 - \frac{n}{m+n}\right) x\,y = \frac{m}{m+n}\, x\,y$$

$$O\,S\,P = \frac{m}{m+n}\, x\,y$$

e quindi

$$\frac{O\,P\,Q}{O\,S\,P} = \frac{n}{m}$$

cioè la parabola divide il rettangolo $O\,S\,P\,Q$ nel rapporto di $n$ a $m$.

Nel caso della parabola conica $n = 2$, $m = 1$, si torna ad un teorema noto di Geometria analitica.

4.° Consideriamo ora le curve di equazione:

$$x^m\, y^n = p$$

Tali curve si chiamano *iperboli*, e hanno come caso particolare l'iperbole equilaterale ordinaria quando cioè $n = m = 1$.

Supponiamo $n > m$.

Allora si ha:

$$\int_0^x y\,d\,y = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m}\, p^{\frac{1}{n}}\, x^{-\frac{m}{n}+1} =$$

$$= \frac{n}{n-m}\, x\,y$$

Di qui si ricava intanto che l'area compresa fra l' asse di $y$ e l' ordinata $P\,Q$ sebbene si estenda fino all'infinito perchè la curva incontra l'asse di $y$ all'infinito, (l' asse di $y$ è un assintoto della curva) pure tale area ha una ampiezza finita.

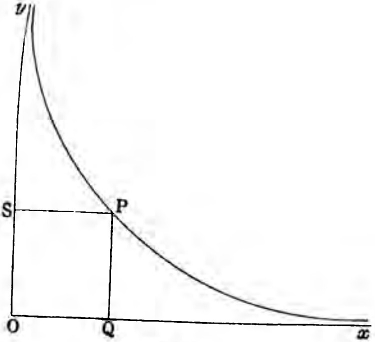


Fig. 5.

Inoltre togliendo da tale area quella del rettangolo $x\,y$ si ha:

$$\text{area}\,(S\,P\infty) = \left(\frac{n}{n-m} - 1\right) x\,y = \frac{m}{n-m}\,x\,y$$

e quindi

$$\frac{O\,Q\,P\infty}{S\,P\infty} = \frac{n}{m}$$

cioè anche qui si ha un teorema analogo a quello del caso precedente.

5.° Si voglia ora l'area dell'ellisse:

$$a^2\,y^2 + b^2\,x^2 = a^2\,b^2.$$

Si deve calcolare

$$\int_0^x y\,d\,x = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x.$$

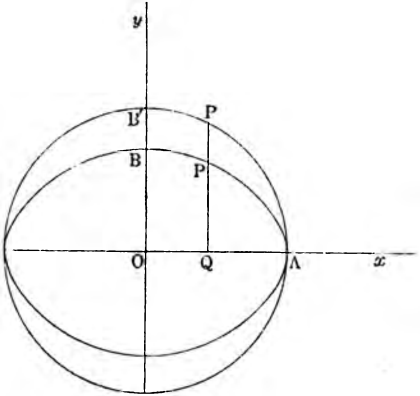


Fig. 6.

Ora l' area corrispondente al cerchio di raggio $O\,A = a$ cioè l'area $O\,B'\,P'\,Q$ non è altro che:

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x$$

dunque

$$\frac{O\,B\,P\,Q}{O\,B'\,P'\,Q} = \frac{b}{a}\,.$$

Quindi per trovare l'area del quarto dell'ellisse non c'è che da trovare l'area del quarto di cerchio che è $\frac{1}{4}\pi a^2$ e moltiplicarla per $\frac{b}{a}$, il che ci dà $\frac{1}{4}\pi a b$. Onde l'ellisse ha per area

$$\pi a b.$$

6.° Passiamo ora a studiare una curva assai interessante che gode di proprietà assai notevoli, la cosiddetta *cicloide.*

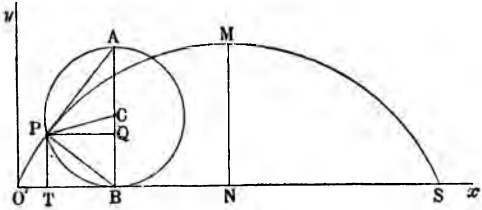


Fig. 7.

Ecco la generazione meccanica di questa curva: Immaginiamo un cerchio che rotola su di una retta fissa.

Uno de' suoi punti $P$ comincia coll' essere il punto di contatto del cerchio colla retta, poi si eleva, e descriverà una curva come $O P M S$, e poi se il cerchio continua a rotolare, descriverà un altro ramo simile, e così all'infinito.

Vogliamo prima di tutto trovare le coordinate di un punto qualunque $P$ della cicloide.

Scegliamo per asse di $x$ la retta su cui rotola il cerchio e per asse di $y$ la retta perpendicolare e passante pel vertice $O$ della cicloide.

Consideriamo la posizione del cerchio corrispondente al punto $P$.

Congiungiamo $P$ con $C$ e chiamiamo $\theta$ l'angolo al centro $PCQ$. Allora:

$$x = OT = OB - TB = OB - PQ.$$

Ora evidentemente la lunghezza rettilinea $OB$ è quanto l'arco circolare $PB$, cioè è uguale a $r\theta$, e inoltre $PQ = r \operatorname{sen} \theta$, chiamando $r$ il raggio del cerchio, onde

$$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

Inoltre

$$y = PT = CB - CQ = r - r \cos \theta$$

cioè

$$y = r(1 - \cos \theta)$$

Se fra queste due relazioni si eliminasse $\theta$ si avrebbe l'equazione della cicloide.

Vogliamo ora prima di tutto dimostrare una proprietà fondamentale della tangente alla cicloide.

Se meniamo il diametro verticale $AB$, e congiungiamo $P$ col punto più alto $A$, o col punto più basso $B$; abbiamo rispettivamente la tangente o la normale alla cicloide nel punto $P$.

Per questo basta far vedere che l'angolo che $PA$ forma con $x$ è lo stesso dell'angolo che la tangente deve formare con $x$.

Essendo evidentemente $\frac{1}{2}\theta$ l'angolo $PAC$ si ha in primo luogo che l'angolo di $PA$ con $x$ è il complemento di $\frac{1}{2}\theta$.

D'altra parte la tangente dell'angolo che la tangente geometrica in $P$ fa con $x$, è data da $\frac{dy}{dx}$.

Poichè nel nostro caso $x, y$ sono espresse in funzione del parametro $\theta$, per calcolare $\frac{dy}{dx}$, calcoliamo il rapporto delle derivate:

$$\frac{dy}{d\theta} \quad , \quad \frac{dx}{d\theta}.$$

Ora

$$\frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen} \theta = 2 r \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) = 2 r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \frac{1}{2} \theta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta} = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}$$

cioè l'angolo della tangente con $x$ è proprio il complemento di $\frac{1}{2}\theta$, e quindi la tangente geometrica coincide con la retta $PA$. Si ricava allora anche che $PB$ è normale.

Passiamo ora a calcolare l'*area della cicloide*.

Perciò facciamo un mistamento di assi trasportandoli parallelamente a se stessi in $Bx, By$.

Allora la nuova $x$ sarà uguale all' antica $x$ diminuita di $OA = \pi r$, e la nuova $y$ sarà uguale a $2r$ diminuito dell'antica $y$, cioè si ha:

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) - \pi r$$

$$y = 2r - 2r\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$$

$$= 2r\cos^2\frac{1}{2}\theta$$

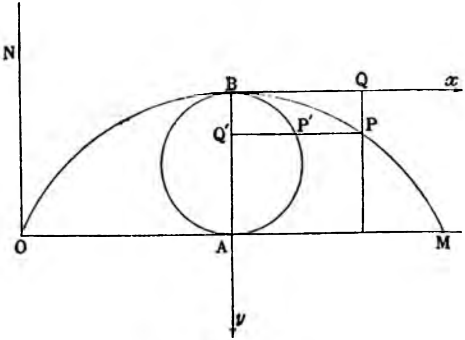


Fig. 8.

da cui

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) = 2r\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}.$$

L'area $BPQ$ è data da

$$BPQ = \int_0^x y\,dx.$$

Se costruissimo per $y$ e $dx$ i loro valori prendendo per variabile indipendente $\theta$, allora si avrebbe da integrare una funzione trascendente; invece possiamo far vedere che si ha da integrare una funzione algebrica purchè si prenda per variabile indipendente la $y$.

Allora la funzione da integrare è

$$y\frac{dx}{dy}$$

cioè si ha (poichè per $x = 0$ si ha anche $y = 0$):

$$BPQ = -\int_0^y \sqrt{2ry - y^2}\,dy.$$

Ora se volessimo calcolare l'area $BQ'P'$ racchiusa dal cerchio generatore della cicloide si otterrebbe esattamente la stessa formola, quindi possiamo concludere che

$$BP'Q' = BQP$$

Onde tutta l'area $BAM$ sarà uguale al rettangolo di $BA$ e $AM$ diminuito dell' area del semicerchio $BP'A$ cioè

$$BAM = 2r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\pi = \frac{3}{2}r^2\pi$$

e quindi tutta l' **area** della cicloide è $3\pi r^2$, cioè tre volte l'area del cerchio generatore.

§ 2. **Arco di curva piana.** — Immaginiamo una curva continua e la cui tangente fra i punti $A, B$ si muova con continuità o anche abbia un numero

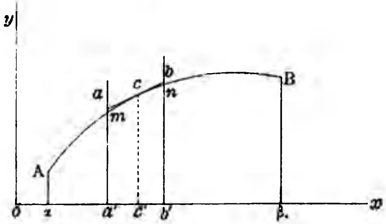


Fig. 9.

*finito* di punti di discontinuità. Allora chiameremo *arco* della curva fra i punti $A, B$, la lunghezza di un filo flessibile che si adagi esattamente lungo la curva e termini nei due punti $A, B$.

Occorre però dare una definizione più esatta dell'arco di curva.

Immaginiamo l'intervallo da $\alpha$ a $\beta$ diviso in tanti intervalli parziali $\delta_r$ e sia $a'b'$ uno di tali intervalli.

Meniamo dai punti di divisione le diverse ordinate, cioè le parallele all'asse di $y$. Queste incontreranno la curva in altrettanti punti come $m$, $n$. Scegliamo sulla curva un punto intermedio fra i due punti $m, n$ e sia $c$ e meniamo in esso la tangente alla curva, e limitiamola fra le due ordinate.

Ripetendo questa operazione per tutti gli intervalli $\delta_r$, e facendo la somma di tutti i tratti rettilinei come $a\,b$, il limite di tal somma, quando gli intervalli $\delta_r$ tendono a zero e il loro numero cresce all'infinito, lo chiameremo l'*arco della curva fra* A *e* B.

Dobbiamo far vedere che, per le condizioni poste riguardo alla natura della tangente della curva, il limite, di cui si parla, effettivamente esiste.

Prima di tutto cerchiamo di trovare la espressione analitica dell'arco.

Il lato $a\,b$ è uguale alla sua proiezione $a'\,b'$ divisa per il coseno dell'angolo che $a\,b$ fa coll'asse $x$, cioè:

$$a\,b = \frac{a'\,b'}{\cos\theta}$$

Ora

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$$

onde:

$$a\,b = a'\,b'\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\theta}.$$

Essendo la retta $a\,b$ tangente alla curva nel punto $c$, si ha

$$\mathrm{tang}\,\theta = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_c$$

intendendo con $\left(\frac{dy}{dx}\right)_c$ la derivata calcolata pel punto $c$, che è un punto di ascissa intermedia fra i due punti $a$, $b$.

Ponendo poi $a' b' = \delta_r$ si ha che la definizione dell'arco è espressa dalla formola:

$$s = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, \delta_r$$

Dove la somma bisogna estenderla a tutti gli intervalli $\delta_r$ da $\alpha$ a $\beta$, e il valore della funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

bisogna prenderlo ogni volta per un certo punto la cui ascissa è compresa nell'intervallo $\delta_r$.

Si vede dunque che $s$ resta definito precisamente mediante l'integrale corrispondente alla funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

cioè

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Poichè per ipotesi la tangente della curva si muove anche con continuità o al più ha un numero finito di discontinuità, così la funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sarà una funzione continua di $x$ o al più con un numero finito di discontinuità, e quindi $s$ è l'integrale di una funzione continua o generalmente continua, e perciò *esisterà sempre.*

Considerando fissa l'ascissa $\alpha$ e variabile l'altra ascissa $\beta$, e ponendo $x$ per $\beta$, si ha che l'arco $s$ è una funzione di $x$ e la sua derivata rispetto ad $x$ è:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde:

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

Resta così risoluto il problema del calcolo dell'*arco* di una curva. Questo problema si suol chiamare quello della *rettificazione delle curve*, come il problema dell'area si suol chiamare il problema delle *quadrature.*

Immaginiamo un arco e la sua corda rettilinea. Lasciando fisso uno degli estremi $A$ e facendo avvicinare l'altro estremo ad $A$, l'arco e la corda diminuiscono indefinitamente. Si può dimostrare che il limite del loro rapporto è l'unità, proprietà di cui già ci siamo serviti nel calcolo differenziale.

Infatti si può dimostrare che la corda contata dal punto fisso $A$ considerata come funzione dell'ascissa ha la stessa derivata di $s$ nel punto $A$:

Poichè chiamando $\Delta x$, $\Delta y$ le differenze fra le coordinate corrispondenti dei due estremi della corda si ha:

$$c=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1\quad\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

donde:

$$\frac{c}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

e facendo convergere $\Delta x$ a zero tenderanno a zero anche $\Delta y$ e $c$, e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{c}{\Delta x}$ tenderanno ai valori delle derivate delle funzioni $y$ e $c$ rispetto ad $x$ dunque la derivata di $c$ rispetto ad $x$ è:

$$\frac{dc}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

e quindi

$$\frac{ds}{dc} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dc}{dx}} = 1.$$

La formola data sopra per il differenziale dell'arco di una curva piana vale nel caso delle coordinate rettangolari. Nel caso delle coordinate oblique formanti fra loro l'angolo $\varphi$ si può trovare una formola analoga.

Infatti col medesimo procedimento possiamo trovare che allora la derivata di $s$ rispetto ad $x$ è:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx}\cos\varphi}$$

e quindi:

$$d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + 2\,d\,x\,d\,y \cos \varphi}.$$

Passiamo al caso delle coordinate polari.

Siano $\rho, \theta$ le coordinate polari di $M$. Noi possiamo ricavare la formola per il differenziale dell' arco trasformando in coordinate polari quella ottenuta avanti in coordinate rettangolari.

Le coordinate $x, y$ si esprimono mediante $\rho, \theta$ colle formole:

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

donde:

$$d\,x = -\rho \operatorname{sen} \theta\, d\,\theta + \cos \theta\, d\,\rho$$
$$d\,y = \rho \cos \theta\, d\,\theta + \operatorname{sen} \theta\, d\,\rho$$

e quadrando e sommando

$$d\,x^2 + d\,y^2 = \rho^2\, d\,\theta^2 + d\,\rho^2$$

onde

$$d\,s = \sqrt{\rho^2\, d\,\theta^2 + d\,\rho^2}\,.$$

Mediante il differenziale $d\,s$ possiamo esprimere in modo assai semplice i coseni e seni di direzione della tangente alla curva.

Infatti se $\theta$ è l'angolo che la tangente fa coll'asse $x$, si ha:

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{d\,y}{d\,x}$$

onde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d\,y}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}} = \frac{d\,y}{d\,s}$$

$$\cos\theta = \frac{d\,x}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}} = \frac{d\,x}{d\,s}.$$

Abbiamo detto avanti che l'arco può considerarsi come una funzione dell'ascissa $x$. Viceversa dato l'arco (contato da una origine fissa) è determinato il punto della curva che è l'altro estremo dell'arco, e quindi sono unicamente determinate le $x, y$. Onde le due coordinate $x, y$ possono considerarsi come funzioni dell'arco $s$ che potrà dunque assumersi come variabile indipendente.

Allora l'equazione della curva potrà sempre immaginarsi sotto la forma:

$$x = \varphi(s)$$
$$y = \psi(s)$$

salvo poi a determinare nei singoli casi la forma esplicita delle due funzioni $\varphi$, $\psi$.

Dalle formole superiori risulta allora che le derivate di $x$, $y$ rispetto ad $s$ non sono altro che i coseni e i seni di direzione della tangente alla curva.

Dalla formola:

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2$$

prendendo $s$ per variabile indipendente e differenziando un'altra volta, e osservando che il secondo differenziale di $s$ deve ritenersi zero, si ha la formola:

$$0 = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}$$

che sussiste quando $x, y$ si considerano funzioni della variabile indipendente $s$.

Passiamo a qualche esempio:

1.° Vogliamo trovare l'espressione dell'arco di cerchio di raggio $r$.

L'equazione del cerchio sia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Allora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

onde

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Integrando si ha:

$$s = r \text{ arco cos } \frac{x}{r} + C$$

Se vogliamo cominciare a contare l'arco dal punto ($y = 0$, $x = r$) cioè dall'estremo a destra del cerchio, allora si ha che per $x = r$ la $s$ deve essere zero, e quindi $C = 0$, onde resta solo

$$s = r \text{ arco cos } \frac{x}{r}$$

che è la nota espressione dell'arco di cerchio.

2.° Si voglia calcolare l'arco della spirale logaritmica la cui equazione in coordinate polari è

$$\rho = e^{\theta}$$

Si ha

$$d\,\rho = e^{\theta}\,d\,\theta$$

onde:

$$d\,s = \sqrt{e^{2\theta}\,d\,\theta^2 + e^{2\theta}\,d\,\theta^2} = \sqrt{2}\,e^{\theta}\,d\,\theta$$

$$\frac{d\,s}{d\,\theta} = \sqrt{2}\,e^{\theta}$$

Integrando si ha:

$$s = \sqrt{2}\,e^{\theta} + C = \sqrt{2}\,\rho + C.$$

Per determinare $C$ osserviamo che volendo incominciare a contare l'arco $s$ dal punto corrispondente a $\rho = 1$ e $\theta = 0$ (cioè per tali valori di $\rho$ e $\theta$ ponendo $s = 0$), la costante $C$ acquista il valore $-\sqrt{2}$, onde infine:

$$s = \sqrt{2}\,(\rho - 1) = \sqrt{2}\,(e^{\theta} - 1).$$

3.° Si voglia rettificare la parabola di equazione:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Si ha

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \sqrt{\frac{p}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}} \quad , \qquad \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{y}{p}$$

onde

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, d\, x$$

Ora ci conviene trasformare questo integrale in modo che la variabile indipendente sia $y$. Si ha:

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, d\, y$$

e volendo cominciare a calcolare gli archi dal vertice della parabola dobbiamo estendere l'integrazione da $y = 0$ sino ad $y$.

Per calcolare questo integrale facciamo prima l'integrazione per parti e abbiamo:

$$s = \frac{1}{p} y \sqrt{y^2 + p^2} - \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, d\, y}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Ma d'altra parte

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, d\, y = p \int \frac{d\, y}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, d\, y}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

onde infine si ha

$$s = \frac{1}{2p} y \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int \frac{d\, y}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Resta quindi a calcolare quest'ultimo integrale. Ora nel Cap. III, § 4 abbiamo in generale calcolato l'integrale:

$$\int \frac{d\, y}{\sqrt{a + 2\, b\, y + c\, y^2}}$$

di cui il nostro non è che un caso particolare, onde applicando la formola trovata si ha:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = \log\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) - \log p$$

come del resto è facile verificare.

