THEODOR VAHLEN

BALLISTIK

ZWEITE AUFLAGE

NEUBEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

UNTER MITWIRKUNG

VON

ALFRED KLOSE

MIT 65 ABBILDUNGEN

BERLIN 1942

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG – J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG – GEORG REIMER – KARL J. TRÜBNER – VEIT & COMP.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 35, Woyrschstraße 13

Archiv-Nr. 52 74 42 Printed in Germany

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

HERRN REICHSMINISTER
FÜR BEWAFFNUNG UND MUNITION

DR.-ING. FRITZ TODT

IN VEREHRUNG GEWIDMET

*

Vorwort zur ersten Auflage

Die deutsche ballistische Literatur besitzt das umfangreiche Werk von Cranz, durch die Fülle seines Stoffes, die vielen wertvollen Tafeln und die zahlreichen durchgerechneten Beispiele ein unentbehrliches Handbuch für den ballistischen Praktiker, für den Offizier und Waffentechniker. Wendet sich Cranz ausdrücklich an den Nichtmathematiker und vermeidet er deshalb möglichst mathematische Entwicklungen, so bringt das vorliegende Buch gerade den mathematischen Gehalt der Ballistik zur Darstellung, in der Erwägung, daß für wesentliche Fortschritte auf dem Gebiete der Ballistik die Mitwirkung der Mathematik unerläßlich ist. Die Auffassung der Ballistik als einer mathematischen Disziplin verlangte einen strengeren systematischen Aufbau. Als Wissenschaft muß sich die Ballistik frei nach ihren eigenen Gesetzen entwickeln. Zwar muß sie aus der Praxis Aufgaben, Anregungen und Erfahrungsergebnisse entnehmen und ihr dafür neue oder verbesserte Schießverfahren, Versuchsmethoden usw. zurückgeben. Wird aber aus dieser steten Fühlung mit der Praxis eine Führung durch die Praxis, so bleiben wissenschaftliche Ergebnisse von nicht gleich erkennbarem, praktischem Wert ungefördert. Der angedeuteten Gefahr ist die Ballistik nicht immer entgangen. Das ist der Hauptgrund für die auch von Cranz beklagte auffallend langsame Entwicklung der Ballistik gegenüber verwandten Wissenschaften. Die Praxis hat den Schaden davon, indem sie z. B. durch unrationelle Schießversuche oder durch Festhalten an falschen Formeln Munition vergeudet. Und wenn die Praxis der Theorie etwa in der Berücksichtigung des Höhenluftgewichts und des Höhenwindes voraus war, so wird doch erst durch die Theorie das Verfahren betreffend das Luftgewicht bestätigt und begründet, dasjenige betreffend den Höhenwind als falsch erkannt und durch das Richtige ersetzt. Daß dies erst in diesem Buche erfolgt, beweist das wirkliche Zurückbleiben der Ballistik. Weitere Beispiele sind, daß man bisher den Regen nicht richtig zu berücksichtigen wußte, daß man die periodischen Schußweitenänderungen mit wachsender Rohrerwärmung nicht deuten konnte, daß man mit falschen Flugbahnschwenkungen arbeitete, daß man einen wesentlich empirischen Drall anwandte, der die Züge beschädigte u. v. a. Diese Beispiele zeigen zugleich, wie das vorliegende Buch, obwohl theoretisch, doch niemals die praktischen Fragen aus den Augen verliert. Ja, es verdankt geradezu der Praxis seine Entstehung. Als der Verfasser für die ihm als Batteriechef und Abteilungskommandeur unterstellten Luftabwehrformationen praktische Schießverfahren aufstellen mußte, zeigte sich, daß noch nicht die beiden ersten Voraussetzungen hierzu erfüllt waren, nämlich: Kenntnis des geometrischen und zeitlichen Verlaufs der Flugbahn bei großen Erhöhungen und großen Anfangsgeschwindigkeiten, und: Möglichkeit, die Höhe des Luftziels zu messen. Letzteres erreichte der Verfasser sofort durch seinen Höhenmesser, der eine Reihe weiterer Vorrichtungen veranlaßte, ersteres führte ihn zu einer sehr einfachen und genauen Flugbahnzeichnung und zu neuen analytischen Entwicklungen, durch die eine bisher mehr geahnte als erkannte Zweiteilung der äußeren Ballistik hervortrat. Diese Zweiteilung ergab nicht nur ein wertvolles Einteilungsprinzip, sondern stellte die älteren Verfahren erst an ihren rechten Platz und in das rechte Licht. Insbesondere gilt dies von den Siaccischen Näherungsformeln. Für diese ergaben sich mehrere Abschätzungen der Genauigkeit in verschiedenen Schärfegraden, eine unentbehrliche Ergänzung aller Näherungsformeln, die aber hier merkwürdigerweise noch fehlte.

Nachdem der Verfasser einen Teil seiner Ergebnisse in einer Reihe von Aufsätzen und in wiederholten Vorlesungen veröffentlicht hatte, gewann für ihn die Ballistik als Ganzes eine neue Gestalt. Dem Wunsch nach Veröffentlichung kam die Verlagsfirma in dankenswerter Weise entgegen. Die nunmehr vorliegende Ballistik weist als neu noch die zwischen innerer und äußerer Ballistik einzuschaltende Übergangsballistik und als Ballistik in großen Höhen die kosmische Ballistik auf. Aber auch in dem alten Bestande der Ballistik wird der Kundige allenthalben Neues finden. So ist noch die neue Behandlung der konischen Pendelung und der Seitenabweichung hervorzuheben, ferner eine neue Theorie der Schußfaktoren, praktisch wichtige Bemerkungen über Streuungen u. v. a.

Wenn auch durchgängig, wie es der Gegenstand verlangt, mit den Methoden der Mathematik, besonders auch denen der angewandten, gearbeitet wird, so werden doch grundsätzlich die einfachsten und kürzesten bevorzugt bzw. eigens aufgesucht. Nur so war es möglich, den großen Stoff auf dem verfügbaren Raum darzustellen.

Für dieses Buch denke ich mir den sonstigen ballistischen Leserkreis erweitert durch die vielen Studierenden der mathematisch-physikalisch-technischen Wissenschaften, die im Felde Interesse an der Ballistik gewannen, wie ich es aus den mir oft zur Begutachtung zugegangenen ballistischen Arbeiten solcher entnommen habe. Dieses Interesse an der Ballistik auch weiterhin rege zu halten, zu vertiefen und zu eigenen Arbeiten anzuregen und dadurch die Ballistik als neues Fach neben die anderen Fächer der angewandten Mathematik zu stellen, soll mit zu den Aufgaben dieses Buches gehören.

Eldena bei Greifswald, Januar 1922.

Vahlen

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage erschien vor zwanzig Jahren nach beendetem Weltkrieg. Ich konnte meine eigenen Erlebnisse und Beobachtungen darin verwerten, über die ich zum Teil schon vorher einige Arbeiten veröffentlicht hatte. Die zweite Auflage wird als ein dringendes Bedürfnis empfunden, sie erscheint deshalb vor Abschluß des Krieges, was gewisse Rücksichten bedingt. Es kam vor allem darauf an, den eisernen Bestand der Ballistik einer Überprüfung zu unterziehen, die Methoden zu sichten, zu verbessern und für den praktischen Gebrauch in zweckmäßigste Formen zu bringen. Über Wünsche der Praxis war ich durch Aussprachen mit Dr. Georg Grötsch, jetzt Ballistiker in einem Rüstungsbetrieb, und mit Dr. Knoller, Dozent an der Technischen Hochschule in Wien, unterrichtet. Diplomingenieur Gustav Günther hat mich durch Zeichnungen und Rechnungen unterstützt, Dr. Plake, jetzt in einer Forschungsanstalt, durch ein sorgfältig durchgearbeitetes Stück der ersten Auflage. Ganz besonderen Dank schulde ich der Mitarbeit des Professors Dr. Alfred Klose, Direktors des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin, ohne dessen sachkundige und gewissenhafte Hilfe es mir so bald nicht möglich gewesen wäre, die Arbeit zu bewältigen. Das Kapitel über die praktischen Lösungsmethoden verdankt vor allem ihm seine jetzige Gestaltung. Beim Lesen der Korrekturen wurden wir von K. H. Boseck und E. Mohr unterstützt. Neben den strengen Methoden, die die unentbehrliche Grundlage für jede weitere Entwicklung bilden, legen wir doch auch Wert auf sogenannte Näherungsmethoden sowie auf Faustregeln. Nur müssen auch diese gut begründet und ihre Reichweite klargestellt sein. Wir hoffen, mit dieser zweiten Auflage dem erstrebten Ziel eines klaren und systematischen Aufbaues der Ballistik nähergekommen zu sein.

Berlin, im Oktober 1941.

Vahlen

Inhalt

Siebentes Kapitel

Achtes Kapitel

Neuntes Kapitel

Zehntes Kapitel

Elftes Kapitel

Zwölftes Kapitel

Dreizehntes Kapitel

Vierzehntes Kapitel

Fünfzehntes Kapitel

Sechzehntes Kapitel

Siebzehntes Kapitel

Achtzehntes Kapitel

Schrifttum

Bernoulli, Joh., Acta eruditorum p. 1453, Mai 1719 = Opera, II, p. 393ff., 513.
Euler, L., Neue Grundsätze der Artillerie (nach dem englichen Werk von Robins), Berlin 1745.
—, Recherches sur la véritable courbe ..., Abh. Kgl. Preuß. Akad., Berlin 1753.
Didion, J., Traité de balistique, Paris 1848.
Otto, Tafeln für den Bombenwurf, Berlin 1842.
Magnus, Über die Abweichung der Geschosse, Abh. Kgl. Preuß. Akad., Berlin 1852; Poggendorffs Ann. 88, 1, Berlin 1860.
Kummer, E. E., Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt, insbesondere auch auf die Geschosse, Abh. Kgl. Preuß. Akad., Berlin 1875/76.
Siacci, F., Balistica, Rom 1870/84, Turin 1888; Balistique, Paris 1892.
Majevski, N., Balistique (russ.), St. Petersburg 1870; (franz.), Paris 1872.
—, Über die Lösung des Problems des direkten und indirekten Schießens (russ.), St. Petersburg 1882; deutsch von Klußmann, Berlin 1886.
de Saint-Robert, P., Mémoires scientifiques, Turin 1872/74.
de Sparre, M., Mouvement des projectiles oblongs, Paris 1875.
—, Sur le mouvement des projectiles dans l'air, Paris 1891.
Heydenreich, W., Lehre vom Schuß, Berlin 1898.
Vallier, E., Balistique expérimentale, Paris 1894.
Groß, W., Berechnung der Schußtafeln, Leipzig 1901.
Charbonnier, Traité de balistique extérieure (2. Ed.), Paris 1904.
—, Balistique extérieure rationelle, Paris 1907.
—, Balistique intérieure, Paris 1908.
Cranz, C., Lehrbuch der Ballistik, Bd. I (5. Aufl.), Berlin 1925, Bd. II, Berlin 1926, Bd. III (2. Aufl.), Berlin 1927, Ergänzungsband, Berlin 1936.
Popoff, K., Das Hauptproblem der äußeren Ballistik, Leipzig 1932.
Lorenz, H., Ballistik (3. Aufl.), München u. Berlin 1935.
Hänert, L., Geschütz und Schuß (3. Aufl.), Berlin 1940.
Weitere Literatur s. Enz. d. mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Teil 3, S. 186ff.

Arbeiten von Th. Vahlen:

1. Beiträge zur Ballistik. I. Arch. Math. Phys. (3) 25 (1916), S. 209.
2. Beiträge zur Ballistik. II. Arch. Math. Phys. (3) 26 (1917), S. 119.
3. Eine neue Flugbahnzeichnung. Artilleristische Monatshefte, Heft 136/137 (1918), S. 145.
4. Über die Berücksichtigung der Tageseinflüsse. Artilleristische Monatshefte, Heft 141 (1918), S. 49.
5. Luftwiderstand schrägfliegender Geschosse. Artilleristische Monatshefte, Heft 147 (1919), S. 89.
6. Konische Pendelung und Seitenabweichung rotierender Langgeschosse. Artilleristische Monatshefte, Heft 153 (1919), S. 98.
7. Beanspruchung der Züge infolge des Dralls. Artilleristische Monatshefte, Heft 162 (1920), S. 199.
8. Ein Hilfsplan für indirektes Schießen. Artilleristische Monatshefte, Heft 158 (1920), S. 66.
9. Luftwiderstand bei großen Geschoßgeschwindigkeiten. Z. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 18 (1923), S. 120.
10. Flugbahnstörungen, Theorie und Praxis. Heerestechnik 2 (1924), S. 48.
11. Über die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt, insbesondere auch auf die Geschosse. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Jg. 1940, Nr. 10.
12. Neuere Lösungen der ballistischen Hauptaufgabe.

Arbeiten von A. Klose:

1. Zur Integration der ballistischen Gleichung. Deutsche Mathematik 2 (1937), S. 473.
2. Theorie der Luftkräfte bei verschwindender Reibung. Abh. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Jg. 1941.

Erstes Kapitel

Einführung. Koordinaten. Erdkrümmung

§ 1. Aufgabe und Einteilung

Ballistik ist die Lehre vom Schuß oder Wurf eines schweren Körpers, des Geschosses, im Luftraume. Sie ist als Zweig der Mechanik eine teils empirische, teils deduktive Wissenschaft. Wir behandeln hier hauptsächlich den deduktiven oder mathematischen Teil. Die Zeit, in der auf das Geschoß nur die Schwerkraft und der Luftwiderstand wirken, behandelt die „äußere" Ballistik. Als Anfangspunkt der (äußeren) Bahn ist der erste Punkt zu bezeichnen, von dem ab nur noch diese beiden Kräfte auf das Geschoß wirken. Die Zeit vom Anfang der Geschoßbewegung an bis zu dem Zeitpunkt, in dem das Geschoß anfängt aus dem Rohre auszutreten, behandelt die „innere" Ballistik. Die Zwischenzeit vom beginnenden Austritt bis zu dem Zeitpunkt, in dem die nachdringenden Pulvergase auf das Geschoß nicht mehr wirken, ist besonders wichtig für den Bewegungszustand des Geschosses im Anfangspunkt seiner Bahn. Sie wird im Kapitel XIV des vorliegenden Buches zum erstenmal einer besonderen Betrachtung unterzogen und dort als „Übergangsballistik" bezeichnet.

In der äußeren Ballistik genügte bisher die Annahme, daß die Erde eine ebene, unbewegte Scheibe ist, daß die Schwerkraft nach Größe und Richtung, und daß das Luftgewicht, von dem der Luftwiderstand abhängt, längs der ganzen Flugbahn konstant sind. Erst in neuerer Zeit mußte man Schußweiten und -höhen berücksichtigen, für die diese vereinfachenden Annahmen nicht mehr genau genug sind. Man kann daher der älteren Ballistik, als „niederen" oder „tellurischen" (von tellus = Scheibe), die neuere als „höhere" oder „kosmische" hinzufügen. Die kosmische wird im Kapitel XII des vorliegenden Buches zum erstenmal systematisch behandelt. Das Problem der kosmischen Ballistik wird namentlich unter der Voraussetzung gelöst, daß die störenden Einflüsse, durch die sie sich von der tellurischen unterscheidet, wie kleine Größen behandelt werden können. In noch höhere Sphären dringen unsere Geschosse noch nicht; dort ziehen die Meteore ihre Bahnen, deren Berechnung zu den Aufgaben der Himmelsmechanik gehört.

§ 2. Koordinaten

Wir legen im allgemeinen ein rechtwinkliges Koordinatensystem $x\,y\,z$ zugrunde, dessen Anfang O, der Geschützort, in (bzw. nahe) der Erdoberfläche liegt; die x-Achse sei waagerecht, positiv in der Schußrichtung nach vorn, die y-Achse waagerecht, positiv nach rechts, die z-Achse senkrecht, positiv nach oben. Nur zur Untersuchung des Einflusses der Erdkrümmung und -drehung führen wir ein rechtwinkliges System $X\,Y\,Z$ ein, dessen Anfang im Mittelpunkt der Erde liegt, die als Kugel vom Radius $R = \frac{2}{\pi} \cdot 10000\ \text{km} = 6366\ \text{km}$ angenommen wird. Die Richtungen der X-, Y-, Z-Achsen werden dadurch festgelegt, daß der Geschützort O in der nördlichen geographischen Breite Γ (> 0) die Koordinaten:

$$X_0 = 0\,, \quad Y_0 = R \cdot \cos\Gamma, \quad Z_0 = R \cdot \sin\Gamma$$

haben und das $X\,Y\,Z$-System mit dem $x\,y\,z$-System gleichsinnig sein soll. Die YZ-Ebene liegt also in der Meridianebene des Geschützes, die Z-Richtung weist nach dem Nordpol, die Y-Richtung nach dem Äquator. Zur Vermittlung zwischen beiden Systemen wird noch ein zu beiden gleichsinniges System $(x)\,(y)\,(z)$ eingeführt, mit dem Anfangspunkt O, der positiven (x)-Achse waagerecht nach Osten, der positiven (y)-Achse waagerecht nach Süden, also der positiven (z)-Achse senkrecht nach oben, nach dem Zenit des Geschützes.

Ist Λ das Azimut der x-Achse, und zwar der Winkel der positiven x-Achse mit der Südrichtung, positiv für südöstliche Richtungen, so gelten demnach die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{array}{ll|ll} (x) = x\sin\Lambda - y\cos\Lambda & & x = (x)\sin\Lambda + (y)\cos\Lambda \\ (y) = x\cos\Lambda + y\sin\Lambda & & y = -(x)\cos\Lambda + (y)\sin\Lambda \\ (z) = z & & z = (z) \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= (x) = x\sin\Lambda - y\cos\Lambda \\ Y - Y_0 &= (y)\sin\Gamma + (z)\cos\Gamma = x\cos\Lambda\sin\Gamma + y\sin\Lambda\sin\Gamma + z\cos\Gamma \\ Z - Z_0 &= -(y)\cos\Gamma + (z)\sin\Gamma = -x\cos\Lambda\cos\Gamma - y\sin\Lambda\cos\Gamma + z\sin\Gamma\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Denn dreht man das System $x\,y\,z$ um die z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \Lambda$ im Drehungssinn Süd—Ost—Nord—West, so kommt es mit dem System $(x)\,(y)\,(z)$ zur Deckung. Und dreht man das System $(x)\,(y)\,(z)$ um die (x)-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \Gamma$ im Drehungssinn Süd—Zenit—Nord—Nadir, so wird es zum System $X\,Y\,Z$ gleichlaufend.