L'arco della parabola risulta così dato da

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

4.° Si voglia calcolare la lunghezza dell'arco dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le coordinate di un punto dell' ellisse si possono esprimere in funzione di un parametro nel seguente modo:

$$x = a \operatorname{sen} \varphi$$
$$y = b \cos \varphi$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi$$

e quindi prendendo per variabile indipendente $\varphi$:

$$s = \int \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\; d\varphi$$

e in quanto ai limiti dell'integrale noi porremo i limiti da $x=0$ sino a $x$ qualunque, ciò che dà rispetto a $\varphi$ i limiti da $\varphi=0$ sino a $\varphi$ qualunque.

Ora qualunque artificio potessimo usare per calcolare questo integrale si può mostrare che non possiamo mai riuscirci coi mezzi ordinari, cioè tale integrale non è esprimibile sotto forma finita mediante le ordinarie funzioni che conosciamo, le razionali e le irrazionali algebriche, le logaritmiche, le trigonometriche e le esponenziali.

A tali integrali noi abbiamo accennato nel Capitolo III, § 4. Essi sono chiamati integrali ellittici appunto perchè, come si vede, servono alla rettificazione dell'ellisse.

Per il calcolo di essi si potrà ricorrere all'integrazione per serie. Vedi perciò il § 2 del Capitolo III.

5.° Si voglia la lunghezza dell'arco della cicloide.

Assumiamo gli stessi assi coordinati che nel paragrafo precedente. Abbiamo trovato che

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}$$

onde prendendo $y$ per variabile indipendente si ha:

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\frac{2r-y}{y}}\,dy=\int_0^y\sqrt{\frac{2r}{y}}\,dy$$

onde

$$s=2\sqrt{2r}\sqrt{y}.$$

Dunque la lunghezza dell'arco $B\,P$ (ved. fig. nel § 1) è uguale al doppio della retta $B\,P'$ la cui lunghezza è esattamente $\sqrt{2\,r\,y}$.

Per $y = 2\,r$ si ha $s = 4\,r$, che la lunghezza della mezza cicloide, esprimerà.

§ 3. **Arco di una curva storta.** — Immaginiamo il segmento di curva storta $A\,B$, a tangente continua. Le ascisse dei punti estremi sieno $\alpha$, $\beta$, e dividiamo il segmento rettilineo $\alpha\,\beta$ in un certo numero di segmenti parziali, come $a''\,b'' = \delta_r$.

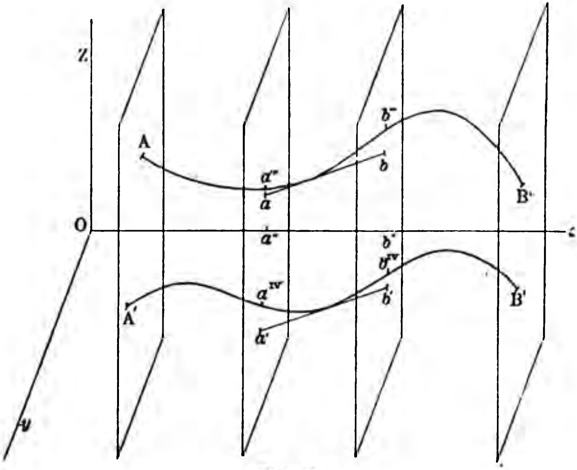


Fig. 10.

Per questi punti di divisione meniamo i piani perpendicolari all'asse $x$ come $aa''$, $bb''$, ... Questi piani taglieranno la curva in punti $a'''$, $b'''$, ... intermedi fra i punti $A\,B$.

Meniamo la tangente alla curva in un punto $c$ intermedio fra $a''' b'''$, e arrestiamo questa tangente fra i due piani paralleli; abbiamo così il segmento rettilineo $a\,b$. Operando nello stesso modo per tutte le altre zone, si ha un assieme di segmenti come $a\,b$, ed evidentemente tali segmenti tendono a zero quando i segmenti $a'' b'' = \delta_r$ tendono a zero.

Ora il limite della somma di tutti i segmenti come $a\,b$, quando gli intervalli $\delta_r$ tendono a zero mentre il loro numero aumenta indefinitamente, è ciò che diciamo *arco di curva fra* A *e* B. Dobbiamo far vedere che tale limite esiste, e ciò lo otteniamo al solito mostrando che esso è esprimibile mediante un integrale di una funzione continua, o generalmente continua.

Troviamo l'espressione di $a\,b$.

Chiamiamo $\xi, \eta, \zeta$ gli angoli che la tangente $a\,b$ fa con gli assi coordinati; evidentemente

$$a\,b = \frac{\delta_r}{\cos \xi}.$$

Ma

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$$

donde

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi}}$$

dunque

$$a\,b = \delta_r \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}}.$$

Ora possiamo mostrare che

$$\frac{\cos \eta}{\cos \xi}, \qquad \frac{\cos \zeta}{\cos \xi}$$

si esprimono mediante le derivate di $y$ e $z$ rispetto ad $x$.

Infatti sul piano $x\,y$ la curva storta si proietta in una curva piana $A'\,B'$, e la tangente $a\,b$ si proietta nella tangente $a'\,b'$ alla curva piana.

Chiamando $\delta_{r'}, \varepsilon_{r'}$ le proiezioni di $a\,b$ sugli assi $x$ e $y$, si ha che $\delta_{r'}, \varepsilon_{r'}$ sono anche le proiezioni di $a'\,b'$ sugli stessi assi.

Si hanno quindi le formole:

$$\cos \xi = \frac{\delta_{r'}}{a\,b}$$

$$\cos \eta = \frac{\varepsilon_{r'}}{a\,b}$$

e chiamando $\xi', \eta'$ gli angoli di $a'\,b'$ cogli assi $x\,y$ si hanno analogamente le altre due:

$$\cos \xi' = \frac{\delta_r}{a'\,b'}$$

$$\cos \eta' = \frac{\varepsilon_{r'}}{a'\,b'}$$

donde

$$\frac{\cos \eta'}{\cos \xi'} = \frac{\varepsilon_r}{\delta_r} = \frac{\cos \eta}{\cos \xi}.$$

Ma $\frac{\cos \eta'}{\cos \xi'}$, essendo gli assi di $x$ e $y$ ortogonali, è la tangente dell'angolo $\xi'$ che $a' b'$ fa con $x$, la qual tangente è anche espressa da $\frac{d y}{d x}$ (essendo $a' b'$ tangente alla curva piana) dunque:

$$\frac{\cos \eta}{\cos \xi} = \frac{d y}{d x}$$

intendendo che questa derivata bisogna naturalmente calcolarla pel punto di contatto di $a b$.

Analogamente si può trovare che

$$\frac{\cos \zeta}{\cos \xi} = \frac{d z}{d x}$$

dunque

$$a b = \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2}$$

e quindi, chiamando $s$ l'arco $A B$, si ha per definizione:

$$s = \lim \sum_{\alpha}^{\beta} \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2}.$$

Questa formola ci dice che $s$ si esprime mediante un integrale, e propriamente

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2}\, d x.$$

Avendo supposto che il segmento di curva $A B$ abbia la tangente continua o generalmente continua si ha che $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ che dipendono appunto dalla direzione della tangente, sono funzioni continue, o generalmente continue e quindi l'integrale *s esiste sempre.*

Inoltre la derivata di $s$ rispetto ad $x$ (supposto il limite superiore $\beta$ variabile, e posto $x$ in luogo di $\beta$) sarà in generale proprio la funzione sotto il segno di integrale, cioè

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

donde ricaviamo pel differenziale di $s$ la formola:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Anche qui si potrebbe dimostrare, come nel caso delle curve piane, che il limite del rapporto della corda all'arco tende ad *1*.

Ci è utile fare un'altra osservazione.

Noi abbiamo trovato avanti che:

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

essendo $\xi$ l'angolo che la tangente alla curva fa con l'asse di $x$.

Di qui si ha:

$$\cos \xi = \frac{dx}{ds}.$$

Analogamente

$$\cos \eta = \frac{d\,y}{d\,s}$$

$$\cos \zeta = \frac{d\,z}{d\,s}\,.$$

Mediante dunque il differenziale $d\,s$ noi possiamo esprimere i coseni di direzione della tangente: ciò è analogo al caso delle curve piane.

Passiamo ad un esempio:

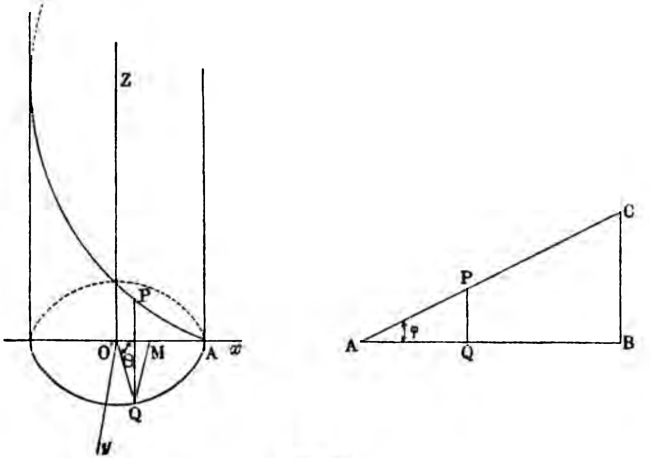


Fig. 11.

Immaginiamo un triangolo rettangolo $A\,B\,C$ e un cilindro retto a base circolare, e avvolgiamo il foglio del triangolo attorno al cilindro in modo che la base venga a coincidere con la circonferenza della base del cilindro. Allora l'ipotenusa $AC$ segnerà sulla superficie del cilindro una curva storta che si chiama *elica.*

Troviamo le coordinate di un punto $P$ dell'elica. Scegliamo per assi di $x, y$ due rette sul piano della base, fra loro perpendicolari e passanti pel punto $O$, e per asse $z$ l'asse del cilindro.

Le coordinate di $P$ saranno

$$x = OM \quad y = MQ \quad z = QP$$

Evidentemente spiegando il cilindro, il triangolo curvilineo $AQP$ diventa il triangolo rettangolo $AQP$ coll'angolo costante $\varphi$; cioè:

$$PQ = \text{arco } AQ \text{ tang } \varphi = r \,.\, \theta \,.\, \text{tang } \varphi$$

E inoltre

$$MQ = r \operatorname{sen} \theta \quad , \quad OM = r \cos \theta$$

chiamando $r$ il raggio del cerchio base.

Così sono trovate le coordinate di un punto dell'elica, cioè:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$
$$z = \text{tang } \varphi \,.\, r \,.\, \theta$$

Di qui si ha che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}-=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}$$

e quindi:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{tang}^2\varphi}=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Onde essendo

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

si ha:

$$s=-\int_\alpha^\beta r\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}\,d\theta=-r\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}+\text{Cost.}$$

Ora volendo cominciare a contare gli archi $s$ dal punto $A$, si ha che $s=0$ per $\theta=0$ e quindi

$$\text{Cost.}=0$$

e resta quindi

$$s=-r\theta\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}$$

Ed essendo

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$r\,\theta = A\,Q$$

si vede che, a meno del segno

$$s = \frac{A\,Q}{\cos \varphi}$$

come risulterebbe immediatamente dalla considerazione del triangolo rettangolo $A\,P\,Q$, essendo $s$ non altro che la lunghezza dell'ipotenusa $A\,P$.

§ 4. **Area delle superficie.** — Immaginiamo una superficie di equazione $z = \varphi(x\,y)$ e limitata da una linea chiusa ad un sol contorno $l$ la quale si proietti sul piano $x\,y$ in una linea chiusa ad un sol ramo.

Vogliamo definire che cosa s'intende per area della superficie limitata dalla linea chiusa. Supporremo che la porzione di superficie sia tale che una retta parallela a $z$ non la incontri che in un punto solo.

Facciamo nel piano $x\,y$ il rettangolo coi lati paralleli agli assi $x, y$ e circoscritto alla linea chiusa proiezione di quella che limita la superficie.

Dividiamo uno dei lati di questo rettangolo in intervalli parziali $\delta_r$ e l' altro in intervalli $\delta'_s$, e meniamo le parallele agli assi pei punti di divisione. Allora tutto il rettangolo $A\,B\,C\,D$ verrà diviso in tanti altri rettangoli $a\,b\,c\,d$ di cui alcuni resteranno compresi dentro la curva chiusa, altri resteranno in parte dentro e in parte fuori, altri totalmente fuori.

Consideriamo solo quelli che sono totalmente dentro alla curva chiusa, e eleviamo su di essi, presi per basi, altrettanti parallelepipedi retti,

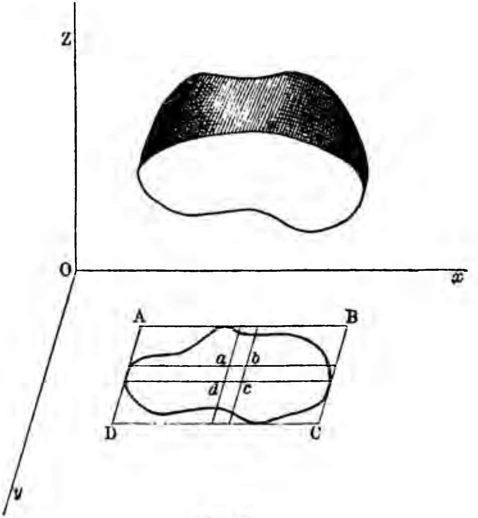


Fig. 12.

i quali andranno a spezzare la superficie in altrettante parti; prendiamo un punto sulla superficie interno a ciascuna di queste parti, e per esso meniamo il piano tangente alla superficie, del quale consideriamo solo quel quadrilatero che su di esso resterà determinato dal parallelepipedo corrispondente.

Il limite della somma di tutti questi quadrilateri quando gli intervalli $\delta_r$, $\delta_s$ diminuiscono indefinitamente, mentre il loro numero aumenta, è ciò che diciamo l'*area della superficie.*

Ciascuno di tali quadrilateri è uguale alla sua proiezione, cioè al rettangolo $\delta_r \delta'_s$, diviso pel coseno dell'angolo che il piano tangente fa col piano di $x\,y$ o, ciò che è lo stesso, per il coseno dell'angolo che la perpendicolare al piano tangente fa coll'asse $z$.

Chiamiamo $\xi, \eta, \zeta$ gli angoli di direzione della perpendicolare al piano tangente, e allora uno dei quadrilateri sarà:

$$q = \frac{\delta_r \delta'_s}{\cos \zeta}$$

ed essendo:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$$

si ha:

$$\frac{1}{\cos \zeta} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}$$

onde:

$$q = \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}.$$

Ora cercheremo di trasformare il radicale.

Per il punto di contatto del piano tangente meniamo il piano parallelo al piano $x\,z$, il quale taglierà la superficie lungo una curva $c$; e il piano tangente lungo la tangente $t$ a tale curva; l'equazione di tale curva $c$ sarà la stessa equazione della superficie quando si consideri $y$ costante, (uguale cioè alla distanza del piano della linea dal piano $x\,z$). Sieno $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ gli angoli di direzione della tangente $t$ alla curva $c$; allora evidentemente, poichè tale retta $t$ sta in un piano perpendicolare all'asse $y$, si ha $\cos\beta'=0$, e inoltre $\alpha'$ e $\gamma'$ fra loro complementari.

La perpendicolare al piano tangente sarà perpendicolare alla retta $t$, e quindi fra i coseni di direzione sussiste la relazione:

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0$$

la quale diventa

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0$$

donde:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\,.$$

Ma

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\cos\alpha'} = \operatorname{tang}\alpha'$$

e inoltre

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\partial z}{\partial x}$$

dunque

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Analogamente si troverebbe

$$\frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{d\,z}{d\,y}$$

onde infine

$$q = \delta_r\,\delta_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial\,y}\right)^2}$$

e quindi la superficie di $S$ resterà definita dalla formola:

$$S = \lim \sum_r \sum_s \delta_r\,\delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,y}\right)^2}$$

Per la definizione che abbiamo dato di integrale doppio, si vede di quì che

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,y}\right)^2}\, d\,x\, d\,y.$$

In quanto ai limiti d'integrazione non c'è che ripetere le stesse considerazioni fatte a suo tempo a proposito degli integrali doppi.

Poichè noi supponiamo che la superficie sia continua e il piano tangente in tutta la porzione di superficie che si considera si muova con continuità, così la funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,y}\right)^2}$$

sarà una funzione continua di $x\,y$. Onde l'integrale doppio esisterà sempre.

Resta così al solito non solo dimostrata l'esistenza del limite del sommatorio, cioè dell'area della superficie giusta la definizione da noi data, ma anche trovata la formola colla quale la si può calcolare.

§ 5. **Superficie di rotazione.** — Nel caso delle superficie di rotazione possiamo facilmente ridurci ad un integrale semplice potendo in quel caso eseguire una delle due integrazioni

Immaginiamo sul piano $z\,x$ la curva di equazione

$$z = \varphi(x')$$

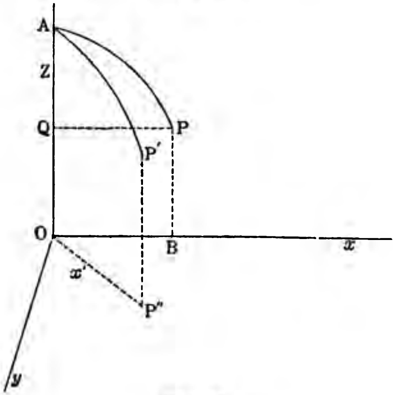


Fig. 13.

che rotando intorno all'asse $z$ genera la superficie di rotazione.

Nella rotazione il punto $P$ serberà distanza costante dall'asse $z$ (tale distanza sarà sempre $x'$) e altezza costante sul piano $z\,y$, per modo che la $z$ del punto $P$ in una posizione qualunque sarà sempre la stessa $z$ del punto $P$ del piano $x\,z$.

Inoltre la $x'$ sarà in ogni posizione di $P$ la radice di $x^2 + y^2$ se con $x$, $y$ indichiamo le coordinate di $P$ nello spazio.

Per avere dunque l'equazione della superficie basta porre nell'equazione della curva $x' = \sqrt{x^2+y^2}$, onde l'equazione della superficie è

$$z = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Le derivate parziali di $z$ rispetto ad $x$ e $y$ sono

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donde

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \varphi'^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

La superficie diventa adunque:

$$S = \int\!\!\int \sqrt{1 + \varphi'^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\, d\,x\, d\,y.$$

Immaginiamo che il ramo di curva piana che rota intorno a $z$ sia $A\,B$ e l'ascissa di $B$ sia $x' = r$. Allora il contorno della superficie sarà il cerchio descritto da $B$, il quale si proietterà sul piano $x\,y$ in un cerchio eguale di raggio $r$.