§ 3. Erdkrümmung

Hat man die Koordinaten eines Punktes P einer Flugbahn gleich x, y, z berechnet, so ist z seine Höhe über der durch den Anfang O gelegten Horizontalebene. Für die Praxis braucht man aber die Höhe des Punktes P über der Erdoberfläche. Mit welchem Fehler kann man die erstere für die letztere nehmen? Der Punkt $P\ (x\,y\,z)$ hat vom Erdmittelpunkt die Entfernung $\sqrt{(R+z)^2+x^2+y^2}$, also über der Erdoberfläche die Höhe $\sqrt{(R+z)^2+x^2+y^2}-R$. Nimmt man z für diese, so begeht man den Fehler:

$$\sqrt{(R+z)^2+x^2+y^2}-R-z=(R+z)\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{(R+z)^2}+\cdots-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{R}+\cdots.$$

Demnach ist seine für Erdkrümmung berichtigte Höhe

$$z+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{R} \tag{3}$$

und sein Abstand vom Erdmittelpunkt

$$R+z+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{R}. \tag{4}$$

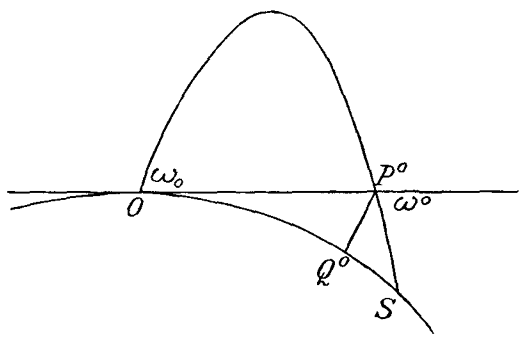

Abb. 1

Dabei sind Glieder höherer als erster Ordnung in $1/R$ weggelassen, d. h. es ist die Erdkrümmung $1/R$ als kleine Größe erster Ordnung angesehen.

Um zu beurteilen, ob der Fehler praktisch von Belang werden kann, sei für einen sehr weiten Schuß $\sqrt{x^2+y^2}=200/\sqrt{\pi}=112{,}8$ km, dann wird $\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{R}=1$ km. Diese Größe ist also nicht zu vernachlässigen.

Als Endpunkt der Flugbahn $P^0\ (x^0, y^0, z^0)$ wird der zweite in der Ebene $z=0$ liegende Punkt derselben bezeichnet, als Schußweite die Strecke $\sqrt{x^{0\,2}+y^{0\,2}}=O\,P^0$. Wegen der Erdkrümmung fliegt das Geschoß noch etwas weiter, ehe es auf der Erdoberfläche ankommt. Um wieviel?

Es sei Q^0 die Projektion von P^0 auf die Erdoberfläche. Dann ist auf der Erde der Bogen

$$\widehat{OQ^0}=R\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{O\,P^0}{R}=R\left(\frac{O\,P^0}{R}-\frac{1}{3}\left(\frac{O\,P^0}{R}\right)^3+\cdots\right)$$
$$=O\,P^0\cdot\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{O\,P^0}{R}\right)^2+\cdots\right).$$

Das Dreieck $Q^0 P^0 S$ kann unbedenklich als geradlinig und rechtwinklig angesehen werden. Es ist

$$\angle\, Q^0 P^0 S = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\widehat{O Q^0}}{R}\right) - |\omega^0|\,,$$

also

$$\widehat{Q^0 S} = Q^0 S = P^0 Q^0 \cdot \operatorname{ctg}\left(|\omega^0| - \frac{\widehat{O Q^0}}{R}\right)$$

und nach (4)

$$P^0 Q^0 = \frac{1}{2} O P^0 \cdot \frac{O P^0}{R}\,.$$

Der Kreisbogen zwischen Geschütz und Erdziel hat also die Länge

$$\widehat{O Q^0} + \widehat{Q^0 S} = O P^0 \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{O P^0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{O P^0}{R} \operatorname{ctg}\left(|\omega^0| - \frac{O P^0}{R}\right)\right) \cdot \qquad (5)$$

Das erste (stets negative) Zusatzglied macht in unserm Beispiel 0,01 ‰ der Schußweite, also 11 m aus. $O P^0/R$ in Graden beträgt 1^0, $|\omega^0|$ ist bei weiten Schüssen nahezu $\pi/2$. Setzen wir $|\omega^0| = \pi/2$, so macht das zweite (stets positive) Zusatzglied in (5) weniger als 0,02 ‰ der Schußweite, etwa 20 m, aus. Man kann also im allgemeinen

$$\widehat{O Q^0} + \widehat{Q^0 S} = O P^0$$

setzen.

Zweites Kapitel

Die wirkenden Kräfte

§ 4. Die Anziehungskraft der Erde

erteilt einem schweren Körper in der Nähe der Erdoberfläche eine Beschleunigung von $g = 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$ etwa, die aber im quadratischen Verhältnis der Entfernung vom Erdmittelpunkt abnimmt. Ist sie im Punkte (0, 0, 0) gleich g, so beträgt sie also im Punkte (0, 0, z) nur noch

$$g \cdot \frac{R^2}{(R+z)^2} = g\left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2} \doteq g \cdot e^{-\frac{\pi}{10^7} \cdot z}\,, \qquad (1)$$

mit einem Fehler $g\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \cdots$ oder $\frac{1}{4}\, g \cdot \left(\frac{\pi}{10^7} \cdot z\right)^2 + \cdots$. Die Angaben über den Koeffizienten von $\frac{z}{10^7}$ in (1) sind verschieden: mit Berücksichtigung der Erdabplattung erhält man einen etwas größeren Wert als π, die Messungen haben etwas kleinere Werte ergeben.

Diese Beschleunigung heißt die „wahre" Schwerebeschleunigung. Mit der Masse m des Körpers multipliziert, ergibt sie das wahre Gewicht G desselben. Dabei wird abgesehen von dem „Auftrieb", der gleich ist dem Gewicht der verdrängten Luft. Dieser beträgt bei Geschossen nur etwa $^1/_{5000}$ des Gewichts G. Wenn ein Liter Luft 1,2 g, ein Liter des Geschosses 6 kg wiegt, so ist nämlich $6000:1{,}2 = 5000$ das Gewichtsverhältnis von Geschoß zu Luft. Bei Geschossen im Wasser müssen wir den Auftrieb berücksichtigen.

Im Punkte (x, y, z) beträgt wegen § 3 (3) die wahre Beschleunigung

$$g\left(1 - \frac{2}{R}\left(z + \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + y^2}{R}\right)\right).$$

Sie macht dort aber mit der z-Richtung den Winkel $\frac{\widehat{OQ}}{R}$, dessen Tangens gleich $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R + z}$ war. Ihre Komponente in der z-Richtung ergibt sich also durch Multiplikation ihres Wertes mit $\cos\frac{\widehat{OQ}}{R}$, ihre Komponente in der x- bzw. y-Richtung durch Multiplikation mit $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin\frac{\widehat{OQ}}{R}$, bzw. mit $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin\frac{\widehat{OQ}}{R}$. Ihre Komponenten in diesen drei Achsenrichtungen sind also unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$g \cdot \frac{x}{R}, \quad g \cdot \frac{y}{R}, \quad g \cdot \left(1 - \frac{2}{R}z\right). \tag{2}$$

Die Zentrifugalkraft

Durch die Umdrehung der Erde erhält ein Massenpunkt $P\,(X\,Y\,Z)$ eine zentrifugale Beschleunigung, die nach Größe und Richtung gleich ist der Entfernung $\sqrt{X^2 + Y^2}$ des Punktes P von der Drehachse Z, multipliziert mit dem Quadrate der Umdrehungsgeschwindigkeit

$$\nu = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{sec}} = 0{,}000073\,\text{sec}^{-1}, \text{ also gleich ist } \nu^2 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Diese Zentrifugalbeschleunigung setzt sich mit der „wahren" Schwerebeschleunigung zu einer resultierenden Beschleunigung zusammen, die wir als „scheinbare" Schwerebeschleunigung (Fallbeschleunigung) bezeichnen. Diese ist nach Größe*) und Richtung von der wahren etwas verschieden.

---

*) Den Einfluß der geogr. Breite auf die Größe kann man durch den Faktor $(1 - 0{,}00264 \cdot \cos 2\Gamma)$ darstellen, mit dem $g_{45^\circ} = 9{,}8062$ multipliziert werden muß, um g_Γ zu ergeben.