Dovendo estendere l'integrazione in modo che $x, y$ percorrano tutto il quarto di cerchio compreso fra gli assi $x\,y$ dobbiamo fare l'integrazione rispetto ad $y$ da $y = 0$ fino a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e l'integrazione rispetto ad $x$ da $x = 0$ sino ad $x = r$.

Facciamo ora un cambiamento di variabili nell'integrale rispetto ad $y$, ponendo la variabile $x'$ in luogo della variabile $y$, cioè ponendo:

$$x^2 + y^2 = x'^2.$$

Allora la funzione da integrare diventa $\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}$ e per trasformare l'integrale bisognerà moltiplicare tale funzione per la derivata dell'antica variabile $y$ rispetto alla nuova $x'$, cioè per:

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{x'}{y} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}.$$

Onde l'integrale diventa:

$$\int x' \sqrt{1 + \varphi'^2(x')}\, dx' \int \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}}$$

e queste due integrazioni bisogna estenderle in maniera da comprendere tutti i punti del quarto di cerchio di raggio $r$.

La integrazione rispetto ad $x$ la estendiamo da $x = 0$ sino ad $x = x'$, e quella rispetto ad $x'$ la estendiamo da $x' = 0$ sino ad $x' = r$.

Ora

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}} = \left[\text{arco sen}\ \frac{x}{x'}\right]_0^{x'} = \frac{\pi}{2}$$

onde il doppio integrale è eguale all'integrale semplice:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^r x'\sqrt{1+\varphi'^2(x')}\,d\,x'.$$

Se vogliamo tutta la superficie di rotazione intorno $A$ è chiaro che basta moltiplicare per 4 questo risultato, e quindi si ha infine

$$S=2\pi\int_0^r x'\sqrt{1+\varphi'^2(x')}\,d\,x'.$$

Si vede dunque che nel caso della superficie di rotazione l'integrale doppio si può ridurre ad un integrale semplice.

Si può far vedere che $\sqrt{1+\varphi'^2(x')}$ non è altro che l'inverso del coseno dell'angolo che la tangente alla curva generatrice forma coll'asse di $x$.

Giacchè la tangente di tale angolo è evidentemente:

$$\frac{d\,z}{d\,x'}=\varphi'(x')$$

e

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

onde

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(x')}}.$$

§ 6. **Zona sferica.** — Vogliamo trovare la superficie di una zona sferica compresa fra un piano tangente alla sfera in un punto $A$ e un piano parallelo.

La curva generatrice sul piano $z\,x$ in questo caso è un quarto di circonferenza di raggio $R$, se $R$ è il raggio della sfera. Sia $B$ il punto in cui questa circonferenza è tagliata dal dato piano parallelo al piano tangente, e $A'$ il punto in cui il medesimo piano taglia l'asse $z$.

Poniamo $B\,A' = r$ e applichiamo la formola precedente dove $\varphi$ sia la funzione

$$z = \varphi(x') = \sqrt{R^2 - x'^2}$$

e quindi

$$\varphi'(x') = -\frac{x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}$$

$$\sqrt{1 + \varphi'^2(x')} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Abbiamo allora

$$\int_o^r \frac{R\,x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}\,d\,x' = \Big[-R\sqrt{R^2 - x'^2}\Big]_o^r =$$

$$= -R\sqrt{R^2 - r^2} + R^2.$$

L'area della zona è dunque:

$$2\,\pi\,R\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right).$$

Volendo tutto l'emisfero poniamo in questa formola $x = R$ e si ha $2\pi R^2$, come si sa dalla geometria elementare.

§ 7. **Superficie dell'ellissoide di rotazione.** — Consideriamo nel piano $x z$ l'ellisse $A B$ che roti intorno all'asse maggiore $a$.

Sia la sua equazione

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1.$$

Si ha:

$$\sqrt{1+\varphi'^2(x')} = \sqrt{1+\left[\frac{dz}{dx'}\right]^2} = \frac{1}{b^2 z}\sqrt{b^4 z^2 + a^4 x'^2} =$$

$$= \frac{1}{b z}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}$$

o, introducendo l'eccentricità dell'ellisse, cioè:

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

si ha:

$$\sqrt{1+\varphi'^2(x')} = \frac{a}{b z}\sqrt{a^2 - e^2 z^2}$$

e quindi

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a}\,\frac{x'}{z}\sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, d z.$$

Facciamo un cangiamento di variabile indipendente, cioè prendiamo per variabile indipendente la $z$ in luogo della $x'$; allora dobbiamo moltiplicare la funzione da integrare per $\dfrac{d x'}{d z} = -\dfrac{b^2 z}{a^2 x'}$, onde si ha, a meno del segno:

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz.$$

Ora noi sappiamo già che:

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{t}{2}\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \text{arco sen } t$$

onde:

$$\int \sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{e} \text{arco sen } \frac{e}{a} z$$

e perciò fra i limiti $0$ e $z$ si ha:

$$S = \pi \frac{b}{a}\left[z\sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{e} \text{arco sen } \frac{e}{a} z\right]$$

Per $z = a$ si ha la superficie del mezzo ellissoide, cioè:

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e} \text{arco sen } e.$$

Per $e = o$ e quindi:

$$a = b = R$$

si ha

$$2\pi R^2$$

che è la superficie della semisfera.

§ 8. **Volumi racchiusi da superficie.** — Una considerazione analoga a quella che si fa per le aree delle curve piane si può fare per i volumi delle superficie. E noi procederemo in questa ricerca in un modo analogo a quello tenuto per le aree.

Immaginiamo una porzione di superficie a contorno chiuso, il qual contorno si proietti in una curva chiusa sul piano $xy$, e la superficie al solito sia tale che una retta parallela all'asse $z$ non la incontri in più di un punto solo.

Immaginiamo precisamente come nei paragrafi precedenti divisa l'area di questa curva chiusa in rettangoli parziali $\delta_r\, \delta'_s$; e formiamo i parallelepipedi retti aventi per basi tali rettangoli. Questi parallelepipedi andranno a tagliare sulla superficie altrettante porzioni di superficie, in ciascuna delle quali prendiamo un punto e per esso conduciamo il piano parallelo al piano $xy$. Con questo piano si verrà a chiudere il parallelepipedo, di cui esso verrà a formare la base superiore. Allora il limite della somma di tutti questi parallelepipedi è ciò che diciamo il *volume compreso fra la superficie ed il piano* x y.

Se l'equazione della superficie è $z = f(xy)$ è chiaro che ciascuno dei parallelepipedi sarà misurato da:

$$\delta_r \cdot \delta'_s\, f(xy)$$

dove il valore di $f(xy)$ è calcolato per un punto $xy$ che si trova interno al rettangolo $\delta_r\, \delta'_s$.

Quindi il volume richiesto è:

$$V = \lim \Sigma\, \delta_r\, \delta'_s\, f(xy)$$

cioè

$$V = \int\int f(xy)\, dx\, dy.$$

Immaginiamo ora una superficie chiusa e vediamo come possiamo calcolare la porzione dello spazio da essa racchiusa.

Basterà applicare due volte il metodo precedente nella seguente maniera:

Conduciamo il cilindro retto con le generatrici parallele all'asse $z$ e circoscritto alla superficie chiusa. Tale cilindro toccherà la superficie data lungo una linea storta che effettuerà la separazione della superficie in due parti, una parte superiore e l'altra inferiore. Se calcoliamo i due volumi compresi fra quelle due parti ed il piano $xy$ e sottraghiamo l'uno dall'altro questi volumi, abbiamo evidentemente il volume racchiuso dalla superficie.

Poichè le due parti della superficie in questa maniera vengono ad avere lo stesso contorno il quale non è altro che la linea di contatto fra il cilindro e la superficie, così le integrazioni rispetto alle variabili $x$, $y$ debbono farsi in ambo i casi fra gli stessi limiti, perchè in ambo i casi debbono estendersi in modo da comprendere tutta la medesima area piana. Solo che una volta $f(xy)$ ha un valore e un'altra volta ne ha un altro, supposto che la superficie sia chiusa. Questi due valori si trovano risolvendo l'equazione della superficie rispetto a $z$; si ha allora una funzione

$$z = f(xy)$$

che deve essere una funzione a due valori $f_1(xy)$, $f_2(xy)$, perchè abbiamo supposto che una retta parallela all'asse $z$ incontra la superficie in due punti; tali due valori sono quelli che dovranno figurare nelle integrazioni.

Il volume sarà dunque dato da:

$$V = \int\int [f_1(xy) - f_2(xy)]\, dx\, dy$$

ed essendo:

$$\int_{f_2(xy)}^{f_1(xy)} dz = f_1(xy) - f_2(xy)$$

possiamo anche scrivere:

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

dove l'integrazione rispetto a $z$ bisogna farla fra i limiti dei due valori $f_1\, f_2$ che ha la $z$, e che si ottengono dall'equazione della superficie risolvendola rispetto a $z$; l'integrazione rispetto ad $y$ deve farsi fra i limiti dei due valori funzioni di $x$ che si hanno per $y$ risolvendo rispetto ad essa l'equazione della curva piana intersezione del piano $xy$ col cilindro suddetto circoscritto alla superficie; e l'integrazione rispetto a $x$ bisogna farla fra i limiti costanti che vengono ad essere le ascisse dei punti di contatto delle due tangenti a tale curva piana, parallele all'asse $y$.

Per potere applicare questo metodo nei diversi casi speciali l'unica cosa che ci resta a fare è di trovare la curva piana proiezione del contorno della superficie.

Ora noi abbiamo visto in un paragrafo precedente che se $\xi\, \eta\, \zeta$ sono gli angoli di direzione della perpendicolare ad un piano tangente nel punto $xyz$

si ha

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Se l'equazione della superficie ridotta sotto la forma razionale è data da

$$F(x\,y\,z) = 0$$

si ha dunque:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,, \qquad \frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

cioè:

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Se il piano tangente è parallelo all'asse $z$ allora $\cos\zeta = 0$ e quindi per il punto di contatto deve essere $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Questa relazione rappresenta una nuova superficie che sega la superficie data lungo la curva di contatto del cilindro circoscritto; eliminando $z$ fra l'equazione della superficie $F(x\,y\,z) = 0$ e l'equazione $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ si ha una relazione fra $x\,y$ che si può considerare come l'equazione del cilindro circoscritto, o anche, limitandoci al piano $x\,y$, come l'equazione della base di tal cilindro, e abbiamo con ciò l'equazione richiesta della curva.

§ 9. **Volume del solido di rotazione.** — Come si è visto, il calcolo di un volume si riduce a quello di un integrale doppio; ma se si tratta di un volume racchiuso da una superficie di rotazione possiamo anche far vedere facilmente che si può effettuare una delle integrazioni prima di conoscere l'equazione della superficie, e quindi ci possiamo ridurre ad un integrale semplice, il cui calcolo dipenderà poi dalla conoscenza della equazione della curva generatrice della superficie. Capita cioè qui un fatto simile a quello che abbiamo visto che accade nel caso del calcolo delle aree della superficie.

Conserveremo le stesse notazioni adoperate nei paragrafi precedenti.

Essendo $z = \varphi\sqrt{(x^2 + y^2)}$ l'equazione della superficie di rotazione. il volume sarà dato da

$$\iint \varphi\,(\sqrt{x^2 + y^2})\,d\,x\,d\,y.$$

Poniamo ora

$$x^2 + y^2 = x'^2$$

e trasformiamo la variabile $y$ nella variabile $x'$.
Allora si ha:

$$\iint \varphi\,(x')\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}\,d\,x\,d\,x'$$

e volendo estendere, come nel caso della superficie, l'integrazione al quarto di cerchio di raggio $r$ dobbiamo estendere l'integrazione

$$\text{da } x = 0 \quad \text{sino ad} \quad x = x'$$

e

$$\text{da } x' = 0 \quad \text{sino ad} \quad x' = r$$

Eseguendo l'integrazione rispetto ad $x$ si ha evidentemente $\frac{\pi}{2}$ onde resta

$$\frac{\pi}{2} \int_0^r x' \varphi(x') \, d x'.$$

Colla formola precedente si ha il volume generato da $APBO$ (v. fig. del § 5) che rota di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse $z$; moltiplicando per 4 si avrà il volume generato da tutta la rotazione

$$V = 2\pi \int_0^r x' \varphi(x') \, d x'.$$

Volendo il volume generato dalla sola rotazione di $APQ$ dobbiamo togliere il volume del cilindro generato da $QPBO$, cioè $\pi r^2 . PB$, cioè:

$$\pi r^2 \varphi(r).$$

Ora integrando per parti si ha

$$2\pi \int x' \varphi(x') \, d x' = \pi x'^2 \varphi(x') - \pi \int x'^2 \varphi'(x') \, dx'$$

e fra i limiti si ha:

$$2\pi \int_0^r x' \varphi(x')\, dx' = \pi r^2 \varphi(r) - \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x') dx'$$

onde la differenza fra i due volumi è, a meno del segno

$$V_1 = \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x')\, dx'.$$

E in questo integrale facendo un cambiamento di variabile indipendente, introducendo cioè per variabile indipendente

$$z = \varphi(x')$$

e quindi moltiplicando per

$$\frac{dx'}{dz} = \frac{1}{\varphi'(x')},$$

resta:

$$V_1 = \pi \int_{z_2}^{z_1} x'^2\, dz$$

chiamando $z_2$, $z_1$, le ordinate dei punti $A$, $P$ estremi della curva generatrice, cioè le lunghezze $OA$, $BP$.

§ 10. **Volume dell'ellissoide qualunque. — Solido generato dalla cicloide.** — Sia l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dobbiamo calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int d\,x\,d\,y\,d\,z.$$

La integrazione rispetto a $z$ bisogna farla fra i limiti:

$$z = \pm\, c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

resta così l'integrale doppio:

$$2\,c\int d\,x\int d\,y\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

Esaminiamo quali debbono essere i limiti dell'integrazione rispetto ad $y$. Osserviamo intanto che la proiezione della superficie sul piano $x\,y$ è in questo caso l'intersezione della superficie stessa col piano $x\,y$, e quindi ha per equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde:

$$y = \pm\, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Applicando la formola:

$$\int d\,t\sqrt{1 - t^2} = \frac{1}{2}\,t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,t$$

si ha

$$\int d\,y \sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] - \frac{y^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{b}{2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] \text{arc sen} \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

e, fatta l'integrazione fra i limiti, si ha

$$\frac{1}{2}\,\pi\, b \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]$$

onde il volume è dato da

$$\pi\, b\, c \int_{-a}^{+a} \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] d\,x$$

cioè finalmente da:

$$\frac{4}{3}\,\pi\,.\,a\,.\,b\,.\,c.$$

Se ora:

$$a = b = c = r$$

si ha $\frac{4}{3}\pi\, r^3$ che è appunto il volume della sfera.

Passiamo ora alla ricerca del volume racchiuso nella superficie generata da una mezza cicloide $O\,A$ che ruota attorno alla tangente $O\,F'$ nel vertice:

Sia $OEB$ il cerchio generatore della cicloide. Dobbiamo calcolare $\pi \int x'^2 \, d z$ esteso fra i limiti da $z = 0$ sino a $z$.

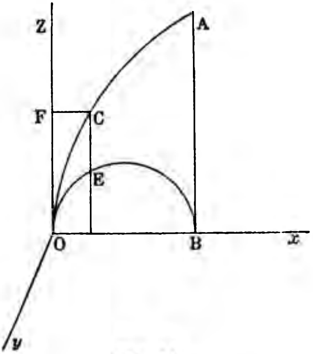


Fig. 14.

Ci conviene di mutare la variabile d'integrazione, e prendiamo per variabile indipendente la $x'$. Allora dobbiamo moltiplicare per $\frac{d z}{d x'}$ che, come sappiamo, per la cicloide è eguale a $\sqrt{\frac{2 r - x'}{x'}}$. Si ha così da calcolare:

$$\pi \int_0^{x'} x' \sqrt{2 r x' - x'^2} \, d x'$$

che può scriversi:

$$\pi r \int_0^{x'} \sqrt{2 r x' - x'^2} \, d x' -$$

$$-\pi \int_0^{x'} (r - x') \sqrt{2\,r\,x' - x'^2}\, d\,x'.$$

Ora se volessimo calcolare l'area piana $O\,E\,D$ racchiusa dal cerchio, dovremmo calcolare precisamente l'integrale

$$\int_0^{x'} \sqrt{2\,r\,x' - x'^2}\, d\,x',$$

quindi possiamo dire che:

$$\text{Volume} = \pi\, r \text{ segm. } O\,E\,D\, -$$

$$-\pi \int_0^{x'} (r - x') \sqrt{2\,r\,x' - x'^2}\, d\,x'.$$

Il secondo integrale si può calcolare facilmente ponendo $2\,r\,x' - x'^2 = t$.

Si ha allora:

$$\frac{d\,t}{d\,x'} = 2\,r - 2\,x'$$

donde

$$\frac{d\,x'}{d\,t} = \frac{1}{2\,(r - x')}$$

e quindi si ha da calcolare:

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^t t^{\frac{1}{2}}\, d\,t = -\frac{\pi}{3}\, t^{\frac{3}{2}}$$

onde in fine:

$$\text{Volume} = \pi\, r \text{ segm. } O\,E\,D - \frac{\pi}{3}(2\,r\,x' - x'^2)^{\frac{3}{2}}$$

Volendo tutto il volume racchiuso dalla superficie generata da tutta la mezza cicloide $O\,C\,A$, dobbiamo fare $x' = O\,B = 2\,r$, e allora il segm. $O\,E\,D$ diventa tutta la mezza circonferenza la cui area è $\frac{\pi\, r^2}{2}$, onde si ha infine:

$$\text{Volume} = \frac{1}{2}\pi^2\, r^3.$$

# CAPITOLO VII.

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

§ 1. **Considerazioni e definizioni fondamentali.** — Finora noi ci siamo proposti questo problema: conosciuta la derivata di una funzione come si fa per trovare la funzione stessa?

Ora possiamo proporci un problema più generale ed è questo: immaginiamo una funzione $y$ di $x$, e di questa funzione se ne facciano le derivate di primo, secondo,... n$^{mo}$ ordine che indicheremo con $y' \, y'' \ldots y^{(n)}$, e sieno ignoti i valori espliciti sia di questa funzione che di tutte le sue derivate; ma si conosca invece una relazione fra $x \, y \, y' \ldots y^{(n)}$. Ora ci domandiamo: conoscendo una tale relazione, si potrà trovare la funzione $y$?

Una relazione di questo genere si chiama una *equazione differenziale*, e il problema che vi si riferisce, e che noi abbiamo enunciato, si chiama il problema dell'*integrazione delle equazioni differenziali*.