Wir wollen die Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung des Punktes $P\,(XYZ)$ nach den Richtungen x, y, z berechnen. Die Komponenten von $\nu^2 \cdot \sqrt{X^2+Y^2}$ nach der X- und Y-Achse sind $\nu^2 \cdot X$ und $\nu^2 \cdot Y$; und deren Komponenten nach x, y, z bzw.

$$\nu^2 X \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \nu^2 X \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \nu^2 X \frac{\partial X}{\partial z}$$

und

$$\nu^2 Y \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \nu^2 Y \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \nu^2 Y \frac{\partial Y}{\partial z},$$

also nach § 2 die Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung nach x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} &\nu^2 (x \sin^2 \Lambda - y \sin\Lambda \cos\Lambda) \\ &+ \nu^2 (x \cos^2\Lambda \sin^2\Gamma + y \sin\Lambda \cos\Lambda \sin^2\Gamma + (R+z) \cos\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma), \\ &\nu^2 (- x \sin\Lambda \cos\Lambda + y \cos^2\Lambda) \\ &+ \nu^2 (x \sin\Lambda \cos\Lambda \sin^2\Gamma + y \sin^2\Lambda \sin^2\Gamma + (R+z) \sin\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma), \\ &\nu^2 (x \cos\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma + y \sin\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma + (R+z) \cos^2\Gamma). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die mit R multiplizierten Teile sind die Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung für den Punkt O $(0, 0, 0)$. Die Differenz der Zentrifugalbeschleunigungen für O und P hat also die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} &\nu^2 \{x (1 - \cos^2\Lambda \cos^2\Gamma) - y \sin\Lambda \cos\Lambda \cos^2\Gamma + z \cos\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma\}, \\ &\nu^2 \{- x \sin\Lambda \cos\Lambda \cos^2\Gamma + y (1 - \sin^2\Lambda \cos^2\Gamma) + z \sin\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma\}, \\ &\nu^2 \{x \cos\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma + y \sin\Lambda \sin\Gamma \cos\Gamma + z \cos^2\Gamma\}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Das Koeffizientensystem ist symmetrisch, die Diagonalelemente liegen zwischen 0 und 1, die andern zwischen -1 und $+1$.

Im XYZ-System sind die Komponenten derselben Differenz

$$\nu^2 \cdot (X - X_0), \qquad \nu^2 \cdot (Y - Y_0), \qquad 0,$$

also gleich einer Beschleunigung, die nach Größe und Richtung der ν^2-fachen Äquatorealprojektion von OP gleich ist. Demnach ist sie höchstens gleich $\nu^2 \cdot OP$, nämlich, wenn P und O in derselben Parallelkreisebene liegen, was z. B. bei westöstlichen Schüssen nahezu eintritt. Davon fällt in etwa 60^0 geogr. Breite die Hälfte in die Richtung der Schwerkraft, während $^7/_8$ $(\doteq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ horizontal wirken. Für einen Schuß mit $OP = 100$ km ergäbe das in Richtung der Schwerkraft

$$\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}000\,000\,0053 \cdot 100\,000 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2} = 0{,}27 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2},$$

also eine scheinbare Verminderung von g um etwa $2{,}7^0/_0$, die also bei so weiten Schüssen keineswegs zu vernachlässigen ist. Wie sie berücksichtigt wird, zeigen wir später (Kapitel XII).

Die Erde ist von der Sonne $150 \cdot 10^6$ km entfernt und umkreist sie mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\mathsf{N} = \frac{2\pi}{365\frac{1}{4} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \text{sec}} = 0{,}0^6 2 \text{ sec}^{-1}.$$

Das ergibt eine Zentrifugalbeschleunigung

$$N^2 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m} = 0{,}006\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-2},$$

also eine scheinbare Vergrößerung der Schwere in Richtung des Schattens um $0{,}6\,^0/_{00}$, die selbst bei den weitesten Schüssen zu vernachlässigen ist. Denn selbst wenn sie g im vollen Betrage vergrößert (bzw. nachts verkleinert), also wenn die Sonne im Zenit (bzw. Nadir) steht, verändert sie die Schußweite nur um weniger [§ 47 (13)] als $0{,}6\,^0/_{00}$, also bei 100 km um weniger als 60 m.

§ 5. Coriolis-Kraft

Die Lage eines Punktes P im Raume werde durch den Vektor $\mathfrak{r}$ bestimmt, der die Strecke OP nach Größe und Richtung gibt. Es sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t_1, t_2)$ eine Funktion von zwei Variablen t_1, t_2. Bei festem t_2, veränderlichem t_1 beschreibe P die Kurve $A, B, C, \ldots$, und zwar mögen diese Punkte den Werten $t_1, t_1 + dt_1$, $t_1 + 2\,dt_1 \ldots$ entsprechen. Bei festem t_1, veränderlichem t_2 beschreibe P die Kurve A, A_1, $A_2, \ldots$, und zwar mögen diese Punkte den Werten t_2, $t_2 + dt_2$, $t_2 + 2\,dt_2 \ldots$ entsprechen. Zugleich beschreibt B die Kurve $B, B_1, B_2 \ldots$ und C die Kurve $C, C_1, C_2, \ldots$ Deutet man t_1 als Zeitvariable, so soll die dadurch definierte Bewegung von P längs $ABC\ldots$ die relative Bewegung von P auf der Kurve $ABC\ldots$ heißen. Deutet man t_2 als Zeitvariable, so soll die dadurch definierte Bewegung der Kurve $ABC\ldots$ in die Lagen $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$ (die aber zugleich eine Deformation sein kann) die führende Bewegung heißen. Setzt man $t_1 = t_2 = t$, so bewegt sich P längs der Kurve $AB_1C_2\ldots$ Diese Bewegung heißt die zusammengesetzte.

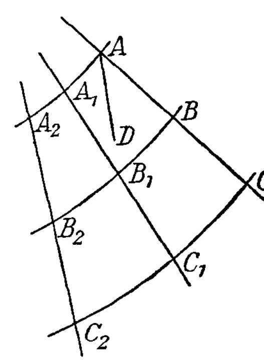

Abb. 2

Für das zweite Differential von $\mathfrak{r}$ ergibt sich:

$$d^2\mathfrak{r} = \frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_1^2}\,dt_1^2 + \frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_2^2}\,dt_2^2 + 2\,\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_1\,\partial t_2}\,dt_1 \cdot dt_2 .$$

Setzt man $t_1 = t_2 = t$, so erhält man hieraus für die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_1^2}\right)_{t_1 = t_2 = t} + \left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_2^2}\right)_{t_1 = t_2 = t} + 2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t_1\,\partial t_2}\right)_{t_1 = t_2 = t} .$$

Sie besteht also aus drei Teilen: der erste ist die Beschleunigung der relativen Bewegung, der zweite ist die Beschleunigung der führenden Bewegung, der dritte heißt nach seinem Entdecker die Coriolis-Beschleunigung. Es ist die doppelte Änderungsgeschwindigkeit der einen Geschwindigkeit infolge der andern Bewegung. Geometrisch wird das zweite Differential von $\mathfrak{r} = OP$ gleich $(OC_2 - OB_1) - (OB_1 - OA) = B_1C_2 - AB_1 = B_1C_1 + C_1C_2 - AA_1 - A_1B_1 = (B_1C_1 - A_1B_1) + (B_1B_2 - BB_1) + (C_1C_2 - AA_1) - (B_1B_2 - BB_1) = (B_1C_1 - A_1B_1) + (B_1B_2 - BB_1) + (C_1C_2 - B_1B_2 - AA_1 + BB_1)$. Die beiden ersten Klammern geben durch dt^2 dividiert die Beschleunigungen der relativen und der führenden Bewegung. Der dritte Teil ist der Zähler der Coriolis-Beschleunigung. Mit Rücksicht auf die vektoriellen Gleichungen:

$$C_1C_2 + C_2B_2 + B_2B_1 + B_1C_1 = 0$$
$$AA_1 + A_1B_1 + B_1B + BA = 0$$

schreiben wir ihn:

$$(B_2C_2 - B_1C_1) + (A_1B_1 - AB)\,.$$

Jetzt sei insbesondere die relative Bewegung geradlinig gleichförmig, also die Linien $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$, Gerade, die Strecken $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_2B_2 = B_2C_2 = \ldots$ Und es sei die führende Bewegung eine gleichförmige Rotation um eine Achse, also die Kurven $AA_1A_2\ldots$, $BB_1B_2\ldots$, $CC_1C_2\ldots$ koaxiale Kreise, die Bögen $\widehat{AA_1} = \widehat{A_1A_2} = \ldots$, $\widehat{BB_1} = \widehat{B_1B_2} = \ldots$, $\widehat{CC_1} = \widehat{C_1C_2} = \ldots$ Wegen $B_1C_1 = A_1B_1$ wird für die Coriolis-Beschleunigung:

$$(B_2C_2 - B_1C_1) + (A_1B_1 - AB) = B_2C_2 - AB\,.$$

Dies wird weiter gleich $AD - AB = BD$, wenn man den Vektor $AD = B_2C_2$ macht. Projiziert man jetzt die ganze Figur auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene, die wir als Äquatorebene bezeichnen wollen, und bezeichnet die projizierten Punkte mit (A), (B) usw., so sind die Strecken AB, B_2C_2, AD gleich und gegen die Projektionsebene gleich geneigt, also auch ihre Projektionen $(A)(B) = (A)(D)$. Also wird $BD = (B)(D) = (A)(B)\cdot \operatorname{arc}(B)(A)(D)$ und, weil $(B_2)(C_2) \parallel (A)(D)$, also $\operatorname{arc}(B)(A)(D)$ gleich dem Bogen $(A)(A_1)(A_2)$ gleich dem doppelten Bogen $(A)(A_1)$ ist, wird schließlich $BD = 2\cdot(A)(B)\cdot\widehat{(A)(A_1)}$, also die Coriolis-Beschleunigung $\dfrac{BD}{dt^2}$ gleich

$$2\cdot\frac{(A)(B)}{dt}\cdot\frac{\widehat{(A)(A_1)}}{dt}\,,$$

d. h. gleich dem doppelten Produkt aus der Äquatorealprojektion (v) der relativen Geschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit ν der führenden Bewegung. Sie ist parallel der Äquatorebene und dreht (v) im Drehungssinne der führenden Bewegung.

Jetzt sei der Punkt P der Schwerpunkt des Geschosses, die relative Bewegung sei seine momentane Bewegung mit der Geschwindigkeit v, die führende Bewegung sei die Drehung der Erde. Dann folgt:

Das Geschoß erleidet infolge der Erddrehung eine Coriolis-Beschleunigung; diese ist gleich

$$2 \cdot \nu \cdot v \cdot \sin \widehat{vZ} ,$$

sie liegt in der Parallelkreisebene von P und steht senkrecht auf v. Sie wirkt ablenkend auf v im Sinne der Drehung. Sind also $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ die Komponenten von v im XYZ-System, also $\dot{X}$, $\dot{Y}$ die Komponenten der Äquatorealprojektion von v, so sind $2\nu\dot{Y}$, $-2\nu\dot{X}$, 0 die Komponenten der Coriolis-Beschleunigung.

Sind also

$$X = \mathfrak{X}(t)$$
$$Y = \mathfrak{Y}(t)$$
$$Z = \mathfrak{Z}(t)$$

die Gleichungen der Flugbahn ohne Berücksichtigung der Coriolis-Beschleunigung, so sind

$$\ddot{X} = 2\nu \cdot \dot{Y} + \ddot{\mathfrak{X}}(t)$$
$$\ddot{Y} = -2\nu \cdot \dot{X} + \ddot{\mathfrak{Y}}(t)$$
$$\ddot{Z} = \qquad\qquad \ddot{\mathfrak{Z}}(t)$$

die Differentialgleichungen der Flugbahn unter Mitwirkung der Coriolis-Beschleunigung. Die Anfangsbedingungen für diese Gleichungen bestehen darin, daß erstens anfänglich, d. h. für $t = 0$, beide Bahnen in demselben Punkte $X_0 = \mathfrak{X}_0$, $Y_0 = \mathfrak{Y}_0$, $Z_0 = \mathfrak{Z}_0$ beginnen; und daß zweitens in diesem Punkte für beide Bahnen die Geschwindigkeiten gleich sind, also

$$\dot{X}_0 = \dot{\mathfrak{X}}_0 , \quad \dot{Y}_0 = \dot{\mathfrak{Y}}_0 , \quad \dot{Z}_0 = \dot{\mathfrak{Z}}_0 .$$

Demnach ergibt die Integration der dritten Gleichung sofort:

$$Z = \mathfrak{Z} ,$$

d. h. die Bewegung des Geschosses in Richtung der Erdachse bleibt durch die Coriolis-Beschleunigung unverändert, nur die Äquatorealprojektion der Bewegung ändert sich. Der Punkt XYZ passiert eine Parallelkreisebene zur selben Zeit wie der Punkt $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$.

Zur Integration der beiden ersten Gleichungen setzen wir, wenn $i = \sqrt{-1}$ bedeutet,

$$X + iY = S$$
$$\mathfrak{X} + i\mathfrak{Y} = \mathfrak{S};$$

dann kann man sie zusammenfassen in:

$$\ddot{S} = -2\nu i \dot{S} + \ddot{\mathfrak{S}} .$$

Diese Gleichung gibt einmal integriert:

$$\dot{S} + 2\nu i (S - S_0) = \dot{\mathfrak{S}} ,$$

denn am Anfang für $S = S_0$ soll auch $\dot{S} = \dot{\mathfrak{S}}$ sein. Erweitert man die integrierte Gleichung mit $e^{2\nu i t} \cdot dt$, so steht links das Differential von $e^{2\nu i t} \cdot (S - S_0)$; also wird $e^{2\nu i t}(S - S_0) = \int\limits_0 e^{2\nu i t} \cdot d\mathfrak{S}$. Die Integrationskonstante ist 0, weil für $t = 0$ $S = S_0$ werden soll. Trennt man die reellen und imaginären Teile, so erhält man

$$(X - X_0)\cos 2\nu t - (Y - Y_0)\sin 2\nu t = \int\limits_0 (\cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} - \sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y}),$$

$$(X - X_0)\sin 2\nu t + (Y - Y_0)\cos 2\nu t = \int\limits_0 (\sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} + \cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y})$$

oder auch:

$$\begin{aligned} X - X_0 = {} & \cos 2\nu t \int\limits_0 (\cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} - \sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y}) \\ & + \sin 2\nu t \int\limits_0 (\sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} + \cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y}), \\ Y - Y_0 = {} & -\sin 2\nu t \int\limits_0 (\cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} - \sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y}) \\ & + \cos 2\nu t \int\limits_0 (\sin 2\nu t \cdot d\mathfrak{X} + \cos 2\nu t \cdot d\mathfrak{Y}). \end{aligned}$$

Geht man von der Gleichung:

$$(S - S_0)\, e^{2\nu i t} = \int\limits_0 e^{2\nu i t}\, d\mathfrak{S}$$

zu der Ungleichung der absoluten Beträge über, so erhält man

$$|S - S_0| \leqq |\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0|,$$

d. h. für die Äquatorealprojektion gilt der Satz: In der für Coriolis-Beschleunigung berichtigten Bahn entfernt sich der Punkt nicht weiter vom Anfangspunkt O als höchstens um die Bogenlänge der unberichtigten. Danach kann man die Größe des Fehlers abschätzen, den man durch Vernachlässigung der Coriolis-Beschleunigung begeht.

Wir bilden einen möglichst ungünstigen Fall, indem wir einen Schuß in der Äquatorebene abgeben, so daß für die Flugbahn immer $Z = 0$ ist. Die Flugbahn ist dann mit ihrer Äquatorealprojektion identisch und der obige Satz, bezogen auf die ganze Flugbahn OP^0, lautet: Die Schußweite der berichtigten Flugbahn ist höchstens gleich der Bahnlänge der unberichtigten.

Ist x^0 die Schußweite der unberichtigten Flugbahn, so werden wir einen zu großen Bogen bekommen, wenn wir die Flugbahn als Parabel ansehen, die die Bahn am Ende tangiert. Für einen Parabelbogen s^0 mit der Sehne x^0 findet man bekanntlich mit elementaren Mitteln [§ 14 (42)]

$$\frac{s^0}{x^0} = \frac{\operatorname{tg}\omega^0 \cdot \sec\omega^0 + \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega^0}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\omega^0}.$$

Einige Werte dieses Quotienten gibt die Tabelle:

$\lvert\omega^0\rvert$	$s^0 : x^0$
5^0	1,00127
10^0	1,00516
15^0	1,01184
20^0	1,02165
25^0	1,03514
30^0	1,05306

aus der hervorgeht, daß z. B. bei 10^0 Fallwinkel der besagte Fehler im ungünstigsten Fall erst (etwa) 5‰ ausmachen kann.

Wie die Coriolis-Beschleunigung, wenn es bei sehr weiten Schüssen nötig werden sollte, zu berücksichtigen ist, wird im Kapitel XII gezeigt werden.

§ 6. Der Luftwiderstand abhängig von der Geschoßgeschwindigkeit

Zwischen dem Luftwiderstand W, der Masse m eines Körpers und der Verzögerung w durch den Luftwiderstand besteht die Beziehung

$$W = m \cdot w\,. \tag{5}$$

Wir können uns den Luftwiderstand in der folgenden Weise entstanden denken: Das Geschoß drängt bei seiner Bewegung durch die Luft immer neue Luftteilchen zur Seite. So entsteht, relativ zum Geschoß gesehen, eine Strömung der Luft. Diese unterscheidet sich in genügend großem Abstand vom Geschoß verschwindend wenig von einer Parallelströmung; in unmittelbarer Nähe des Geschosses aber ergeben sich je nach der Gestalt des Geschosses mehr oder weniger starke Abweichungen. Dadurch ändert sich die Druckverteilung in der Luft und in deren Gefolge die Druckverteilung längs der Oberfläche des Geschosses. Man bezeichnet den daraus resultierenden Widerstand als Druckwiderstand. Da der Druckwiderstand bei Geschossen sehr stark von der Gestalt (vor allem der Vorderseite) abhängt, spricht man auch oft vom Formwiderstand. Eine zweite Quelle des Widerstandes ist die physikalische Tatsache, daß die Luft (wie auch das Wasser) an der Oberfläche des Geschosses haftet. Die innere Reibung (die Zähigkeit) der Luft bewirkt daher eine zusätzliche Umwandlung der Strömung, die besonders stark in der nächsten Umgebung des Geschosses ist. Der daraus resultierende Widerstand wird Reibungswiderstand genannt. Drucke wirken immer normal zur Oberfläche, die Reibung dagegen wirkt tangential und entgegen der Strömungsrichtung. Man kann daher auch so sagen: Der Druckwiderstand ist die Resultante aus allen an den Oberflächenelementen des Geschosses angreifenden Normalkräften der strömenden Luft; der Reibungswiderstand ist die Resultante aus den am Geschoß angreifenden Tangentialkräften.