Cominciamo a fissare delle distinzioni fondamentali fra le varie specie di equazioni differenziali che noi possiamo immaginare. Prima di tutto può immaginarsi che la funzione ignota da ricercarsi, sia funzione di una sola variabile o di più variabili indipendenti; e quindi che la relazione data, sia una relazione fra la funzione, la variabile e le derivate della funzione rispetto a quell'unica variabile, ovvero sia una relazione fra la funzione, le variabili e le derivate *parziali* della funzione rispetto alle diverse variabili. Abbiamo quindi due grandi categorie di equazioni differenziali; quelle della prima categoria si chiamano *equazioni differenziali ordinarie*, e quelle della seconda si chiamano *equazioni a derivate parziali.*

Nell'uno e nell'altro caso si chiamerà *ordine dell'equazione* quello della derivata di più alto ordine che in essa comparisce. Può poi anche immaginarsi che invece di una sola relazione fra la variabile, la funzione e le sue derivate, ne sieno date più, da considerarsi come *simultanee;* allora si ha ciò che si chiama un *sistema di equazioni differenziali.*

Prima di passare allo studio del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali, noi naturalmente cercheremo di fare uno studio preliminare sul problema diretto, cioè sul modo di costruire una equazione differenziale, conosciuta che sia la funzione. Con ciò potremo poi più facilmente tentare la soluzione del problema inverso.

Sia data una funzione $y$ di $x$, e ne formiamo la derivata prima $y'$. Se la funzione data contiene un parametro qualunque $c$, in generale anche la derivata conterrà $c$, e se noi eliminiamo $c$ fra la funzione data e la sua derivata, abbiamo evidentemente una relazione fra $y, y', x$, che sarà un'equazione differenziale.

L'integrale di quella equazione sarà naturalmente la funzione $y$ data, ma dove a $c$ può darsi qualunque valore, perchè per qualunque $c$ (che è il parametro che abbiamo eliminato) la $y$ data soddisfa sempre la equazione differenziale. Non si ha dunque effettivamente *una sola* funzione, ma *infinite* funzioni, o meglio *una funzione contenente un parametro arbitrario.*

L'equazione differenziale così formata è un'equazione differenziale di 1° ordine, ma è chiaro che con considerazioni analoghe potrebbe formarsi un'equazione differenziale di ordine $n$.

Basta cioè supporre che la funzione data contenga $n$ costanti $c_1\, c_2 \dots c_n$, e che si formino le prime $n$ derivate della funzione; fra queste, insieme colla funzione data, eliminando le $n$ costanti si ha un'equazione contenente in generale $x\, y\, y' \dots y^{(n)}$, che è un'equazione differenziale di ordine $n$.

Dalla costruzione stessa di una tale equazione differenziale si vede che la funzione data che dovremo considerare come *integrale* dell'equazione differenziale, ha la proprietà, che *se si formano le sue derivate sino a quella di ordine* n, *e i valori di* $y\, y' \dots y^{(n)}$ *così ottenuti si sostituiscono nell'equazione differenziale, si deve avere una relazione identicamente soddisfatta qualunque sia* x *e qualunque sieno i valori delle costanti* $c_1\, c_2 \dots c_n$.

Una siffatta soluzione dell'equazione differenziale con $n$ costanti arbitrarie noi la chiameremo l'*integrale generale*, e vien subito la domanda, se data un'equazione differenziale qualunque esista o no sempre l'*integrale generale.* Si dimostra che effettivamente qualunque sia l'equazione differenziale, l'*integrale generale esiste sempre;* ma noi non entreremo nei dettagli di queste dimostrazioni.

Se a tutte o ad alcune delle costanti diamo dei valori particolari allora abbiamo anche delle soluzioni dell'equazione differenziale, che si chiamano *integrali particolari.* Tali integrali non contengono $n$ costanti arbitrarie, ma o nessuna o un numero minore di $n$; ognuno di essi si può sempre ricavare dall'integrale generale, mentre viceversa da essi non può ricavarsi l'integrale generale, meno che in certi casi speciali.

Vogliamo ora fissare con precisione quali sono i caratteri distintivi di un integrale generale.

Qualunque soluzione dell'equazione differenziale deve sempre essere una funzione $y$ di $x$ tale che ricavandone $y' \, y'' \ldots y^{(n)}$ e sostituendoli, insieme col valore di $y$, nell'equazione data, si abbia un'espressione in $x$ identicamente soddisfatta *qualunque sia il valore di* x. Queste sono le proprietà comuni a qualunque specie di integrali; ma che cosa deve verificarsi dippiù perchè si possa dire che l'integrale di cui si tratta sia della specie di quelli chiamati *generali?*

Abbiamo detto che l'integrale generale deve contenere $n$ costanti arbitrarie; ma dobbiamo precisare meglio il carattere essenziale di queste costanti. Queste costanti devono essere contenute in una maniera speciale, e propriamente in questa: *che formando le successive* n *derivate di* y, *possa poi eseguirsi il processo di eliminazione di quelle costanti dalle* n + 1 *equazioni che si vengono ad* *ottenere*. È allora solo che noi diremo che quelle costanti sono fra loro tutte *indipendenti* o sono proprio $n$; potrebbe accadere invece che, eliminando alcune delle costanti, se ne eliminino per conseguenza alcune altre, e allora esse non sarebbero che solo apparentemente $n$, ma in effetti rappresenterebbero un numero inferiore di costanti, e quindi l'integrale non sarebbe più *generale* ma *particolare.*

Evidentemente possiamo mettere sotto quest'altra forma la proprietà indicata: che *dalle prime* n *di quelle equazioni, cioè da quella che esprime la funzione data e da quelle delle prime* n — 1 *derivate, si possano ricavare i valori di* $c_1\, c_2 \ldots c_n$ *cioè delle* n *costanti;* è chiaro infatti che quando questo si possa fare, allora sostituendo poi questi valori nell'equazione contenente la derivata $n^{ma}$ di $y$, si avrà una relazione, *certamente non identica*, che sarà proprio l'equazione differenziale. Quella relazione che si viene a ottenere sarà *certamente non identica* perchè il termine contenente $y^{(n)}$ non potrà distruggersi con nessun altro termine *simile*, giacchè $c_1\, c_2 \ldots c_n$ vengono espressi solo mediante $x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)}$, e non mediante $y^{(n)}$.

Se i valori delle costanti arbitrarie sono espressi in funzione di $x$, $y$, $y' \ldots y^{(n-1)}$ vuol dire che dando ad $x$ un qualunque valore compreso in un certo campo, e a $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ valori arbitrariamente stabiliti, ogni volta se ne debbano poter ricavare per le costanti valori determinati; onde possiamo dire anche *che le* n *costanti devono comparire in maniera che almeno per i valori di* x *compresi in un certo campo, si debbano potere dare sempre ad esse* *tali valori che le quantità* $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ *acquistino valori già precedentemente e arbitrariamente fissati.*

Oltre le due dette specie di integrali cioè i *generali* e i *particolari*, ne esiste anche un'altra specie, cioè gli *integrali singolari;* ma di questi discorreremo in seguito in un paragrafo apposta.

Le considerazioni fatte si riferiscono alle *equazioni differenziali ordinarie.* In quanto poi agli integrali delle *equazioni a derivate parziali* ne discorreremo in un altro paragrafo.

Resta ora a passare allo studio del problema: *data l'equazione differenziale trovare l'integrale;* per tale problema noi al solito non possiamo stabilire delle regole generali, ma dobbiamo limitarci a fissare dei tipi di equazioni differenziali, e studiarli separatamente, come già si fece nel problema dell'integrazione delle funzioni (quadrature).

Il problema delle equazioni differenziali lo considereremo però risoluto sempre che lo avremo ricondotto ad un problema di semplice integrazione, cioè, come si dice, alle *quadrature.* Potrà anche accadere che una tale quadratura non si sappia praticamente effettuare, ma la difficoltà allora resta spostata in un campo di ricerche diverso. È nella stessa maniera che noi nel calcolo infinitesimale consideriamo come risoluto un problema, semprechè lo possiamo trasformare in modo che la sua soluzione dipenda dalla soluzione di un problema algebrico, per es. dalla risoluzione di un'equazione algebrica.

Prima ora di passare allo studio dei diversi tipi di equazioni differenziali, facciamo vedere come esse possono presentarsi per la soluzione di un problema ordinario di geometria.

§ 2. **Esempio di un problema di geometria la cui soluzione conduce ad un'equazione differenziale.** — Applicando l'analisi a molti problemi di geometria in cui p. es., sia da trovare l'equazione di una curva piana dotata di speciali proprietà, può accadere di imbatterci direttamente non in una semplice relazione analitica fra le coordinate $x$, $y$, ma in una relazione fra $x$, $y$ e le derivate di $y$ rispetto ad $x$, cioè precisamente in una equazione differenziale. È chiaro che allora la soluzione di esso problema si riduce allo studio e all'integrazione di questa equazione differenziale.

Scegliamo il seguente esempio. Si voglia determinare una curva tale che il raggio vettore $OP$ sia eguale al segmento $OR$ che la tangente $PR$ in $P$ stacca sull'asse $x$.

Cominciamo dall'osservare che

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Inoltre

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{dy}{dx}$$

onde

$$\frac{y}{x + OR} = \frac{dy}{dx} .$$

e dovendo essere $OP = OR$ si ha la relazione:

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{dx} .$$

che è precisamente un' equazione differenziale di 1.° ordine.

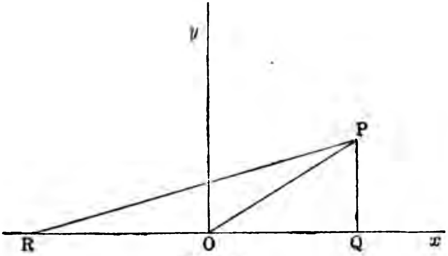

Fig. 15.

In un paragrafo seguente (v. § 4) vedremo come si può fare per integrare tale equazione, e come essa dia luogo ad un fascio di parabole. Per modo che si ricava ancora il teorema, che non c'è altra curva che le parabole che soddisfano alla proprietà enunciata.

§ 3. **Equazioni differenziali di 1° ordine. Equazioni in cui si possono separare le variabili.** — Vogliamo ora passare ad esporre alcuni metodi con cui si può effettuare l' integrazione di alcuni tipi speciali di equazioni differenziali.

Cominciamo da quelle di 1.° ordine.

Si abbia dunque un'equazione:

$$f\left(x\,, y\,, \frac{d\,y}{d\,y}\right) = 0 \qquad (1)$$

e supponiamo che $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ vi sia contenuto algebricamente in modo razionale ed intero.

Allora questa relazione può considerarsi come un'equazione in $\frac{dy}{dx}$, e si può risolvere rispetto a questa variabile, e si otterrà la scomposizione di (1) in un prodotto di $n$ fattori lineari in $\frac{dy}{dx}$.

Possiamo allora considerare separatamente uno di questi fattori, e ci riduciamo così ad un'equazione differenziale del tipo:

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

dove $M$, $N$ sono funzioni di $x$, $y$.

Uno dei primi casi in cui (2) può immediatamente integrarsi si ha quando $M$, $N$ *sono funzioni rispettivamente della sola* x *e della sola* y.

Allora si ha:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

e integrando si ha:

$$\int M\,dx + \int N\,dy = \text{cost.}$$

Questo caso si dice *il caso in cui le variabili si possono separare*. Si abbia per esempio da integrare:

$$xy\,dx - (a-x)(y-b)\,dy = 0;$$

dividendo per $y(a-x)$ si ha:

$$\frac{x}{a-x}\,dx - \frac{y-b}{y}\,dy = 0$$

e, integrando termine a termine, si ha:

$$-x-a\log(a-x)-y+b\log y=\text{cost}.$$

Ci è comodo porre la costante arbitraria sotto la forma di un logaritmo, cioè scrivere $\log C$ al secondo membro e allora si ha, passando dai logaritmi ai numeri,

$$y^b\ (a-x)^{-a}=C\,e^{x+y}$$

Si potrebbe vedere che se si deriva questa equazione e poi si elimina $C$ fra essa e la sua derivata si ricade nell'equazione differenziale data.

§ 4. **Equazioni differenziali omogenee.** — Immaginiamo che in

$$M\,d\,x+N\,d\,y=0 \tag{1}$$

le $M$ e $N$ sieno *funzioni omogenee* dello stesso grado. In altri termini sieno tali funzioni che moltiplicando $x, y$ per una indeterminata $\lambda$, esse risultino le stesse di prima moltiplicate per $\lambda^m$.

Allora è facile indicare un metodo generale di integrazione. Infatti introduciamo una nuova variabile $z$ in luogo di $y$ ponendo

$$\frac{y}{x}=z.$$

Dividiamo la (1) per $x^m$, e si ha che i coefficienti di $dx$, $dy$, risultano funzioni del solo rapporto $\frac{y}{x}$, cioè si ha:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)d\,x+\psi\left(\frac{y}{x}\right)d\,y=0.$$

Intanto da

$$\frac{y}{x} = z$$

si ha:

$$d\,y = x\,d\,z + z\,d\,x$$

onde sostituendo si ha l'equazione differenziale:

$$\varphi(z)\,d\,x + \psi(z)\,(x\,d\,z + z\,d\,x) = 0$$

cioè

$$\frac{d\,x}{x} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z\,\psi(z)}\,d\,z = 0$$

in cui le variabili sono separate e quindi ci riduciamo al caso precedente.

L'equazione ottenuta nel § 2 è precisamente una equazione omogenea, e quindi si può integrare nel modo indicato.

Essa è:

$$y\,d\,x - (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,d\,y = 0$$

ed è omogenea di grado *1*.

Dividendo per $y$ e poi ponendo $\frac{x}{y} = z$ si ha:

$$z\,d\,y + y\,d\,z - (z + \sqrt{1 + z^2})\,d\,y = 0$$

donde

$$\frac{d\,z}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{d\,y}{y}$$

e integrando

$$\log y = \log (z + \sqrt{1 + z^2}) + \log C$$

donde

$$y = (z + \sqrt{1 + z^2})\, C$$

e ponendo $z = \frac{x}{y}$ si hanno successivamente gli sviluppi:

$$y^2 = C\,(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(y^2 - C\,x)^2 = C^2\,(x^2 + y^2)$$

$$y^2\,(y^2 - 2\,C\,x - C^2) = 0$$

onde, escludendo la soluzione $y = 0$, si ha per soluzione la parabola

$$y^2 - 2\,C\,x - C^2 = 0$$

il cui fuoco è l'origine.

§ 5. **Equazioni lineari di 1.° ordine.** — Un'equazione della forma

$$\frac{d\,y}{d\,x} + P\,y = Q$$

dove $P, Q$ *sieno funzioni della sola* $x$, si dice una equazione lineare; essa contiene linearmente la $y$ e la $\frac{d\,y}{d\,x}$.

Poniamo

$$y = u\,.\,v$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = u\,\frac{d\,v}{d\,x} + v\,\frac{d\,u}{d\,x}$$

Si ha

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

$$u\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)v=Q$$

Potendo scegliere ad arbitrio una delle due funzioni $u$, $v$, scegliamo $u$ in modo che sia:

$$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

cioè

$$\frac{du}{u}=-P\,dx;$$

e integrando

$$\log u=-\int P\,dx$$

$$u=e^{-\int P dx}.$$

Allora resta:

$$u\frac{dv}{dx}=Q$$

cioè

$$v=\int Q\,e^{\int P dx}\,dx+C\ ,$$

e quindi

$$y=e^{-\int P dx}\left[\int Q\,e^{\int P dx}\,dx+C\right].$$

Sia p. es. da integrare:

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Si ha:

$$\int P\,dx = x$$

$$\int Q\,e^{\int P dx}\,dx = \int x^3 e^x\,dx.$$

Per effettuare la quadratura

$$\int x^3 e^x\,dx$$

ci serviremo della integrazione per parti;

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x\,dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\,dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x\,e^x\,dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6\int e^x\,dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6e^x\end{aligned}$$

onde si ha:

$$y = e^{-x}\,[x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6e^x + C].$$

Vi sono alcuni tipi di equazioni differenziali che si possono ridurre immediatamente a caso delle equazioni lineari.

Si abbia p. es.:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

dove $P$, $Q$ *sieno funzioni della sola* x.

Poniamo:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$$

$$y^{-n}\,dy = dz;$$

si ha allora:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,Pz = Q,$$

e con ciò l'equazione data è trasformata in un'altra del tipo delle equazioni lineari.

Abbiamo detto precedentemente che se noi conosciamo un integrale particolare non possiamo senz'altro conoscere l'integrale generale. Però possiamo indicare il seguente tipo di equazioni in cui questo si può fare.

Sia l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R.$$

Sia $u$ un integrale *particolare*, cioè sia identicamente:

$$\frac{du}{dx} + Pu = Qu^2 + R. \qquad (1)$$

Poniamo

$$y = u + v.$$

Si ha in virtù di (1)

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qu)v = Qv^2$$

che è del tipo precedente; quindi si può integrare e si ha $v$ con una costante arbitraria.

Per esempio l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + (1 + Px - Qx^2)$$

ha per integrale particolare

$$y = x$$

Possiamo perciò applicare il metodo indicato e abbiamo da integrare

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

§ 6. **Equazioni differenziali di 1.° ordine non risolubili rispetto a** $\frac{dy}{dx}$. — Quando la risoluzione dell'equazione differenziale rispetto a $\frac{dy}{dx}$ riuscisse praticamente impossibile allora si presenta la necessità di ricercare alcuni metodi che si possono applicare senza risolvere l'equazione differenziale rispetto a $\frac{dy}{dx}$.

Al solito non possiamo dare metodi generali, ma metodi speciali pei vari casi.

1.° Supponiamo che l' equazione differenziale non contenga nè $x$ nè $y$ e contenga solo $\frac{dy}{dx}$.

Allora la riduzione dell'equazione darebbe

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \text{cost.}$$

dove non conosciamo $\alpha$. Però sapendo che essa è una quantità costante possiamo integrare quest'ultima relazione, e abbiamo:

$$y = \alpha x + c$$

donde:

$$\alpha = \frac{y - c}{x}.$$

Quindi se nell'equazione data poniamo per $\frac{dy}{dx}$ questo valore di $\alpha$ abbiamo l' integrale generale richiesto.

2.° Immaginiamo che l'equazione differenziale non contenga $y$, e sia:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Si possa allora risolvere rispetto ad $x$; poniamo

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad x = \varphi(p) \qquad \frac{dx}{dp} = \varphi'(p).$$

Prendiamo per nuova variabile la $p$, onde:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dp}\frac{1}{\varphi'(p)}$$

e perciò

$$\frac{dy}{dp} = p\,\varphi'(p)$$

donde:

$$y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + C \quad .$$

Calcolato questo integrale basta eliminare $p$ fra esso e la

$$x = \varphi(p)$$

per avere la relazione fra $x$ e $y$.

Si abbia p. es.:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - x = 0.$$

Sarà:

$$x = p + p^2$$

$$y = \int p\,(2p + 1)\,dp = \frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}C$$

ed eliminando $p$ fra queste ultime due relazioni si ha l'integrale generale. Dalla prima si ha:

$$p^2 = x - p$$

onde

$$y = \frac{2}{3} p (x - p) + \frac{1}{2} (x - p) + \frac{1}{6} C =$$

$$= \frac{2}{3} p x - \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} x - \frac{2}{3} (x - p) + \frac{1}{6} C =$$

$$= \frac{2}{3} p x + \frac{1}{6} p - \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} C$$

e risolvendo rispetto a $p$ si ha:

$$p = \frac{6y + x + C}{1 + 4x}$$

e sostituendo nella prima equazione si ha infine:

$$x = \left( \frac{6y + x + C}{1 + 4x} \right)^2 + \left( \frac{6y + x + C}{1 + 4x} \right).$$

3.° Immaginiamo in terzo luogo che l'equazione data non contenga $x$, ma solo $y$, e si possa risolvere rispetto ad $y$.