Bei Geschoßgeschwindigkeiten, welche beträchtlich unter der Schallgeschwindigkeit $\mathfrak{S}$ liegen, kann die Kompressibilität der Luft vernachlässigt werden. Bei Geschwindigkeiten unter 50 m/sec sind die Volumenänderungen der Luft im allgemeinen kleiner als 1%; bei 150 m/sec können sie schon bis auf 10% ansteigen. Bei noch größeren Geschwindigkeiten wird das Strömungsbild entscheidend durch die Dichteverteilung der Luft längs des Geschosses beeinflußt. Damit ändern sich auch Druck- und

Reibungswiderstand beträchtlich. Ist $v > \mathfrak{s}$, so bleiben die erzeugten Schallwellen hinter dem Flächenstück zurück. Vor dem Flächenstück staut sich die Luft zu größerer Dichte. Die vom Kopf aus gebildete Verdichtungswelle verläuft, wie die Bugwelle eines Schiffes, unter einem Winkel α gegen die Bahn des Flächenstückes, um so spitzer, je größer v gegen $\mathfrak{s}$ ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle in normaler Richtung ist gleich $\mathfrak{s}$, infolgedessen (vgl. Abb. 3) ist $\mathfrak{s}/v = \sin\alpha$. Das wird von Mach zur Ermittlung der Geschoßgeschwindigkeit benutzt. Hinter dem Flächenstück entsteht durch Luftverdünnung ein negativer Druck, ein „Sog"*), der seinen Maximalwert, eine Atmosphäre, erreicht, wenn die Luftverdünnung ihr Minimum, Luftleere, erreicht. Das tritt ein, wenn v den Wert $\mathfrak{s}'$ derjenigen Geschwindigkeit überschreitet, mit der die Luft in den leeren Raum einströmt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{s}'$ braucht man im Luftwiderstandsgesetz nicht ausdrücklich zu berücksichtigen, da sie sich durch $\mathfrak{s}$ ausdrückt. Die Höhe h der homogen angenommenen Atmosphäre gleichen Druckes an der Erdoberfläche verhält sich zur Höhe des Quecksilbers wie dessen Gewicht zum Luftgewicht, also ist $h = 10500 \cdot 0{,}76$ m $\doteq 8000$ m, also $\mathfrak{s}'^2 = 2gh \doteq 160000\ \mathrm{m^2 \cdot sec^{-2}}$, $\mathfrak{s}' = 400\ \mathrm{m \cdot sec^{-1}} = 1{,}2\,\mathfrak{s}$.

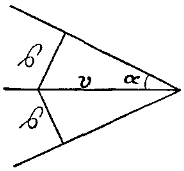

Abb. 3

Ist die Oberfläche des Geschosses glatt, so strömt die Luft nahezu parallel zur Oberfläche. Der Strömungsausgleich verteilt sich also gleichmäßig auf eine den Körper begleitende Luftschicht. Ist dagegen die Oberfläche rauh oder zeigt sie Vorsprünge (Führungsringe und ähnliches), so wird die Strömung in der Grenzschicht dauernd gestört. Stärker bewegte Luftteilchen dringen bis fast an die Geschoßoberfläche heran. Der Strömungsausgleich muß also in einer viel dünneren Schicht vor sich gehen. Das bewirkt eine beträchtliche Erhöhung des Reibungswiderstandes.

In einem ganz bestimmten Sinn wird der Luftwiderstand durch die Drehbewegung des Geschosses abgeändert. Wie das Experiment zeigt, schmiegt sich die Ausgleichsschicht unter dem Einfluß der Drehung besonders dicht an das Geschoß an. Das bewirkt im allgemeinen eine Verkleinerung des Druckwiderstandes und eine Vergrößerung des Reibungswiderstandes. Hinzu tritt eine seitliche Kraftkomponente, die das Geschoß aus seiner anfänglichen Bahnebene herausdrängt.

Wird das Geschoß beschleunigt (im absteigenden Ast der Geschoßbahn), so wird der Luftwiderstand vermehrt, da noch die Trägheit der zusätzlich zur Seite gedrängten Luftteilchen überwunden werden muß. Dieser Teil, den man gelegentlich Beschleunigungswiderstand nennt (es ist ein zusätzlicher Druckwiderstand), kann dadurch erfaßt werden, daß man die

*) Beim Geschoß saugt ein hohler Boden stärker als ein flacher, ein flacher stärker als ein gewölbter. Dadurch wirkt der Sog stabilisierend, d. h. er sucht die Geschoßachse der Bahntangente zu nähern, im Gegensatz zum Druck an der Spitze. Man vergleiche auch die Wirkung gekerbter Schiffsruder.

Masse des Geschosses entsprechend vermehrt. Wird das Geschoß verzögert (im aufsteigenden Ast), so tritt entsprechend eine Minderung des Druckwiderstandes ein, die einer Verkleinerung der Geschoßmasse gleichwertig ist.

Es ist bisher noch nicht geglückt, alle aufgezählten Einflüsse durch eine einheitliche Theorie zu erfassen. Wir können aber durch Dimensionsbetrachtungen immerhin feststellen, in welcher Form die verschiedenen Parameter in den Luftwiderstand eingehen müssen.

Ein kleines ebenes Flächenstück $\mathfrak{f}$ bewege sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Ebene durch die ruhende Luft von der Dichte (d. h. Masse durch Volumen) δ. Sein Luftwiderstand sei W. Bezeichnet man mit L, M, T bzw. die Dimensionen Länge, Masse, Zeit, so sind die Dimensionen von $\mathfrak{f}$, v, δ, W bzw. L^2, LT^{-1}, ML^{-3}, MLT^{-2}. Demnach läßt sich aus $\mathfrak{f}$, v, δ, W ein dimensionsloses Monom $W^{-1}\,\delta\,\mathfrak{f}\,v^2$ und kein zweites hiervon unabhängiges bilden. Besteht also zwischen $\mathfrak{f}$, v, δ, W allein eine Beziehung, so kann diese nur dahin lauten, daß das Monom $W^{-1}\,\delta\,\mathfrak{f}\,v^2$ einen konstanten Wert hat, daß also*)

$$W = K\cdot\delta\cdot\mathfrak{f}\cdot v^2 \tag{6}$$

ist, worin K eine numerische Konstante bedeutet, deren Wert im Mittel zu etwa $^1/_{12}$ angegeben wird. Das ist das Newtonsche Widerstandsgesetz, das erfahrungsgemäß in weitem Umfange mit guter Annäherung (wie schon Newton bewußt war) gilt. Voraussetzung für die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes ist, daß das Flächenstück so klein ist, daß es die Strömung praktisch ungeändert läßt. Bei größerer Ausdehnung wird die Strömung und daher auch der Druck beeinflußt. Trotzdem bleibt (6) noch immer gültig; nur der Wert der Konstanten K ändert sich. Das Newtonsche Gesetz verliert seine Gültigkeit, je näher v der Schallgeschwindigkeit $\mathfrak{s}$ liegt. Dann gilt auch die obige Herleitung nicht mehr, denn aus den fünf Größen $\mathfrak{f}$, v, δ, $\mathfrak{s}$, W lassen sich zwei und nur zwei voneinander unabhängige dimensionslose Monome bilden, z. B. $W^{-1}\,\delta\,\mathfrak{f}\,v^2$ und $v/\mathfrak{s}$; das Gesetz muß also in einer Beziehung zwischen diesen beiden Monomen bestehen, also die Form haben:

$$W = K\,(v/\mathfrak{s})\cdot\delta\cdot\mathfrak{f}\cdot v^2\,, \tag{7}$$

wo K eine noch zu ermittelnde Funktion ist.

Bei kleinen Geschwindigkeiten kommt die innere Reibung (Zähigkeit) der Luft zur Geltung, deren Maß der Reibungskoeffizient η ist. Die Widerstandskraft, die das Gleiten einer Luftschicht auf einer andern verzögert, ist direkt proportional der Berührungsfläche und der relativen Geschwindigkeit beider Schichten, umgekehrt ihrer infinitesimalen Entfernung. Der Proportionalitätsfaktor η ist also von der Dimension $ML^{-1}T^{-1}$. Infolgedessen gibt es zwischen δ, v, $\mathfrak{f}$ und η nur das Monom

$$R = \frac{\delta\cdot v\cdot\mathfrak{f}^{1/2}}{\eta}$$

*) Über die Berechtigung dieser Schlußweise vgl. die Anm. am Schluß des Buches.

von der Dimension 1 und kein hiervon unabhängiges. Also kann η nur in dieser „Reynoldsschen Zahl“ in K vorkommen. Das Auftreten von $\mathfrak{f}^{1/2}$, also einer Strecke, spricht dafür, daß die Reibung vom Wege der Luftteilchen längs der Geschoßoberfläche abhängt. Es sei jetzt

$$K = K\left(\frac{v}{\mathfrak{s}}, \frac{\eta}{\delta v\, \mathfrak{f}^{1/2}}\right)$$

und $\left(\frac{v}{\mathfrak{s}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta}{\delta v\, \mathfrak{f}^{1/2}}\right)^{\beta}$ das bei kleinem v zur Geltung kommende Glied von K. Nun ist erfahrungsgemäß W bei kleinen Geschwindigkeiten proportional v. Also folgt $\alpha - \beta + 1 = 0$ und dann wird W proportional

$$\delta^{1-\beta}\, \eta^{\beta}\, \mathfrak{f}^{1-\beta/2}\, v\,.$$

Setzen wir andererseits den Reibungswiderstand dem mittleren Weg s eines Luftteilchens längs des Geschosses proportional, so ergibt sich $\beta = 1$, $\alpha = 0$, W proportional $\eta \cdot s \cdot v$*). Erfahrungsgemäß gilt das nur für sehr kleine Geschwindigkeiten. Liegt die Geschoßgeschwindigkeit etwa bei 150 m sec^{-1}, so ergibt die Theorie W proportional $1/\sqrt{R}$, also muß $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ werden, d. h. die Schallgeschwindigkeit geht in der Form $\sqrt{v/\mathfrak{s}}$ ein.