Allora poniamo anche qui:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

per modo che l'equazione differenziale diventa:

$$y = f(p)$$

Derivando rispetto ad $x$ si ha:

$$\frac{dy}{dx} = f'(p) \frac{dp}{dx}$$

donde si ha l'altra equazione differenziale fra le variabili $x$ e $p$:

$$p = f'(p)\frac{dp}{dx}$$

da cui

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C$$

ed eliminando adesso al solito $p$ fra questa relazione e la $y = f(p)$ si ha l'integrale generale.

Sia p. es. l'equazione:

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = a\frac{dy}{dx};$$

coll'introduzione del simbolo $p$ e colla risoluzione rispetto ad $y$ si ha:

$$y = \frac{ap}{1+p^2}$$

$$x = \int \left[\frac{a\,dp}{p(1+p^2)} - \frac{2ap\,dp}{(1+p^2)^2}\right] + C$$

$$= -\frac{a}{1+p^2} + a\int \frac{dp}{p(1+p^2)} + C.$$

Ora:

$$\int \frac{dp}{p(1+p^2)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2}\right)dp =$$

$$= \log p - \frac{1}{2}\log(1+p^2)$$

onde

$$x = -\frac{a}{1+p^2} + a \log p - \frac{1}{2} a \log(1+p^2) + C.$$

Adesso non resterebbe che eliminare $p$ fra questa equazione e la

$$y = \frac{a\,p}{1+p^2}.$$

4.° Vogliamo ancora considerare un'equazione differenziale del tipo:

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

derivando rispetto ad $x$ si ha $\left(\text{ponendo } \frac{dy}{dx} = p\right)$

$$p = f(p) + x f'(p) \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}$$

cioè:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x f'(p)}{f(p)-p} = -\frac{\varphi'(p)}{f(p)-p}$$

Questa è un'equazione *lineare* come quelle considerate nel paragrafo precedente, e ha per integrale:

$$x = e^{-\int \frac{f(p)dp}{f(p)-p}} \left[ -\int \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp} dp + C \right]$$

e eliminando $p$ colla data si ha l'integrale generale.

Resta però ancora da considerarsi il caso in cui sia $f(p) = p$, perchè in tal caso la funzione da integrare è infinita.

Si abbia cioè da integrare l'equazione:

$$y = xp + \varphi(p);$$

allora derivando rispetto ad $x$, e riducendo si ha:

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Quindi ci si presentano due casi; o poniamo

$$x + \varphi'(p) = 0$$

ovvero:

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

Il secondo caso ci dice che $p$ è costante, cioè l'integrale è:

$$p = C$$

Eliminando quindi $p$ fra questa relazione e l'equazione data si ha l'integrale generale:

$$y = xC + \varphi(C)$$

In quanto al primo caso esso ci dà:

$$x = -\varphi'(p)$$

ed eliminando $p$ fra questa relazione e la data si ha l'integrale. Però questo integrale non verrà a contenere alcuna costante arbitraria; è facile dimostrare che esso non può ottenersi dall'integrale generale particolarizzando la costante. Giacchè ricavando $p$ dall'ultima relazione e avendosi:

$$p = \psi(x)$$

l'integrale di cui si parla è

$$y = x\psi(x) + \varphi[\psi(x)]$$

e, come si vede, questo si ricava dall'integrale generale, non dando a $C$ un valore particolare costante, ma un valore che è funzione di $x$.

Quindi questo integrale non è neanche uno di quelli integrali che abbiamo chiamati integrali particolari. Esso costituisce una specie di integrali che studieremo in seguito e che si chiamano *integrali singolari.*

§ 7. **Del fattore integrante.** — Sia data una equazione differenziale di 1.° ordine e di 1.° grado e sia posta sotto la forma:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1)$$

Se $M, N$ sono rispettivamente funzioni di sola $x$ e di sola $y$, allora evidentemente il primo membro di questa equazione è un differenziale esatto; tal primo membro sarà pure un differenziale esatto quando sia verificata la condizione:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Essendo zero il secondo membro dell'equazione data, noi possiamo sempre alterarne la forma moltiplicando il primo membro per un fattore qualunque.

Ora ci domandiamo: sarà in generale possibile trovare una certa funzione di $x$, $y$ tale che moltiplicata per il primo membro dell'equazione differenziale lo renda un differenziale esatto?

È chiaro che se in un qualunque modo possiamo giungere alla ricerca di un tal fattore, allora l'integrazione dell'equazione differenziale è senz'altro effettuata.

Tal fattore, se esisterà, si chiamerà il *fattore integrante.* Noi dimostreremo:

1.° *Che esiste sempre;*

2.° *Che ne esistono infiniti;*

3.° *Che dato uno si possono trovare tutti gli altri.*

In quanto alla prima tesi si può dimostrare nel seguente modo: noi abbiamo detto avanti che esiste sempre l'integrale generale di una equazione differenziale. Ora immaginiamo tale integrale generale risolto rispetto alla costante arbitraria $C$; allora si avrà un'espressione del tipo:

$$\varphi\,(x\,y) = C \tag{2}$$

Se questo è l'integrale generale dell' equazione differenziale, ciò significa che derivando questa equazione, e eliminando poi $C$ fra essa e la sua derivata, si deve ricadere nell'equazione differenziale data.

Possiamo anche dire che dopo eliminata la $C$, e ricavato il $\frac{d\,y}{d\,x}$ dalla relazione risultante, il valore di tal $\frac{dy}{dx}$ così ricavato deve coincidere identicamente con quello ricavato dall'equazione differenziale. Ma se nel fare la derivazione dell'integrale generale, la costante $C$ sparisce da sè, come succede appunto quando l'integrale generale è posto sotto la forma (2), allora non ci sarà più bisogno evidentemente di eliminare la $C$, e la equazione dalla quale dobbiamo ricavare il $\frac{dy}{dx}$ è proprio l'equazione derivata di (2).

Ora da (2) si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

mentre dall'equazione differenziale si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

onde dovrà essere identicamente

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

cioè

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{N}.$$

Se chiamiamo $\mu$ il valore comune di questi due rapporti abbiamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu M$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu N$$

onde moltiplicando per $\mu$ il primo membro di (1) si ha:

$$0 = \mu M d x + \mu N d y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} d x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d y$$

cioè il primo membro di (1) diventa il differenziale esatto della funzione $\varphi$ di $x$, $y$. Trovato $\varphi$ basta porre $\varphi = C$ per avere l'integrale generale.

Si vede con ciò che *esisterà sempre* una certa funzione $\mu$ che gode proprio della proprietà del *fattore integrante.*

È facile ora dimostrare che, ammesso che di fattori integranti ne esista uno, *ne esisteranno infiniti.*

Infatti se $\mu$ è un fattore che rende

$$\mu (M d x + N d y)$$

il differenziale di una funzione $\varphi$, allora consideriamo l'espressione:

$$\mu f(\varphi) \tag{3}$$

dove $f$ è il simbolo di una funzione *arbitraria* di $\varphi$. Moltiplicando il primo membro di (1) per tale espressione si ha

$$f(\varphi)\,[\mu\, M\, d\, x + \mu\, N\, d\, y]$$

cioè

$$f(\varphi)\, d\, \varphi$$

che è il differenziale esatto di:

$$\int f(\varphi)\, d\, \varphi.$$

Quindi possiamo asserire che anche (3) è fattore integrante.

Passiamo ora a dimostrare che tutti i fattori integranti sono compresi nella formola (3).

Sieno $\mu$, $\mu'$ due fattori integranti per modo che le espressioni:

$$\mu\, M\, d\, x + \mu\, N\, d\, y \quad ,$$
$$\mu'\, M\, d\, x + \mu'\, N\, d\, y$$

sieno rispettivamente differenziali esatti di due funzioni $\varphi$, $\varphi'$ cioè sieno identicamente uguali a:

$$d\, \varphi,\ d\, \varphi'$$

Si ha allora:

$$\frac{d\, \varphi}{d\, \varphi'} = \frac{\mu}{\mu'} \quad , \quad d\, \varphi' = \frac{\mu'}{\mu}\, d\, \varphi.$$

Le $\varphi$, $\varphi'$ sono funzioni di $x$, $y$; eliminando fra esse la variabile $x$, possiamo sempre supporre $\varphi'$ funzione di $\varphi$ e $y$.

Allora il differenziale totale di $\varphi'$ sarà:

$$d\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} dy$$

e paragonando questa formola con la precedente si ha

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0$$

cioè la $\varphi'$ non verrà a contenere neanche la $y$ quando vi si elimina la $x$ con $\varphi(xy) = \varphi$; in altri termini $\varphi'$ verrà ad essere funzione della sola $\varphi$. Quindi $\frac{\mu'}{\mu}$ che è la derivata di $\varphi'$ rispetto a $\varphi$ sarà funzione della sola $\varphi$, cioè

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(\varphi)$$

donde:

$$\mu' = \mu f(\varphi)$$

come si voleva dimostrare.

Di qui si ricava che *quando sono noti due fattori integranti, il loro rapporto eguagliato ad una costante arbitraria (supposto che non sia già da sè una costante) sarà l'integrale generale.*

Giacchè il detto rapporto dei due fattori integranti, eguagliato ad una costante, darà:

$$f(\varphi) = C$$

e se

$$\varphi = \text{cost.}$$

è l'integrale generale, anche $f(\varphi) = \text{cost.}$ sarà l'integrale generale.

§ 8. **Equazione a derivate parziali a cui soddisfano i fattori integranti.** — È facile trovare una equazione a derivate parziali a cui debbono soddisfare i fattori integranti.

Infatti se

$$\mu M dx + \mu N dy$$

deve essere un differenziale esatto dovrà aversi (v. Cap. V).

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

onde sviluppando

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

Questa è una equazione differenziale nella quale la funzione ignota è $\mu$, e vi compariscono le due derivate parziali di $\mu$ rispetto ad $x$ e $y$.

La integrazione di questa equazione differenziale costituisce in generale un problema più complicato di quello dell'integrazione dell'equazione differenziale data. Però in molti casi il problema si semplifica, e noi studieremo a parte questi casi.

1.° Caso. *Supponiamo che*

$$-\frac{1}{N}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

*sia funzione della sola* x, $\psi$ (x); *allora è facile vedere che esiste un fattore integrante* $\mu$ *funzione della sola* x.

Infatti se prendiamo

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}$$

cioè

$$\log \mu = \int \psi(x)\, d\, x$$

si avrà

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \psi(x)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

e di quì si vede che l'equazione a derivate parziali (1) è soddisfatta.

*Analogamente esisterebbe un solo fattore integrante funzione di sola* y, *se*

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

*fosse funzione di sola* y.

Consideriamo per esempio l'equazione differenziale

$$(x + y)\, d\, x + d\, y = 0$$

Si ha:

$$M = x + y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

onde

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=1$$

che possiamo considerare come funzione di sola $x$. Allora il fattore integrante corrispondente sarà:

$$\mu=e^{\int dx}=e^{x}.$$

Moltiplicando infatti per $e^x$ si ha:

$$e^x(x+y)\,dx+e^x\,dy=d\,[e^x y+e^x x-e^x].$$

Quindi l'integrale della data equazione differenziale è:

$$e^x\,[y+x-1]=\text{cost.}$$

2.° Caso. *Supponiamo che:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

*si possa porre sotto la forma:*

$$N\varphi(x)-M\psi(y);$$

*allora si può far vedere che esiste un fattore integrante che è il prodotto di una funzione di sola* x *per una funzione di sola* y.

Infatti determiniamo le due funzioni

$$X=e^{\int\varphi(x)dx}$$
$$Y=e^{\int\psi(y)dx}$$

Si può dimostrare che il prodotto $XY$ è un fattore integrante. Perchè nella (1) ponendo

$$\mu=XY$$

e quindi

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = Y \frac{d X}{d x} = X Y \varphi(x)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = X \frac{d Y}{d y} = X Y \psi(y)$$

si trova che l'equazione è identicamente soddisfatta.

Sia p. es., l'equazione differenziale:

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{y} + y\right) dx + 2 dy = 0$$

Abbiamo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x^2 + 2x - 1 - y^2}{y^2} = -\frac{1}{y} M + 2$$

$$= 1 . N - \frac{1}{y} M$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

onde possiamo porre:

$$\varphi(x) = 1 \quad , \quad \psi(y) = \frac{1}{y}$$

$$X = e^{\int dx} = e^x \quad , \quad Y = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$$

e il fattore integrante sarà:

$$\mu = y e^x$$

L'integrale sarà:

$$e^x\,(x^2+y^2-1)=\text{cost.}$$

3.° Caso. *Consideriamo finalmente il caso in cui le funzioni* M, N *sono omogenee dello stesso grado; allora un fattore integrante è:*

$$\mu=\frac{1}{Mx+Ny}\,.$$

Infatti facendo le derivate si ha:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{M+x\dfrac{\partial M}{\partial x}+y\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{N+x\dfrac{\partial M}{\partial y}+y\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2}$$

e sostituendo nell'equazione fondamentale (1) e riducendo si ha:

$$xN\frac{\partial M}{\partial x}+yN\frac{\partial N}{\partial x}-xM\frac{\partial M}{\partial y}-yM\frac{\partial N}{\partial y}$$
$$=(Mx+Ny)\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

e ricordando che $M$, $N$ sono funzioni omogenee e dello stesso grado $n$ e quindi pel teorema di Eulero

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=n\,M$$

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=n\,N$$

si trova che l'equazione di sopra è identicamente soddisfatta.

Consideriamo p. es., l'equazione

$$\frac{x+y}{y}\,d\,x+d\,y=0.$$

Per espressione del fattore integrante si ha:

$$\frac{1}{x+2\,y}$$

per il quale moltiplicando, si ha l'equazione:

$$\frac{x+y}{x\,(x+2\,y)}\,d\,x+\frac{1}{x+2\,y}\,d\,y=0$$

di cui il primo membro è il differenziale esatto di

$$\frac{1}{2}\log x\,(x+2\,y).$$

Se noi possiamo in altra maniera qualunque conoscere un fattore integrante $\mu$ di un'equazione differenziale omogenea, siccome sappiamo che un fattore integrante è certamente

$$\frac{1}{M\,x+N\,y}$$

possiamo asserire che l'integrale generale sarà il rapporto di $\mu$ per $\dfrac{1}{M\,x+N\,y}$ *a meno che tal* *rapporto non sia già da sè una costante.* Cioè l'integrale generale sarà

$$\mu\,(M x + N y) = \text{cost.}$$

Onde se il primo membro dell'equazione è già un differenziale esatto allora possiamo prendere $\mu = 1$ e si ha che l'integrale generale sarà

$$M x + N y = \text{cost.}$$

*a meno che il primo membro di tal relazione non sia da sè una costante.*

Così p. es., sappiamo che il primo membro dell'equazione:

$$\frac{x+y}{x(x+2y)}\,d x + \frac{1}{x+2y}\,d y = 0$$

è un differenziale esatto; ma però formando $Mx+Ny$ si ha la costante $1$. Invece per le equazioni

$$y\,d x + x\,d y = 0$$

$$(x + y)\,d x + x\,d y = 0$$

formando la espressione $M x + N y$ si ha rispettivamente

$$2 x y$$

$$x(x + 2 y)$$

che eguagliati a costanti saranno dunque gli integrali.

§ 9. **Integrali singolari delle equazioni differenziali ordinarie.** — Abbiamo già accennato nei paragrafi precedenti all'esistenza di un'altra specie di integrali delle equazioni differenziali, oltre gli *integrali generali e particolari.* Ora passeremo a dirne qualcosa di più dettagliato.

Si abbia un'equazione differenziale

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

e il suo integrale generale:

$$\varphi\,(x\,y\,C)=0$$

dove $C$ è una costante arbitraria. Si abbia poi un'altro integrale $\psi\,(x\,y)=0$ della stessa equazione differenziale: potrà avvenire che $\varphi$ per un valore particolare di $C$ diventi proprio la funzione $\psi$; nel qual caso $\psi$ è un *integrale particolare.* Ma potrà anche avvenire, come ora vedremo, che $\psi$ non si possa ricavare da $\varphi$ particolarizzando $C$. Allora sarà un integrale di altra natura e che chiameremo *singolare.*

È chiaro intanto che se esiste una tale $\psi$ si deve sempre poter ricavare da $\varphi$ dando a $C$ non più un valore costante determinato, ma ponendo per $C$ una funzione di $x, y$. Infatti basta prendere per $C$ il valore che si ricava dalla relazione:

$$\varphi\,(x\,y\,C)=\psi\,(x\,y)$$

Passiamo allora a vedere se è possibile dare nell'integrale generale, a $C$ per valore una funzione di $x, y$ in modo che la espressione che ne risulti sia ancora un integrale dell'equazione data.

Infatti se $\varphi$ è l'integrale, vuol dire che se da esso ricaviamo $\frac{dy}{dx}$, e poi eliminiamo $C$ colla relazione $\varphi = 0$ si deve avere lo stesso valore di $\frac{dy}{dx}$ ricavato dall'equazione differenziale.

Ora il $\frac{dy}{dx}$ ricavato da $\varphi = 0$ è quello che si ricava da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Se invece $C$ si suppone una funzione di $x, y$ allora il $\frac{dy}{dx}$ ricavato da $\varphi = 0$ è quello che si ricava da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (2)$$

Queste due relazioni sono identiche se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

e poichè da

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

si ricaverebbe $C$ costante e quindi non più funzione di $x, y$, così dovremo porre eguale a zero l'altro fattore, cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

Se dunque determiniamo $C$ in modo che si verifichi questa relazione, allora *potrà accadere* di imbattersi in un integrale dell'equazione data, e si avrà così l'integrale singolare.

Si abbia p. es. da integrare

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

L'integrale generale è

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2$$

che è l'equazione di una serie di cerchi col centro sull'asse di $x$ e col medesimo raggio $a$.

Per avere le soluzioni singolari dobbiamo porre

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial C} = -2(x - C),$$

la quale equazione ci dà

$$C = x$$

che posto nell'integrale generale dà

$$y^2 = a^2$$

equazione che rappresenta le due rette

$$y - a = 0$$
$$y + a = 0$$

Queste due rette sono tangenti a tutti gli infiniti cerchi determinati dall'integrale generale. Possiamo dire più precisamente che queste due rette rappresentano l'inviluppo di quei cerchi.