Die empirisch ermittelten Tabellen von W/v^2 (vgl. Abb. 4) lassen erkennen, daß die Kurve K in der Nähe von $v = \mathfrak{s}$ am steilsten ist und dort einen Wendepunkt hat und daß dieselbe in der Nähe von $v = \mathfrak{s}'$ ein Maximum hat. Von 240 bis 50 und von 420 bis 550 ist W/v^2 ziemlich konstant, und zwar in letzterem Gebiet etwa 2,8mal so groß wie in ersterem. Die empirische Ermittlung des Gesetzes wird dadurch, besonders bei großen Geschwindigkeiten, beeinträchtigt, daß die Nähe der Erdoberfläche die Ausweichemöglichkeit der Luft erschwert und so den Luftwiderstand in einer mit der Flughöhe des Geschosses wechselnden Weise beeinflußt. Zur Herleitung eines „reinen“ Gesetzes müßte man diesen Einfluß erst ausschalten.

An jeder Stelle der Widerstandstabelle muß zwischen den Größen v, Δv, W, ΔW eine Beziehung bestehen, wenn mit Δv und ΔW die Differenzen an der Stelle bezeichnet werden. Da sich aus diesen vier Größen zwei und nur zwei voneinander unabhängige dimensionslose Monome, z. B. $\frac{\Delta v}{v}$, $\frac{\Delta W}{W}$ bilden lassen, muß zwischen diesen eine Beziehung bestehen und, da dieselben kleine Größen gleicher Ordnung sind, muß diese Beziehung linear sein:

$$\frac{\Delta W}{W} = n\,\frac{\Delta v}{v}\,.$$

Daraus folgt durch Integration

$$W = a\, v^{n}\,.$$

*) Hopf (Die Naturwissenschaften 1920, S. 107) nimmt von vornherein $\alpha = 0$, $\beta = 1$ an, was erst zu begründen ist.

Das ist das Bernoullische Widerstandsgesetz. Genau genommen hat der Exponent n an jeder Stelle der Tabelle einen etwas andern Wert, nämlich $\frac{\Delta W}{W} : \frac{\Delta v}{v}$. Aber er ändert sich so langsam, daß er zonenweise als konstant angesehen werden kann. Der Koeffizient a des Gesetzes hat an der

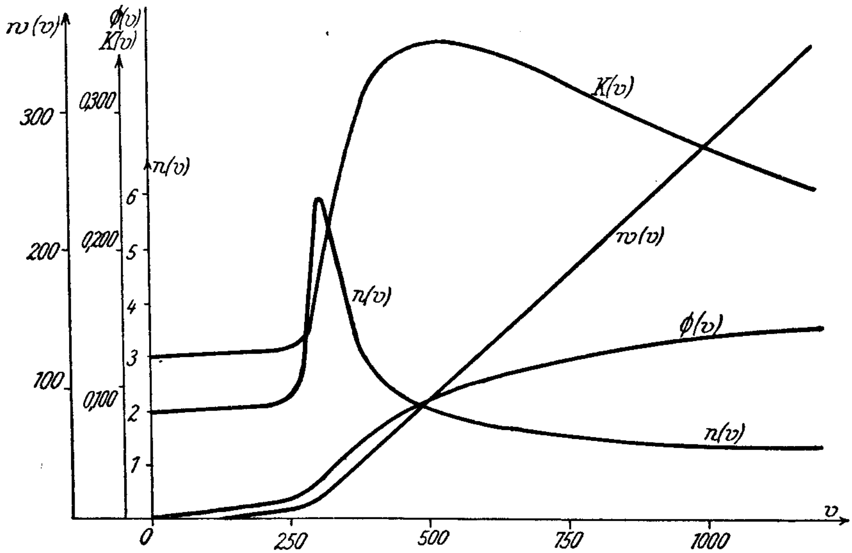

Abb. 4

Stelle v_0, W_0 den Wert $\frac{W_0}{v_0^n}$. Das Bernoullische Gesetz ist für die Lösung des ballistischen Problems insofern von Bedeutung, als für dasselbe die ballistischen Integrale integrabel werden. Man kann genähert setzen:

v m/sec	n	Autor
50— 240	2	Majevsky
240— 300	3	„
300— 375	5	„
375— 420	3	„
420— 550	2	„
550— 800	1,7	Sabudsky
800—1000	1,55	„
1000—1140	1,3	v. Eberhard

Derartige aus der Widerstandstabelle abgeleitete Gesetze besagen natürlich nicht mehr als diese, sondern weniger, da sie die Tabelle nur angenähert wiedergeben. Sie haben nur dann Wert, wenn sie, wie das Bernoullische, „integrabel“ sind. Das Problem in dieser Hinsicht ist nicht die Approximation der Tabelle durch eine Formel, sondern durch eine integrable Formel. Wir kommen später hierauf zurück (vgl. Kapitel VI und VII). Da die Widerstandstafeln sämtliche Einflüsse zusammenfassen, ist nicht ohne weiteres zu erkennen, gegen welchen Wert n bei großen Geschwindigkeiten konvergiert. Die obige Tafel legt es nahe, zu vermuten, daß bei sehr großen Geschwindigkeiten der Reibungswiderstand überwiegt, denn dieser ist nach der Theorie $v^{3/2}$ proportional.

Abb. 4 veranschaulicht den Verlauf von $w(v)$ für ein bestimmtes Geschoß (nach Bruno), den Exponenten $n(v) = v w'/w$ und die Funktionen $K(v) = w/v^2$ und $\Phi(v) = w/2v$.

§ 7. Der Luftwiderstand abhängig von der Geschoßform und -größe

Wenn auch die Art der Abhängigkeit des Luftwiderstandes W von der Geschwindigkeit v theoretisch nicht erkannt ist, so ist diese Abhängigkeit doch wenigstens empirisch genau genug ermittelt und in Tabellen niedergelegt. Für die Abhängigkeit des W von dem Flächenstück oder allgemeiner vom Querschnitt des Geschosses ist selbst dies nicht der Fall. Schon die Annahme, daß W demselben proportional sei, ist höchstens annähernd richtig. Hier tritt vielmehr folgende Schwierigkeit ein: Der Widerstand ist nicht addierbar, d. h. sind W und W' die Widerstände zweier ebener Flächenstücke $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$, so ist nicht $W + W'$ der Widerstand eines Flächenstückes $\mathfrak{f} + \mathfrak{f}'$, das durch Verbindung der beiden zu einem entsteht. Infolgedessen ist z. B. der Widerstand eines Flächenstückes $\mathfrak{f}$ verschieden, je nachdem, ob es quadratisch oder rechteckig oder kreisförmig ist. Man hilft sich durch die Hinzufügung eines „Formfaktors". Darin liegt die Annahme, daß der Widerstand aus zwei Faktoren besteht, von denen der eine nur von dem Flächenstück, der andere nur von der Geschwindigkeit abhängt. Auch diese Annahme ist nur näherungsweise richtig.

Betrachten wir jetzt ein ebenes Flächenstück $\mathfrak{f}$, das sich nicht senkrecht, sondern schräg zu seiner Ebene bewegt. Der spitze Neigungswinkel seiner Normalen gegen die Fortbewegungsrichtung sei ω. Man nimmt an, daß sich W um einen von ω abhängigen Faktor ändert, $F(\cos\omega)$; aber für diese Funktion F werden viele verschiedene Formen angegeben, z. B.

$$\cos\omega\,, \quad \cos^2\omega\,, \quad \cos^{1{,}618}\omega\,, \quad \frac{(1+\frac{1}{4}\pi)\cdot\cos\omega}{1+\frac{1}{4}\pi\cdot\cos\omega} \quad \text{usw.}$$

Diese verschiedenen Formen stimmen darin überein, daß $F(1) = 1$ und $F(0) = 0$ ist, d. h. daß vom Reibungswiderstand abgesehen wird. Wir nehmen im folgenden $F(\cos\omega)$ nicht irgendwie speziell an. Der von dem Flächenstück $\mathfrak{f}$ abhängige Faktor des Widerstandes $\mathfrak{f}\cdot F(\cos\omega)$ heiße die Widerstandsfläche. Der andere Faktor des Widerstandes hat jedenfalls die Dimension Kraft/Fläche, also die Dimension eines Druckes, und heiße deshalb Widerstandsdruck. Auch der Widerstand eines beliebigen Körpers läßt sich in Hinblick auf seine Dimension in die Faktoren Widerstandsdruck und Widerstandsfläche zerlegen. Die Widerstandstabelle liefert aber nur den Widerstand als Ganzes, und zwar für ein bestimmtes Geschoß, das Normalgeschoß der Tabelle. Man nimmt an, daß man aus dieser die Tabelle für ein anderes Geschoß erhält durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor. Diese Annahme ist nur annähernd richtig, für nicht zu große Geschwindigkeitsintervalle und für Geschosse, die nach Form und Größe von dem Normalgeschoß nicht zu sehr abweichen. Ein solcher von der Geschwindigkeit unabhängiger Faktor ist als Quotient der Widerstandsflächen des gegebenen und des Normalgeschosses anzusehen. Um nun diesen Faktor wenigstens annähernd vorauszuberechnen, berechnet man die Widerstandsfläche eines Geschosses, indem man die Widerstandsflächen der Oberflächenelemente summiert.