È facile dimostrare che questa proprietà è generale per tutti quegli integrali singolari che si hanno ponendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

In altri termini, immaginiamo che l'integrale generale si rappresenti geometricamente sul piano; esso rappresenterà una serie di curve che si otterranno variando la costante $C$. Allora *l'integrale singolare rappresenterà precisamente l'inviluppo di tutte queste curve, quando tale inviluppo esiste.*

Infatti noi sappiamo che per ricavare l'*inviluppo* dobbiamo derivare l'equazione della serie di curve rispetto al parametro $C$, e poi eliminare il parametro fra l'equazione data e questa derivata; ora questo è precisamente il processo per ottenere la soluzione *singolare.*

§ 10. **Equazioni differenziali lineari omogenee.**— Nei paragrafi precedenti abbiamo studiate le equazioni differenziali di 1.° ordine; ora dovremo passare a quelle di ordine superiore.

Considereremo per ora una classe speciale di equazioni differenziali di ordine superiore, e propriamente le cosiddette *equazioni differenziali lineari.*

Si indica con questo nome una equazione differenziale del tipo

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{d y}{d x} + X_n y = X_{n+1}$$

dove le $X$ sono tutte funzioni della sola variabile

$x$; in tale equazione compariscono le $y$ o le sue derivate successive solo *linearmente.*

Si chiama poi *omogenea* una siffatta equazione quando manca il secondo membro, quando cioè in particolare è

$$X_{n+1} = 0$$

In questo capitolo studieremo solo le omogenee, e poi in seguito faremo vedere che l'*integrazione di ogni equazione non omogenea si può sempre ridurre all'integrazione di una equazione omogenea.*

Cominciamo a dimostrare alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee, la cui forma generale è dunque:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + X_n y = 0 \qquad (1)$$

In primo luogo *con una opportuna trasformazione questa equazione si può ridurre ad un'altra di ordine* n — 1, *ma non più lineare.*

Infatti poniamo

$$y = e^{\int z dx} .$$

dove $z$ rappresenti la nuova funzione in luogo di $y$.

Allora

$$\frac{d y}{d x} = e^{\int z dx} z$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = e^{\int z dx} \left[ z^2 + \frac{d z}{d x} \right]$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Si vede di qui che in generale la derivata di $y$ d' ordine $k$ si esprime mediante le derivate di $z$ fino a quella di ordine $k - 1$.

Sostituendo queste espressioni nella (1) si può sopprimere il fattore comune a tutti i termini:

$$e^{\int z dx};$$

resta allora un' equazione in $z$ che contiene le derivate di $z$ sino a quella di ordine $n - 1$.

Con ciò il teorema è dimostrato.

In secondo luogo è chiaro che se $y_1$ è una soluzione particolare di (1) sarà soluzione di (1) anche la $c_1 y_1$ essendo $c_1$ una costante arbitraria.

E così se $y_1, y_2$ sono due soluzioni particolari, l'espressione

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dove $c_1 c_2$ sono costanti arbitrarie, sarà anche un integrale. Perchè sostituendo in (1) in luogo di $y$ tale espressione si ottengono due categorie di termini, in una delle quali c'è sempre come fattore comune $c_1$ e poi tutte le derivate della sola $y_1$, e nell'altra c'è come fattore comune $c_2$ e poi le derivate della sola $y_2$; e ciascuna di queste classi di termini è zero da sè, perchè $y_1 y_2$ soddisfano per ipotesi all'equazione (1).

*In generale se sono note* n *soluzioni particolari di* (1)

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

*allora possiamo analogamente dire che:*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (2)$$

*è anche un integrale di* (1).

Poichè questo contiene $n$ costanti $c_1\, c_2 \ldots c_n$ viene spontanea la domanda. Può (2) essere proprio integrale generale?

Sappiamo che perchè (2) sia l'integrale generale è necessario che le costanti sieno combinate fra loro in una maniera speciale, cioè che formando di (2) le $n-1$ prime equazioni derivate se ne possano ricavare le $c$ in modo determinato in funzione di $x, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$.

Ora le equazioni dalle quali dobbiamo di ricavare le $c$ sono:

$$\begin{array}{lllll} y & = c_1 y_1 & + c_2 y_2 & + \ldots + c_n y_n \\ y' & = c_1 y_1' & + c_2 y_2' & + \ldots + c_n y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)} & = c_1 y_1^{(n-1)} & + c_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} \end{array}$$

onde *è necessario che il determinante:*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = D$$

*sia diverso da zero.*

È interessante però fissare in che modo $D$ deve essere diverso da zero. Tutti i termini di $D$ sono funzioni determinate della variabile $x$. Ora è chiaro che esistono in generale sempre valori di $x$ pei quali si ha $D=0$; onde bisognerà immaginare che $x$ si muova dentro un campo in cui non vi sia alcuno di tali punti $x$. *In altri termini la* y *definita dalla formola* (2) *è integrale generale di* (1) *solo in un campo in nessun punto del quale* D *sia zero.*

Potrebbe però darsi che per qualunque $x$ il determinante $D$ sia sempre zero, allora la (2) non può rappresentare in nessun caso l'integrale generale; cioè gli $n$ integrali particolari $y_1 y_2 \dots y_n$ non sono tutti scelti in maniera da potere dare l'integrale generale, cioè, come si usa dire, non costituiscono un *sistema fondamentale.* Noi nel calcolo differenziale abbiamo già studiato un determinante formato come $D$, che abbiamo chiamato wronskiano (v. Cap. V, § 3), e abbiamo dimostrato che se esso è zero per qualunque $x$, allora fra le funzioni $y$ esiste una relazione lineare; possiamo dunque conchiudere, che *perchè le* $y_1 y_2 \dots y_n$ *costituiscano un sistema fondamentale è necessario che fra esse non esista alcuna relazione lineare omogenea.*

Ma ora si presenta spontanea la domanda: Esiste un *sistema fondamentale?* Questa domanda coincide coll'altra: L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea si può porre sotto la forma (2), cioè in modo che le $n$ costanti vi entrino linearmente?

Se si risponde affermativamente a questa domanda è chiaro che si sarà risposto affermativamente anche alla prima.

*Ora si può dimostrare che effettivamente l'integrale generale di* (1) *si può mettere sempre sotto la forma* (2).

E per ciò fare cominciamo col fissare il seguente teorema:

*Se di un' equazione come* (1) *si conosce un integrale particolare*

$$y = y_1$$

*allora l'integrazione di* (1) *si può ridurre a quella di una altra equazione dello stesso tipo ma in cui l'ordine è diminuito di una unità.*

Infatti sia $y_1$ l'integrale particolare e poniamo:

$$y = y_1 z$$

dove $z$ sia la nuova variabile che si vuole introdurre in luogo di $y$.

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} y_1$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Sostituendo questi valori in (1) e osservando che la parte contenente per fattore $z$ si distrugge, perchè $y_1$ è soluzione di (1) per ipotesi, resta una equazione lineare contenente solo le derivate di $z$, da quella di ordine $n$ sino a quella di ordine 1.°, e non contenente più $z$ esplicitamente. Cioè si ha:

$$X'_0 \frac{d^n z}{dx^n} + X_1' \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + X'_{n-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

dove le $X'$ sono funzioni di $x$.

Ponendo allora

$$\frac{dz}{dx} = u$$

si ha

$$X_0' \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \ldots + X'_{n-1} u = 0,$$

cioè un'equazione lineare omogenea di ordine $n-1$. Trovato $u$ si ha:

$$z = \int u\, dx + c_1$$

e quindi

$$y = y_1 z = y_1 \left( \int u\, dx + c_1 \right).$$

Ciò posto *supponiamo che per un'equazione differenziale lineare di ordine* n − 1 *l'integrale si possa sempre porre sotto la forma:*

$$u = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n$$

*e dimostriamo che allora la stessa proprietà si verifica per una equazione differenziale lineare di ordine* n.

Infatti dalla trasformazione precedente risulta, se $y_1$ è un integrale particolare della data:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int u_2\, dx + c_3 y_1 \int u_3\, dx + \ldots + \\ + c_n y_1 \int u_n\, dx.$$

Ora:

$$y_1 \int u_2\, d\,x \quad , \quad y_1 \int u_3\, d\,x\,, \dots y_1 \int u_n\, d\,x$$

son tutti integrali particolari della equazione data e quindi li possiamo chiamare $y_2\, y_3 \dots y_n$, e con ciò si è dimostrato che se il teorema è vero per l'ordine $n - 1$ è vero per l'ordine $n$.

Resta a far vedere che per $n = 1$ il teorema è vero, cioè che per una equazione lineare di 1.° ordine omogenea, l'integrale può sempre porsi sotto la forma:

$$y = c\, y_1$$

dove $y_1$ è un integrale particolare.

Ora per l'equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} + X_1\, y = 0$$

si ha:

$$\frac{d\,y}{y} = - X_1\, d\,x$$

e integrando

$$\log y = - \int X_1\, d\,x + \log c$$

$$y = c\, e^{-\int X_1 dx}$$

come si dovea dimostrare.

§ 11. **Equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti** — Passiamo a considerare il caso in cui l'equazione lineare (1) del paragrafo precedente abbia tutti i coefficienti $X$ costanti, cioè sia della forma

$$a_0 \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d y}{d x} + a_n y = 0 \quad (1)$$

Ricerchiamo se una funzione del tipo $y = e^{\alpha x}$, dove $\alpha$ sia una costante, può soddisfare questa equazione.

Le derivate successive di $y$ sono:

$$\frac{d y}{d x} = \alpha e^{\alpha x}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^3} = \alpha^2 e \alpha x$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

onde sostituendo in (1) si ha:

$$e^{\alpha x} (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$$

e poichè $e^{\alpha x}$ non può essere zero, lo dovrà essere l'altro fattore; onde perchè $y = e^{\alpha x}$ rappresenti una soluzione particolare di (1) è necessario che $\alpha$ sia una delle $n$ radici dell'equazione algebrica

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2)$$

la quale si forma da (1) ponendo in luogo delle derivate successive di $y$ le potenze successive della variabile $\alpha$. Se dunque noi risolviamo la (2) e supponiamo che le sue $n$ radici sieno tutte disuguali e sieno:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

allora

$$e^{\alpha_1 x}, \quad e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$$

rappresentano altrettante soluzioni particolari distinte di (1). Se quindi dimostriamo che il determinante formato con queste soluzioni e le loro derivate sino a quelle di ordine $n-1$, è diverso da zero, allora potremo affermare, giusta la teoria sviluppata avanti, che l'integrale generale è:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x}.$$

Ora il determinante di cui si parla è effettivamente diverso da zero, perchè esso è:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \ldots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha_n^2 e^{\alpha_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{a-1} e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^{n-1} e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix}$$

cioè:

$$e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} \ldots e^{\alpha_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

di cui il primo fattore che è un esponenziale è sempre diverso da zero e il secondo fattore che è un determinante, è uguale, come si sa dall'algebra, al prodotto delle differenze delle $\alpha$ combinate a due a due fra loro in tutti i modi possibili; quindi esso non può essere zero almenochè due delle $\alpha$ non sieno fra loro eguali, ciò che noi abbiamo escluso.

Sia p. es., l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \quad u^2 y = 0$$

L'equazione algebrica corrispondente è

$$\alpha^2 - u^2 = 0$$

donde:

$$\alpha = \pm u$$

quindi l'integrale generale è:

$$y = c_1 e^{u x} + c_2 e^{-u x}$$

Immaginiamo ora che l'equazione caratteristica (2) abbia due radici eguali; allora non si avranno più $n$ integrali particolari distinti, e quindi non più si troverà l'integrale generale per la via indicata.

Per trovare in tal caso la forma che acquista l'integrale generale noi ci serviremo di un metodo di passaggio del limite.

Sieno $\alpha_1$ $\alpha_2$ le due radici eguali. Incominceremo col supporre che prima le due radici sieno disuguali, e differiscano per una quantità $h$. Allora possiamo trovare colla formola precedente l'integrale generale; trasformando poi questo in modo opportuno e passando al limite per $h = 0$ avremo l'integrale generale pel nostro caso.

Se dunque:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + h$$

allora l'integrale generale sarà:

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x} =$$

$$= (c_1 + c_2 e^{hx}) e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x} =$$

$$= \left[(c_1 + c_2) + c_2 h x + c_2 \frac{h^2 x^2}{2!} + \ldots\right] e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + .$$

Poniamo ora

$$c_1 + c_2 = C_1 \quad , \quad c_2 h = C_2$$

si ha:

$$\left[C_1 + C_2 x + C_2 \frac{h x^2}{2!} + \ldots\right] e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots$$

e facendo poi $h = 0$ si ha infine

$$(C_1 + C_2 x) e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots$$

che è l'integrale generale pel caso in cui due radici dell'equazione caratteristica sono eguali.

Analogamente si ha in generale, che se $k$ radici sono eguali fra loro, allora basta moltiplicare la esponenziale corrispondente a quella radice per un polinomio intero in $x$ di ordine $k - 1$ di cui i coefficienti sieno tutti arbitrari.

Del resto possiamo effettivamente verificare che se $\alpha_1$ è radice doppia dell'equazione in $\alpha$ allora

$$y = x\, e^{\alpha_1 x}$$

è un altro integrale particolare.

Giacchè

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha_1 x} + x\, \alpha_1\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\, \alpha_1\, e^{\alpha_1 x} + x\, \alpha_1{}^2\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 3\, \alpha_1{}^2\, e^{\alpha_1 x} + x\, \alpha_1{}^3\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e sostituendo nell'equazione differenziale data e sopprimendo il fattore esponenziale comune, resta:

$$(a_0\, \alpha_1{}^n + a_1\, \alpha_1{}^{n-1} + \ldots a_{n-1}\, x + a_n) +$$
$$+ (n\, a_1\, \alpha_1{}^{n-1} + (n-1)\, a_1\, \alpha_1{}^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = 0$$

la quale relazione è effettivamente verificata se $\alpha_1$ è radice doppia, perchè allora per $x = \alpha_1$ si annulla il primo membro dell'equazione e la sua prima derivata, e quindi ciascuna delle parentesi è effettivamente da sè zero.

Così in generale si potrebbe dimostrare che se $\alpha_1$ è radice multipla di ordine $k$, allora:

$$x^{k-1}\, e^{\alpha_1 x}$$

è integrale particolare.

Sia p. es. l'equazione differenziale:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

l'equazione algebrica corrispondente è:

$$\alpha^n = 0$$

che ha tutte le radici eguali a zero. Quindi possiamo dire che l'integrale generale è:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1}$$

Immaginiamo ora finalmente che fra le radici $\alpha$ ve ne sieno alcune immaginarie; allora si potrebbe applicare lo stesso metodo e si avrebbe l'integrale generale sotto forma immaginaria.

Ora poichè tutti i principii da noi dati finora suppongono sempre funzioni reali di variabili reali, così dobbiamo cercare di escludere sempre ogni considerazione di immaginari.

Epperò cercheremo di dare l'integrale generale sotto forma reale. Sieno:

$$\alpha_1 = \beta + i\gamma \quad , \quad \alpha_2 = \beta - i\gamma$$

le due radici immaginarie coniugate.

Allora

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} = e^{\beta y} [c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x}] =$$
$$= e^{\beta x} [c_1 (\cos\gamma x + i \operatorname{sen}\gamma x) + c_2 (\cos\gamma x - i \operatorname{sen}\gamma x)] =$$
$$= e^{\beta x} [c_1 + c_2) \cos\gamma x + (c_1 - c_2) i \operatorname{sen}\gamma x]$$

e ponendo:

$$c_1 + c_2 = C_1$$
$$i(c_1 - c_2) = C_2$$

dove $C_1$, $C_2$ sono due nuove costanti arbitrarie si ha:

$$e^{\beta x}[C_1 \cos \gamma x + C_2 \operatorname{sen} \gamma x]$$

Quindi nell' integrale generale c'entrerà questo termine in luogo dei due corrispondenti alle radici immaginarie.

Anche qui si potrebbe far vedere che effettivamente

$$\cos(\gamma x)\, e^{\beta x}$$
$$\operatorname{sen}(\gamma x)\, e^{\beta x}$$

rappresentano due integrali particolari dell'equazione data.

Sia p. es. l'equazione:

$$\frac{d^3 y}{d x^3} - \frac{d y}{d x} - 6 y = 0.$$

L'equazione algebrica corrispondente è:

$$\alpha^3 - \alpha - 6 = 0$$

che ha per radici

$$\alpha = 2 \quad , \quad \alpha = -1 + i\sqrt{2} \quad , \quad \alpha = -1 - i\sqrt{2}$$

e quindi l'integrale generale sarà:

$$y = c_1 e^{2x} + [c^2 \cos(\sqrt{2}\, x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, x)]\, e^{-x}$$

Se consideriamo ancora l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0$$

applicando il metodo trovato si trova:

$$y = C \cos x + C_1 \operatorname{sen} x$$

A questo risultato si può giungere osservando che $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ sono proprio due funzioni tali che le loro seconde derivate sono eguali alla funzione stessa, ma col segno cambiato, e quindi esse rappresentano due soluzioni particolari dell'equazione data.

§ 12. **Equazioni lineari non omogenee.** — Si abbia l'equazione non omogenea:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = X \qquad (1)$$

dove le $X$ sono funzioni della sola $x$.

Allora si integri l'equazione omogenea:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0 \qquad (2)$$

che si ricava da (1) sopprimendo il secondo membro.

Sia

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (3)$$

l'integrale generale dell'equazione (2). Noi vogliamo vedere se è possibile soddisfare ad (1) colla stessa funzione (3) in cui però supporremo che le $c$ non sieno più costanti ma funzioni di $x$.

Formiamo dunque le derivate successive di (3).

Si ha in primo luogo:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx} +$$

$$+ y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx}.$$

Poniamo eguale a zero la espressione

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dc_n}{dx} = 0$$

e allora resta semplicemente:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dy} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}$$

cioè un'espressione eguale a quella che si avrebbe se le $c$ fossero considerate come costanti.

Deriviamo ancora questa prima derivata, e poniamo poi eguale a zero la parte contenente le derivate di $c$, e così di seguito eseguiamo questo processo sino alla derivata di ordine $n - 1$.

Abbiamo allora il sistema di equazioni:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = c_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}$$

avendo sottoposte le derivate delle $c$ alle condizioni:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 \dfrac{d c_1}{d x} + \ldots + \qquad y_n \dfrac{d c_n}{d x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{d y_1}{d x} \dfrac{d c_1}{d x} + \ldots + \qquad \dfrac{d y_n}{d x} \dfrac{d c_n}{d x} = 0 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}} \dfrac{d c_1}{d x} + \ldots + \dfrac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} \dfrac{d c_n}{d x} = 0
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Con ciò le $c_1 \ldots c_n$ le abbiamo sottoposte ad $n - 1$ condizioni espresse da altrettante equazioni differenziali. Le sottoporremo poi ancora ad una ultima condizione e propriamente alla condizione corrispondente al fatto che (3) debba essere integrale di (1). Vediamo come si esprime quest'ultima condizione.

Si ha evidentemente:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = c_1 \frac{d^n y_1}{d x^n} + \ldots + c_n \frac{d^n y_n}{d x^n} +$$

$$+ \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} \frac{d c_1}{d x} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \frac{d c_n}{d x}$$

e sostituendo i valori delle derivate successive di $y$ nel primo membro di (1) si ha, ordinando i termini:

$$c_1\left(X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y_1\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ c_n\left(X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y_n\right) +$$

$$+ X_0\left(\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx}\right)$$

e perchè la (1) sia soddisfatta deve dunque essere tutta questa espressione eguale a $X$.

Ora tutte le quantità contenute nelle prime parentesi sono zero perchè $y_1\, y_2 \ldots y_n$ sono soluzioni particolari di (2), onde resta l'altra condizione a cui debbono soddisfare le derivate delle $c$, cioè:

$$\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dc_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dc_n}{dx} = \frac{X}{X_0}. \qquad (5)$$

Se si potranno trovare le $c$ in modo da soddisfare a tutte queste $n$ relazioni differenziali cioè le (4) e la (5), allora avremo risoluto il problema.

Ora queste $n$ equazioni sono prima di tutto lineari in:

$$\frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx}, \ldots, \frac{dc_n}{dx} \qquad (6)$$

e quindi potremo ricavare i valori di queste derivate se il determinante dei coefficienti non è zero.

Ora ciò si verifica effettivamente perchè il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

cioè proprio il determinante fondamentale delle soluzioni particolari $y_1 y_2 \dots y_n$, il quale (vedi paragrafo precedente) è diverso da zero altrimenti (3) non sarebbe l'integrale generale di (2).

Determinate dunque le derivate (6) in funzione di $x$, con semplici quadrature saranno poi determinate le $c$.

La determinazione di ciascuna $c$ porta con sè daccapo una costante arbitraria, quindi si hanno ancora in tutto $n$ costanti arbitrarie.

Si abbia da integrare

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - n^2 y = e^x .$$

Bisogna prima di tutto trovare l'integrale generale di:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - n^2 y = 0$$

che è:

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}.$$

Indi bisogna determinare le $c_1$ $c_2$ in modo che

$$y_1 \frac{d c_1}{d x} + y_2 \frac{d c_2}{d x} = 0$$

$$y_1' \frac{d c_1}{d x} + y_2' \frac{d c_2}{d x} = e^x$$

cioè

$$e^{nx} \frac{d c_1}{d x} + e^{-nx} \frac{d c_2}{d x} = 0$$

$$n\, e^{nx} \frac{d c_1}{d x} + n\, e^{-nx} \frac{d c_2}{d x} = e^x$$

donde

$$\frac{d c_1}{d x} = \frac{1}{2n} e^{(1-n)x} \quad , \quad \frac{d c_2}{d x} = -\frac{1}{2n} e^{(1+n)x} .$$

Di qui si ha:

$$c_1 = \frac{1}{2n} \int e^{(1-n)x}\, d x = \frac{1}{2n(1-n)} e^{(1-n)x} + C_1$$

$$c_2 = -\frac{1}{2n} \int e^{(1+n)x}\, d x = -\frac{1}{2n(1+n)} e^{(1-n)x} + C_2$$

e quindi l' integrale generale della data equazione è:

$$y = \frac{1}{2n(1-n)} e^x + C_1 e^{nx} - \frac{1}{2n(1+n)} e^x +$$

$$+ C_2 e^{-nx} = \frac{1}{1-n^2} e^x + C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

§ 13. **Teoremi sulle equazioni differenziali lineari. Formola di Liouville.** — Abbiamo visto nel precedente capitolo come si può ricavare l' integrale dell'equazione lineare completa (con secondo membro diverso da zero) da quello dell'equazione omogenea che si ricava sopprimendo il secondo membro. Ora vogliamo dimostrare alcuni altri teoremi. Sia data l'equazione

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d\, y^{n-1}}{d\, x^{n-1}} + \ldots + X_n\, y = X \qquad (1)$$

e formiamo l'equazione omogenea corrispondente:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X y = 0. \qquad (2)$$

*Si conosca un integrale particolare di* (1), *e sia* Y *e l'integrale generale di* (2), *che sia* $Y_1$; *allora si potrà subito conoscere l'integrale generale di* (1) *che sarà dato semplicemente dalla formola:*

$$Y + Y_1$$

Infatti per ipotesi si ha che $Y$ sostituito in luogo di $y$, nel primo membro di (1) lo riduce eguale ad $X$, e $Y_1$ sostituito nello stesso modo nel primo membro di (1) lo riduce eguale a zero, dunque $(Y + Y_1)$ sostituito nel primo membro di (1) lo ridurrà eguale ad $X$, cioè $(Y + Y_1)$ è integrale di (1), e poichè contiene $n$ costanti (perchè $Y_1$ è integrale generale di (2)) si ha che esso è l' integrale generale di (1).

Si vede dunque che mentre colla teoria sviluppata nel paragrafo precedente, conosciuto l' integrale generale di (2), per conoscere quello di (1) bisognava ancora fare $n$ quadrature, queste ultime si possono risparmiare se si conosce un integrale particolare di (1).

Consideriamo p. es., l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + a^2 y = 2 \cos m x + 3 \operatorname{sen} m x.$$

Conoscendo l'integrale generale di:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + a^2 y = 0$$

che è:

$$Y_1 = c_1 \cos a x + c_2 \operatorname{sen} a x$$

per risolvere l'equazione data ci basterà di trovare un suo integrale particolare.

Sperimentiamo un'espressione della forma:

$$Y = \alpha \cos m x + \beta \operatorname{sen} m x$$

dove $\alpha$, $\beta$ sieno due costanti incognite.

Facendo le derivate e sostituendo nell'equazione data si trova che essa è soddisfatta se:

$$\alpha = \frac{2}{a^2 - m^2} \qquad \beta = \frac{3}{a^2 - m^2}$$

dunque:

$$y = c_1 \cos a x + c_2 \operatorname{sen} a x + \frac{2 \cos m x + 3 \operatorname{sen} m x}{a^2 - m^2}$$

è l'integrale richiesto.

Si può ora passare a dimostrare i seguenti teoremi:

1.° *Se si conosce un integrale particolare di* (1) *allora l'integrazione si può ridurre a quella di un'altra equazione lineare dello stesso ordine ma omogenea.*

2.° *Se si conosce un integrale particolare di* (2) *allora l'integrazione si può ridurre a quella di un'altra equazione lineare non omogenea ma di ordine inferiore.*

Sia $Y$ l'integrale particolare di (1), allora basta fare la trasformazione

$$y = Y + z$$

e si giunge facilmente ad avere un'equazione in $z$ omogenea e dello stesso ordine, e con ciò resta dimostrato il 1.° teorema.

Se poi $Y_1$ è un integrale particolare di (2) allora colla trasformazione

$$y = Y_1 z$$

si dimostra il secondo teorema.

Vogliamo finalmente dimostrare un teorema notevole dovuto a Liouville sull'espressione del determinante wronskiano $D$ (v. *Calcolo differenziale*, Cap. V, § 3) degli $n$ integrali particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea.

Dalle relazioni:

$$X_0 \frac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}} + \ldots + X_n y_1 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_0 \frac{d^n y_n}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} + \ldots + X_n y_n = 0$$

eliminando $X_2\, X_3 \ldots X_n$ si ha:

$$\begin{vmatrix} X_0 \dfrac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}}, & \ldots y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ X_0 \dfrac{d^n y_n}{d x^n} + X_1 \dfrac{d^{n-1} y_n}{d x^n}, & \dfrac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}}, & \ldots y_n \end{vmatrix} = 0$$

e poichè gli elementi della prima colonna risultano di due termini così questo determinante si scinde in due, cioè

$$X_0 \begin{vmatrix} y_1^{(n)}\, y_1^{(n-2)} \ldots y_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n^{(n)}\, y_n^{(n-2)} \ldots y_n \end{vmatrix} +$$

$$+ X_1 \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}\ \ y_1^{(n-2)} \ldots y_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n^{(n-1)}\ \ y_n^{(n-2)} \ldots y_n \end{vmatrix} = 0$$

e in forza di un teorema dimostrato (v. *Calcolo differenziale*, Cap. V, § 3), il primo determinante è la derivata del secondo, che chiameremo $D$, e quindi si ha:

$$X_0 \frac{d D}{d x} + X_1 D = 0$$

donde

$$\frac{dD}{D} = -\frac{X_1}{X_0} dx$$

$$\log D = -\int \frac{X_1}{X_0} dx + \log C$$

e quindi

$$D = C e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}$$

cioè il determinante $D$ si esprime con questa formola mediante un esponenziale.

Questa è la cosiddetta *formola di Liouville.*

§ 14. **Sopra certe classi particolari di equazioni differenziali lineari.** — Per il caso in cui le equazioni lineari abbiamo coefficienti costanti noi abbiamo visto che si può trovare l'integrale generale e tale ricerca dipende dalla risoluzione di una equazione algebrica.

Nel caso in cui i coefficienti sono funzioni di $x$ non possiamo dare in generale nessun metodo per la risoluzione, il cui successo dipenderà da artifizii più o meno opportuni.

Vogliamo però qui studiare alcuni tipi fra i più semplici che ci si presentano.

Sia l'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{ax+b}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \dots +$$

$$+ \frac{a_i}{(ax+b)^i}\frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} + \dots + \frac{a_n}{(ax+b)^n} y = X$$

dove $a_1 \ldots a_n$, $a$, $b$ sono costanti e $X$ è una funzione qualunque di $x$.

Poniamo:

$$a\,x + b = e^t$$

e prendiamo per variabile indipendente $t$ in luogo di $x$.

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{a}{a\,x+b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$$

$$= \frac{a}{a\,x+b}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{a}{a\,x+b} - \frac{dy}{dt}\,\frac{a^2}{(a\,x+b)^2}\,\frac{a\,x+b}{a}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{(a\,x+b)^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Sostituendo questi valori nell'equazione data e moltiplicando per $(a\,x+b)^n$ si ha un'equazione con coefficienti costanti.

Sia p. es.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (2\,n-1)\,x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0.$$

Dividendo per $x^2$ questa equazione risulta esattamente del tipo sopra considerato. Poniamo:

$$x = e^t$$

e allora l'equazione diventa:

$$\left[\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{d y}{d t}\right] - (2n-1)\frac{d y}{d t} + n^2 y = 0$$

cioè

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - 2n\frac{d y}{d t} + n^2 y = 0.$$

L' equazione algebrica caratteristica corrispondente è:

$$z^2 - 2nz + n^2 = 0$$

cioè

$$(z-n)^2 = 0$$

che dà

$$z = n$$

come radice doppia.

Quindi due integrali particolari della proposta saranno:

$$e^{nt} \quad , \quad t\, e^{nt}$$

e perciò l'integrale generale è:

$$c_1 e^{nt} + c_2 t\, e^{nt}$$

che trasformato in $x$ diventa

$$c_1 e^n + c_2 x^n \log x$$

Consideriamo ora ancora l' altro tipo di equazione differenziale lineare *a coefficienti non co-*

*stanti*:

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d y}{d x} +$$
$$+ a_n y = 0.$$

Poniamo

$$y = x^\alpha$$

dove $\alpha$ sia una costante ancora indeterminata.

Facendo le derivate si ha:

$$\frac{d y}{d x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^n y}{d x} = \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}$$

e sostituendo nell'equazione data si ha per fattore comune $x^\alpha$, e poi

$$a_0 \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) +$$
$$+ a_1 \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2) + \dots$$
$$+ a_{n-1} \alpha + a_n.$$

Perchè dunque l'equazione sia soddisfatta è necessario che questa ultima espressione sia zero, cioè che $\alpha$ sia radice della equazione di grado $n$ in $\alpha$ che si ha ponendo eguale a zero questa espressione.

Risolvendo tale equazione algebrica si hanno $n$ valori per $\alpha$, cui corrisponderanno $n$ integrali particolari dell'equazione data; di qui può formarsi l'integrale generale nel solito modo.

§ 15. **Equazioni lineari di 2.° ordine.** — Vogliamo ora studiare in modo speciale l'equazione lineare di 2.° ordine:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = X \tag{1}$$

Se si conosce un integrale particolare di

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0 \tag{2}$$

allora si può abbassare l'ordine di (2) e si ha una equazione di primo ordine che si può sempre integrare; onde possiamo dire che in questo caso si potrà conoscere l'integrale generale di (2), donde poi, come si sa in generale, con sole quadrature si ricava l'integrale di (1).

*Per l'integrazione dell'equazione di 2.° ordine (1) basta dunque la conoscenza di uno solo integrale particolare di (2).*

Vogliamo mostrare come si può semplificare questo calcolo.

Sia $y_1$ l'integrale particolare di (2) in modo che:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y_1}{d x} + Q y_1 = 0. \tag{3}$$

Moltiplichiamo per $y_1$ la (1) e per $y$ la (3), e sottragghiamo. Si ha:

$$\left(y_1 \frac{d^2 y}{d x^2} - y \frac{d^2 y_1}{d x^2}\right) + P\left(y_1 \frac{d y}{d x} - y \frac{d y_1}{d x}\right) = X y_1$$

Poniamo:

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = z \qquad (4)$$

donde:

$$y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

e quindi l'equazione di sopra diventa:

$$\frac{dz}{dx} + Pz = X y_1.$$

Conosciamo l'integrale di questa equazione lineare di 1.° ordine che è:

$$z = e^{-\int P dx} \left[ \int X y_1 \, e^{\int P dx} + C \right].$$

Intanto da (4) si ha:

$$\frac{d \frac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2}$$

onde:

$$\frac{y}{y'} = \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2$$

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2 y_1$$

e così è trovato il valore di $y$ che è la soluzione di (1).

Vogliamo ora passare a dimostrare una proprietà interessante, trovata da Sturm, degli integrali particolari dell'equazione lineare omogenea di 2° ordine.

Se $y_1\, y_2$ sono due integrali particolari distinti di (2) il determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{d\,y_1}{d\,x} & \dfrac{d\,y_2}{d\,x} \end{vmatrix}$$

deve essere diverso da zero per qualunque valore di $x$ compreso nel campo che si considera, cioè la funzione

$$y_1 \frac{d\,y_2}{d\,x} - y_2 \frac{d\,y_1}{d\,x}$$

per qualunque valore di $x$ racchiuso nel campo considerato ha sempre lo stesso segno. Sia p. e. sempre positivo.

Allora se $y_1 = 0$ per $x = a$ e per $x = b$, si avrà per questi valori di $x$

$$y_2 \frac{d\,y_1}{d\,x} < 0$$

cioè $y_2$ e $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ saranno di segno contrario. Ora fra i due punti in cui si annulla $y_1$ vi sarà certamente un punto intermedio in cui si annulla la prima derivata $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ (pel teorema di Rolle), e quindi se $x$ va da $a$, a $b$, $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ deve mutar segno e quindi anche $y_2$ deve mutar segno dovendo il prodotto avere il medesimo segno sia in $a$ che in $b$, perciò $y_2$ deve essere zero in un punto compreso fra $a$ e $b$. Cioè *fra due punti consecutivi zero di* $y_1$, *esiste sempre un punto zero di* $y_2$, *e così analogamente fra due punti zero di* $y_2$ *esiste un punto zero di* $y_1$, *cioè i punti zero dei due integrali particolari* $y_1$ $y_2$ *dell'equazione differenziale lineare di 2.° ordine sono alternati.* Si suppone naturalmente sempre *la continuità delle funzioni*, altrimenti non potrebbe applicarsi il teorema di Rolle, nè potrebbero farsi tutte le altre deduzioni.

§ 16. **Sistemi di equazioni lineari simultanee.** — Immaginiamo $n$ equazioni contenenti $n$ funzioni $y, z \ldots$ di una variabile $x_1$ e le derivate di queste funzioni.

Allora ci possiamo proporre il problema di determinare queste funzioni.

Per fissare le idee immaginiamo che si abbiano due equazioni contenenti le funzioni $y, z$ e le loro derivate fino a quelle di 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0 \\ \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Allora poniamo:

$$\frac{dy}{dx} = u \quad , \quad \frac{dz}{dx} = v \qquad (2)$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} f\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0 \\ \varphi\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

le quali insieme con le (2) danno quattro equazioni contenenti le quattro funzioni $x$, $z$, $u$, $v$ e le loro derivate di 1.° ordine.

In generale si vede dunque *che dato un sistema di* n *equazioni differenziali contenenti* n *funzioni e le loro derivate di ordine superiore noi possiamo sempre ridurci ad un sistema di* m *equazioni* (m>n) *fra* m *funzioni e le loro derivate di 1.° ordine.*

In altri termini aumentando il numero delle equazioni e delle funzioni noi possiamo sempre abbassare l'ordine delle equazioni date. Così per es. se si ha una sola equazione con una sola funzione $y$ e le derivate di questa fino a quella di $r$.° ordine, evidentemente ponendo

$$\frac{dy}{dx}=z \quad , \quad \frac{dz}{dx}=u,\ldots$$

si avranno altre $r-1$ equazioni che insieme colla data formano $r$ equazioni fra le $r$ funzioni $y$, $z$, $u$.... e in tali equazioni entrano soltanto le derivate prime di queste funzioni. Ma evidentemente la risoluzione di questo sistema non dovrà offrire minori difficoltà che la risoluzione della primitiva equazione.

Vediamo ora come si può fare un procedimento inverso, cioè da un sistema di $n$ equazioni di 1.° ordine fra $n$ funzioni ricavarne un altro di un numero minore di equazioni differenziali di ordine superiore, fra un un numero minore di funzioni, e quindi in particolare una sola equazione differenziale con una sola funzione.

Per semplicità supponiamo il caso di tre sole equazioni con tre funzioni $y$, $z$, $u$.

Supponiamo risolute queste tre equazioni rispetto alle tre derivate prime di $y$, $z$, $u$, o più generalmente immaginiamo queste tre equazioni ridotte con processi di eliminazione alla forma:

$$f_1\left(x, y, z, u, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$f_2\left(x, y, z, u, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$f_3\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}\right)=0$$

Dall'ultima ricaviamo $y$ espresso per $x$, $z$, $u$, $\frac{du}{dx}$, e quindi derivando possiamo ricavare $\frac{dy}{dx}$ espresso per:

$$x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle due prime equazioni si hanno allora due equazioni del tipo:

$$\varphi_1\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$\varphi_2\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

le quali risolute rispetto a $\frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ possono trasformarsi in due altre equazioni del tipo:

$$\psi_1\left[x, z, u, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right]=0$$

$$\psi_2\left[r, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right] = 0$$

dalla seconda delle quali possiamo ricavare $z$ espresso per $x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$, e derivando si ha $\frac{dz}{dx}$ espresso per $x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$.

Sostituendo questi valori nella prima equazione si ha un'equazione differenziale di 3.° ordine colla sola funzione $u$.

Un analogo procedimento si potrebbe tenere in generale; del resto questo procedimento, esattissimo dal lato teorico, molte volte può offrire difficoltà pratiche, e quindi essere inattuabile.

Diventa invece attuabile quando le equazioni date sono equazioni differenziali lineari, e quindi sempre facilmente risolubili rispetto alle variabili che contengono.

Possiamo mostrare su di un esempio come si applica questo metodo nel caso delle equazioni lineari.

Siano date le due equazioni:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

Dalla seconda ricaviamo:

$$y = \frac{dz}{dx} + z$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}.$$

e quindi sostituendo nella prima si ha:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0$$

che è un'equazione lineare omogenea a coefficenti costanti.

L'equazione caratteristica corrispondente è

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

cioè

$$(t+2)^2 = 0$$

e quindi si hanno due integrali particolari

$$e^{-2x} \quad , \quad x e^{-2x}$$

per modo che l'integrale generale è:

$$z = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

e quindi:

$$y = (c_2 - c_1) e^{-2x} - c_2 x e^{-2x}.$$

§ 17. **Equazioni differenziali d'ordine superiore.** — Fra le equazioni differenziali di ordine superiore al primo non abbiamo considerato che le cosiddette equazioni lineari. Ora vogliamo studiare altri tipi di equazioni.

1. Si abbia un'equazione contenente solo la derivata $n^{ma}$ di $y$, cioè del tipo:

$$f\left[\frac{d^n y}{d x^n}, x\right] = 0$$

Risolvendola rispetto a $\frac{d^n y}{d x^n}$ si ha

$$\frac{d^n y}{d x^n} = X$$

dove $X$ è una funzione di $x$. Con ciò l'equazione è ridotta alla forma lineare.

Per integrarla si potrebbe adoperare il metodo generale sviluppato nei paragrafi precedenti ricordando che l'integrale generale dell'equazione corrispondente senza secondo membro

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

è:

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Però in questo caso la cosa si semplifica, perchè dall'equazione di sopra si può ricavare coll'integrazione:

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-2}} = \int X d x + C_1$$

da cui, integrando daccapo, si ha:

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = \int d x \int X d x + C_1 x + C_2$$

e così continuando si giunge finalmente al valore di $y$.

2. Consideriamo un'equazione nella quale non compariscono che due derivate successive:

$$f\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right]=0.$$

Ponendo:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p$$

si avrà

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{dp}{dx}$$

e allora l'equazione è ridotta a:

$$f\left[p, \frac{dp}{dx}\right]=0$$

e quindi risolvendola rispetto a $\frac{dp}{dx}$ si ha:

$$\frac{dp}{dx}=\varphi(p)$$

donde:

$$x=\int\frac{dp}{\varphi(p)}+\text{cost.}$$

Se di qui ricaviamo poi $p$ in funzione di $x$:

$$p=\psi(x)$$

abbiamo:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x)$$

e questa è una equazione del tipo ultimamente considerato.

Come esempio si potrebbe scegliere l'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}$$

che dà per integrale

$$y = c_1 + \frac{e^{x-c_2} + e^{-(x-c_2)}}{2}.$$

3. Consideriamo ora un'equazione nella quale compariscono solo due derivate i cui ordini differiscano di due unità:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left[\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right].$$

Poniamo

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p$$

donde

$$\frac{d^n y}{dx_n} = \frac{d^2 p}{dx^2}$$

e quindi l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 p}{d x^2} = f(p)$$

Poniamo in quest'ultima equazione:

$$\frac{d p}{d x} = q \quad \frac{d^2 p}{d x^2} = \frac{d q}{d x} = \frac{d q}{d p} q$$

e abbiamo:

$$q \frac{d q}{d p} = f(p)$$

donde

$$q \, d q = f(p) \, d p$$

e integrando si ha:

$$\frac{1}{2} q^2 = \int f(p) \, d p + C$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d p}{d x}\right]^2 = \int f(p) \, d p + C$$

donde

$$d x = \int \frac{d p}{\sqrt{2 \int f(p) \, d p + 2 C}}.$$

Integrando si ha infine:

$$x = \int \frac{d p}{\sqrt{2 \int f(p) \, d p + 2 C}} + C_1.$$

Da questa equazione ricavando $p$ in funzione di $x$ e sostituendolo in:

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = p$$

resta da integrare ancora un'equazione del tipo considerato sul principio di questo paragrafo.

4. Vogliamo finalmente considerare il caso in cui l'equazione differenziale data sia omogenea di grado $m$ rispetto alla $y$ e alle sue derivate.

Allora si può abbassare l'ordine dell'equazione di una unità e per ciò fare si può adoperare il seguente metodo.

Poniamo:

$$y = e^z .$$

Le derivate di $y$ si esprimeranno per mezzo delle derivate degli stessi ordini di $z$, e avranno sempre per fattore l'esponenziale $e^z$. Questo comparirà allo stesso grado $m$ in tutti i termini, e quindi si può sopprimere e resta un'equazione contenente le derivate di $z$ senza contenere esplicitamente $z$.

Posto quindi allora

$$\frac{d z}{d x} = u$$

si abbassa l'ordine dell'equazione.

Questo stesso metodo si può esporre sotto altra forma, che compendia le due successive sostituzioni di prima.

Poniamo

$$y' = u\, y.$$

Allora

$$y'' = u'\, y + u\, y' = u'\, y + u^2\, y = y\,(u' + u^2)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Tutte le derivate di $y$ risultano col fattore $y$ stesso, e quindi per la supposta omogeneità dell'equazione, tutti i termini verranno a contenere $y^m$ per fattore. Soppresso questo fattore resterà una equazione in $u$ di ordine $n-1$, se la data era di ordine $n$.

§ 18. **Integrazione per serie.** — Dopo aver studiato i vari metodi per l'integrazione di una equazione differenziale non ci resta che studiare il metodo dell'*integrazione per serie*, che, quando riesce, rappresenta l'ultimo espediente che si può tentare per risolvere l'equazione.

Sia data una equazione differenziale:

$$f(x, y, y' \ldots y^n) = 0$$

L'integrale generale di questa, come già sappiamo, deve essere una funzione di $x$ con $n$ costanti $c_1\, c_2 \ldots c_n$ tale che per ogni valore $x = x_0$ compreso in un certo campo di variabilità di $x$, assegnati ad $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ valori arbitrari $y_0\, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$ si possano sempre trovare per le costanti $c$ valori che vi corrispondono cioè che facciano che per $x = x_0$ lo $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ acquistino effettivamente i valori fissati.

Consideriamo allora un punto $x = x_0$ e immaginiamo sviluppato l'integrale $y$ ignoto nell'intorno del punto $x_0$ mediante la formola di Taylor.

Si ha:

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y''_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, y_0^{(n+1)} + \ldots$$

Intanto dall'equazione differenziale si ricava:

$$y^{(n)} = \varphi\,(x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)})$$

e derivando consecutivamente si hanno le altre formole · (2)

$$y^{(n+1)} = \psi\,(x\, y\, y' \ldots y^{(n)}).$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Da queste relazioni si possono avere i valori di

$$y^{(n)}\, y^{(n+1)} \ldots \text{ per } x = x_0$$

quando si son fissati arbitrariamente i valori di

$$y\, y' \ldots y^{(n-1)}.$$

Tali valori sieno $y_0^{(n)}\, y_0^{(n+1)} \ldots$

Sostituendoli allora nella formola (1) si ha una funzione $y$ espressa per una serie in $x$, e nella quale ci entrano le $n$ quantità costanti arbitrarie $y_0 \ldots y_0^{(n-1)}$.

Ora se questa serie è convergente in un certo campo attorno $x_0$, essa può considerarsi come l'integrale generale nell'intorno del punto $x_0$, e se di essa se ne potrà effettuare la somma si avrà allora l'integrale generale sotto forma finita.

Ma potrebbe accadere che le equazioni (2) per

$$x = x_0 \quad \text{e} \quad y = y_0 \quad y' = y'_0 \ldots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

diano luogo a delle incompatibilità (per es. che alcune $y^{(r)}$ diventassero infinite), a togliere le quali bisognerebbe mutare i valori fissati arbitrariamente, e allora la (1), anche che sieno soddisfatte tutte le condizioni di convergenza, non potrà più considerarsi come integrale generale, ma come un integrale particolare, perchè per l'integrale generale è necessario che i valori di $y$, $y'$, $\ldots y^{(n-1)}$ possano essere assolutamente arbitrari. Ciò significherà che l'integrale generale non potrà svilupparsi in serie di Taylor nell'intorno del punto $x_0$.

Un esempio che si presenta assai bene per rischiarare il metodo sviluppato ci è fornito dalla cosiddetta *equazione di Bessel*, che ha la forma:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{m}{x} \frac{d y}{d x} + n y = 0.$$

È una equazione lineare omogenea di 2.° ordine. Avendosi da essa

$$x y'' + m y' + n x y = 0 \tag{3}$$

si ha derivando

$$\left.\begin{array}{r} x y''' + (m+1) y'' + n x y' + n y = 0 \\ x y^{IV} + (m+2) y''' + n x y'' + 2 n y' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (4)$$

e la legge di formazione è evidente.

Qui si vede appunto che per $x_0 = 0$ non può prendersi arbitrariamente $y_0$ e $y'_0$, perchè se non si prende per es. $y'_0 = 0$ si ha che $y'_0$ diventa infinito. Quindi l'integrale *generale* della nostra equazione non potrà svilupparsi in serie di Taylor nell'intorno del punto $x = 0$.

Con questo metodo dunque potremo solo ricavare un integrale particolare nell' intorno del punto $x = 0$.

Poniamo

$$x = x_0 = 0 \qquad y = y_0 \qquad y' = y'_0 = 0$$

e allora dalle equazioni (4) precedenti si ha:

$$y''_0 = -\frac{n\,y_0}{m+1}$$

$$y''' = 0$$

$$y''''_0 = +\frac{3\,n^2\,y_0}{(m+3)\,(m+1)}$$

. . . . . . . . . . . .

(si noti che nella prima delle (4) per $x = 0$ scompare $y'''$, quindi è da essa che si ricava $y''$, e così dalla seconda delle (4) si ricava $y''$ e così di seguito).

Sostituendo si ha dunque l'integrale

$$y = y_0 \left[ 1 - \frac{1\,.\,n\,.\,x^2}{2\,!\,(m+1)} + \frac{1\,.\,3\,.\,n^2\,x^4}{4\,!\,(m+1)\,(m+3)} - \ldots \right]$$

Il termine generale di questa serie è:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\,r+1)\,n^{r+1}\,x^{2r+2}}{(2\,r+2)!\quad(m+1)\,(m+3)\quad(m+2\,r+1)}$$

ed è facile vedere che il rapporto di un termine al precedente tende a zero e perciò possiam dire che la serie è convergente per ogni valore di $x$ finito. Esso rappresenterà un integrale particolare dell'equazione di Bessel.

Per $m = 1$, $n = 1$ si ha:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \dots \right).$$

La quantità dentro parentesi è una funzione conosciuta in analisi sotto il nome di *funzione di Bessel.*

Per $m = 2$, $n = 1$ si ha la funzione:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \dots \right)$$

di cui il secondo membro non è altro che

$$y_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

come si vede facilmente ricordando la serie di sviluppo del *seno.*

§ 19. **Equazioni a derivate parziali.** — Finora abbiamo considerato funzioni di una sola variabile, le quali danno luogo alle equazioni differenziali ordinarie.

Immaginiamo ora una funzione di più variabili indipendenti, quindi una relazione fra la funzione, le variabili indipendenti e le sue derivate parziali rispetto a queste variabili.

Il problema che ci proponiamo è quello di ritrovare mediante l'equazione a derivate parziali la forma più generale della funzione che vi corrisponde, e che si chiamerà l'integrale dell'equazione data.

Cominciamo a considerare un caso assai semplice di equazioni a derivate parziali. Si abbia un'equazione:

$$f\left(x\, y\, z\, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

dove si debba considerare $z$ funzione di $x$ e $y$, mentre che nella equazione non entra che solo la derivata di $z$ rispetto ad $x$ e non quella rispetto ad $y$.

Allora considerando $y$ come costante, si può integrare l'equazione che ne risulta che è allora una equazione differenziale ordinaria.

Fatta questa integrazione si ha:

$$z = \varphi\,(x\, y\, c)$$

dove $c$ è la costante d'integrazione. Questa funzione $z$ soddisfa alla equazione data nel senso che ricavata da essa la derivata parziale $\frac{d\,z}{d\,x}$ ed eliminando $c$ si ricade nell'equazione data.

Ma allora è evidente che se invece di considerare $c$ come costante, si considera come una funzione arbitraria di $y$, poichè la $\frac{d\,z}{d\,x}$ verrà allora espressa nella stessa maniera come prima, anche in tal caso la $z$ continuerà a soddisfare l'equazione data; quindi nella risoluzione delle equazioni a derivate parziali si presenta già questo fatto, che cioè nell'espressione dell'integrale, più che una costante arbitraria, può entrare una funzione arbitraria.

*Non possiamo passare a studiare la teoria generale delle equazioni a derivate parziali, ma ci limitiamo solamente a quelle di 1.° ordine e lineari rispetto alle derivate.*

Consideriamo il caso di due variabili indipendenti $x$, $y$.

Allora la forma generale di un'equazione a derivate parziali e lineari rispetto alle derivate è

$$Pp + Qq = R \tag{1}$$

essendo $p$, $q$ le derivate di $z$ rispetto ad $x$ e $y$, ed essendo $P$, $Q$, $R$ funzioni di $z$, $x$, $y$.

Ora dico che la risoluzione di questa equazione si può ridurre a quella di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Sia $u =$ cost. una funzione di $x$, $y$, $z$, soluzione (supposto che esista) della equazione data. Allora ricavandone

$$p = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}} \qquad q = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

e sostituendoli nella proposta equazione, questa deve essere identicamente soddisfatta, cioè deve essere:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

e se si suppone che esista un'altra soluzione:

$$v = \text{cost.}$$

diversa dalla precedente, si ha analogamente:

$$P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

ed essendo poi

$$\frac{\partial u}{\partial x} d x + \frac{\partial u}{\partial z} d y + \frac{\partial u}{\partial z} d z = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} d x + \frac{\partial v}{\partial y} d y + \frac{\partial v}{\partial z} d z = 0$$

si ha che i $d x$, $d y$, $d z$ ricavati dalle due relazioni:

$$u = \text{cost.} \qquad v = \text{cost.}$$

devono essere tali che:

$$\frac{d x}{P} = \frac{d y}{Q} = \frac{d z}{R} \tag{3}$$

cioè debbono essere proporzionali a $P$, $Q$, $R$.

Ora le due equazioni (2) possono ritenersi come formanti un sistema di due equazioni differenziali ordinarie nelle quali due delle tre variabili $x$, $y$, $z$ si considerano funzioni della terza.

Questo sistema, come sappiamo, ammette sempre una soluzione, cioè si possono sempre trovare *due* relazioni fra $x$, $y$, $z$ tali che da esse ricavando due di quelle variabili in funzione della terza si abbiano due funzioni soddisfacenti il sistema (2).

Questi due integrali saranno precisamente:

$$u = \text{cost.} \qquad v = \text{cost.}$$

di cui ciascuno rappresenterà un integrale della equazione a derivate parziali.

In questa maniera possiamo trovare due integrali distinti dell'equazione data. I due integrali compariscono risoluti rispetto a due costanti arbitrarie.

Ma adesso è facile vedere che si può ricavare ancora una soluzione molto più generale. Si può cioè mostrare che la espressione:

$$u = \varphi(v)$$

dove $\varphi$ è simbolo di *una funzione arbitraria*, soddisfa anche all'equazione data.

Infatti da tal nuova relazione fra $x$, $y$, $z$ (contenute in $u$, $v$) si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = \varphi'(v) \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = \varphi'(v) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q\right]$$

donde

$$p = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

$$q = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

e quindi sostituendo nell'equazione data si ha:

$$-\varphi'(v)\left[P\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}Q+R\frac{\partial v}{\partial z}\right]+$$
$$+\left[\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R\right]$$

che è evidentemente zero qualunque sia la funzione $\varphi$, perchè i due termini in parentesi sono zero.

Si ha dunque questo risultato interessante che, conosciuti gli integrali $u$, $v$, possiamo formare un integrale più generale introducendo il simbolo di una funzione arbitraria.

Tale integrale chiamasi l'*integrale generale dell'equazione a derivate parziali.*

Vogliamo ora passare ad un'applicazione di questa teoria.

1). *Vogliamo ricercare l'equazione di una superficie tale che il piano tangente in ogni punto sia parallelo ad una retta fissa.*

La retta condotta per l'origine delle coordinate sia:

$$aZ=X \quad , \quad bZ=Y$$

cioè:

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{+1}$$

essendo $a$, $b$ due costanti.

Il piano tangente in un punto di una superficie

$$z=f(xy)$$

è:

$$(X-x)p+(Y-y)q-(Z-z)=0$$

e la condizione perchè questo sia parallelo alla retta precedente è:

$$a p + b q - 1 = 0.$$

Per la determinazione della superficie siamo dunque giunti ad un' equazione a derivate parziali di 1.° ordine e lineare.

Applicando il metodo sviluppato avanti bisogna considerare il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d x}{a} = \frac{d y}{b} = \frac{d z}{1}$$

e ricavarne i due integrali risoluti rispetto alle costanti:

$$u = \text{cost.} \qquad v = \text{cost.}$$

Queste equazioni si possono scrivere:

$$\frac{d x}{d z} = a \qquad \frac{d y}{d z} = b$$

donde:

$$x = a z + \text{cost.}$$
$$y = b z + \text{cost.}$$

e quindi nel nostro caso:

$$u = x - a z$$
$$v = y - b z;$$

la soluzione generale sarà una funzione arbitraria di $u$ e $v$ eguagliata a zero, cioè l'equazione della superficie richiesta sarà

$$\varphi(x - a z\,,\ y - b z) = 0.$$

Ogni superficie di questa specie non è che un cilindro colle generatrici parallele alla retta fissa.

Infatti se $x\,y\,z$ è un punto della superficie e se:

$$x - a\,z = \alpha \qquad y - b\,z = \beta$$

è chiaro che ogni punto della retta di cui queste due sono le equazioni è anche un punto della superficie.

2). *Vogliamo trovare l'equazione di una superficie tale che il piano tangente in ogni punto passi per un punto fisso.*

Se $x_0\,y_0\,z_0$ è il punto fisso, la condizione pel piano tangente in un punto $x\,y\,z$ è

$$(x - x_0)\,p + (y - y_0)\,q = (z - z_0)$$

che sarà l'equazione a derivate parziali della superficie richiesta.

Per integrare questa equazione dobbiamo considerare il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\,x}{x - x_0} = \frac{d\,y}{y - y_0} = \frac{d\,z}{z - z_0}$$

che integrate danno:

$$\log(x - x_0) = \log(z - z_0) + \log C_1$$
$$\log(y - y_0) = \log(z - z_0) + \log C_2$$

o anche:

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1$$

$$\frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2$$

e quindi l'equazione della superficie sarà

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$$

dove $\varphi$ è una funzione arbitraria.

Queste superficie sono *coni* col vertice nel punto $x_0\, y_0\, z_0$. Infatti se $x\, y\, z$ sono le coordinate di un punto della superficie $\varphi=o$ allora evidentemente

$$\frac{x+\lambda x_0}{1+\lambda}, \frac{y+\lambda y_0}{1+\lambda}, \frac{z+\lambda z_0}{1+\lambda}$$

sono anche le coordinate di un punto della superficie, come si può subito verificare.