Kummer*) berechnet den Luftwiderstand eines nirgends konkaven Drehkörpers durch Summation der Widerstände seiner Oberflächenteilchen

$$d\sigma = \varrho \cdot d\varphi \cdot ds\,. \tag{8}$$

Hier ist ds das Bogenelement eines Meridians, $\varrho\, d\varphi$ das eines Parallelkreises vom Halbmesser ϱ, und φ der Winkel der Meridianebene mit ihrer Anfangslage, der durch die Geschoßachse und die Flugrichtung gegebenen Ebene. Demnach ist $k \cdot d\sigma$ der Widerstand des Teilchens $d\sigma$, wenn mit k derjenige eines Flächenstückes 1 bezeichnet wird. Es sei ω der Winkel zwischen der äußeren Normalen n von $d\sigma$ und der Flugrichtung des Körpers.

Statt des Faktors $\cos^2 \omega$, den Kummer nach dem Vorgange von Newton und Euler nimmt, nehme ich allgemeiner eine ganze Funktion $F(\cos\omega)$. Dann ist $k \cdot F(\cos\omega)\, d\sigma$ der Widerstand von $d\sigma$ und $k \cdot F \cdot \sin\varepsilon \cdot d\sigma$ seine Komponente in der Richtung der zur z-Achse genommenen Drehachse, wo ε das Komplement von $\angle\,(n, z)$ ist. Wegen (8) und

$$-\,d\varrho = ds \cdot \sin\varepsilon\,, \qquad dz = ds \cdot \cos\varepsilon \qquad \text{(Abb. 5)} \tag{9}$$

wird

$$k \cdot F \cdot \sin\varepsilon \cdot d\sigma = -\,k \cdot F \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot d\varphi\,, \tag{10}$$

wie Kummer etwas anders herleitet. Als Anfangspunkt nimmt Kummer die Mitte des Bodens, als x- und y-Achsen zwei zur z-Achse und unter sich senkrechte Achsen, und zwar die x-Achse in der Meridianebene $\varphi = 0$ (Abb. 6). Die Komponenten des Widerstandes von $d\sigma$ in der x- und in der y-Richtung werden also

$$\left.\begin{aligned} k \cdot F \cdot \varrho \cdot \cos\varepsilon \cdot \cos\varphi \cdot d\sigma &= k \cdot F \cdot \varrho \cdot dz \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \\ k \cdot F \cdot \varrho \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot d\sigma &= k \cdot F \cdot \varrho \cdot dz \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Komponenten X, Y, Z des Widerstandes des Körpers erhält man aus (10), (11) durch Integration. Es ist $Y = 0$, weil je 2 zur $x\,z$-Ebene symmetrisch liegende Flächenteilchen $d\sigma$ entgegengesetzte Werte von $\sin\varphi$ haben. Der Angriffspunkt der Resultante von X und Z liegt auf der

*) Sitzungsber. der Akademie der Wissenschaften Berlin 1875.

z-Achse, ist also gleich dem Angriffspunkt der X-Komponente, also der zur x-Achse parallelen Kräfte $kF\,\varrho\,dz \cos\varphi\, d\varphi$ mit den Ordinaten $z + \varrho \dfrac{d\varrho}{dz} = z - \varrho \operatorname{tg} \varepsilon$ (Abb. 5). Also wird seine Ordinate ζ bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} X\cdot\zeta &= k\cdot\iint (z-\varrho\cdot\operatorname{tg}\varepsilon)\cdot F\cdot\varrho\cdot dz\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi \\ &= k\cdot\int (z-\varrho\cdot\operatorname{tg}\varepsilon)\cdot F\cdot\cos\varepsilon\cdot\cos\varphi\cdot d\sigma\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

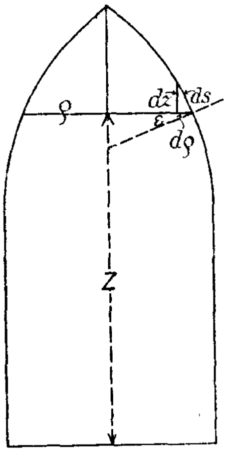

Abb. 5

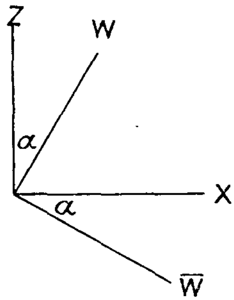

Abb. 6

Bei einer anderen Wahl des Koordinatenanfangs auf der z-Achse ändern sich ζ und z um den gleichen Betrag, so daß diese Formel gültig bleibt. Später verlegen wir den Anfangspunkt in den Schwerpunkt, aber vorläufig kommt von dem Geschoßmodell nur die Form in Betracht, nicht die Masse, deren Schwere durch zweckmäßige Aufhängung des Geschosses ausgeschaltet wird.

Diese Kummersche Berechnung von X, Z, ζ ist später buchstäblich übernommen worden, z. B. von Cranz, der aber $\cos^m \omega$ statt $\cos^2 \omega$ nimmt, während ich allgemeiner $F(\cos\omega)$ nehme. Die Berechnung der Integrale wird einfacher, wenn man die Meridiane des Körpers durch eine Gleichung $\varrho = \varrho_e$ vermittels einer ganzen Funktion ϱ_e von $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ darstellt. Dann sind die Integrale in endlicher Form einfach berechenbar. Insbesondere ist für ogivale Spitzen mit dem Ogivalradius R zu setzen:

$$\varrho_e = R\cdot\cos\varepsilon - (R-r)\,,$$

für halbkugelige Spitzen $\varrho_e = r\cdot\cos\varepsilon$.

Statt der Kummerschen Komponenten X, Z nehme ich zwei Komponenten W, $\overline{W}$, die erste in der Flugrichtung, die andere senkrecht dazu in der xz-Ebene (Abb. 6). Diese werden einfach

$$W = k\int F(\cos\omega)\cdot\cos\omega\cdot d\sigma\,,\qquad \overline{W} = k\int F(\cos\omega)\cdot\cos\overline{\omega}\, d\tilde{\sigma}\,, \tag{13}$$

wo $\omega = \angle\,(n, W)$, $\overline{\omega} = \angle\,(n, \overline{W})$ ist (Abb. 7).

Die Integrale W, $\overline{W}$ sind wie die Kummerschen X, Z über denjenigen Teil der Oberfläche zu erstrecken, der dem Druck der Luft ausgesetzt, in dem also $\cos\omega > 0$ ist. Für die dem Unterdruck (Sog) ausgesetzten Teile ist $\cos\omega < 0$ und gilt im übrigen dasselbe, nur gilt für den Sog $k(v)$ auf die Flächeneinheit ein anderes Gesetz, da der Druck mit wachsender

Geschwindigkeit v beständig, der Sog nur bis zu einer Atmosphäre wachsen kann.

Nun ist (Abb. 7)

$$\cos\omega = \sin\varepsilon\cos\alpha + \cos\varepsilon\sin\alpha\cos\varphi$$

und, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ für α gesetzt,

$$\cos\overline{\omega} = -\sin\varepsilon\sin\alpha + \cos\varepsilon\cos\alpha\cos\varphi\,.$$

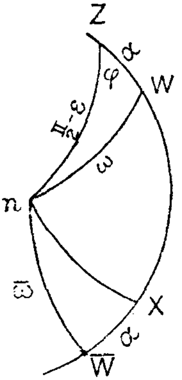

Abb. 7

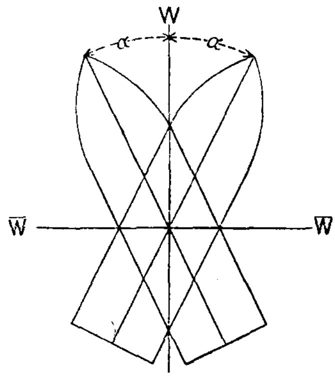

Abb. 8

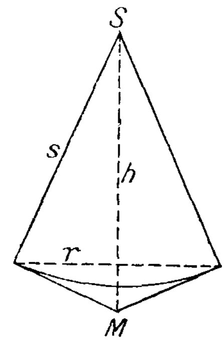

Abb. 9

Also ist nach (10), (11) und (13):

$$\left.\begin{aligned} W &= X\cdot\sin\alpha + Z\cdot\cos\alpha \\ \overline{W} &= X\cdot\cos\alpha - Z\cdot\sin\alpha \\ X &= W\cdot\sin\alpha + \overline{W}\cdot\cos\alpha \\ Z &= W\cdot\cos\alpha - \overline{W}\cdot\sin\alpha\,. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Auch diese Formeln setzen die Summierbarkeit der Widerstandsteile voraus, was nicht immer beachtet wird.

Für $\alpha = 0$ muß $W = Z \neq 0$, $\overline{W} = 0$ werden, also müssen $\overline{W}$ und X mindestens den Faktor $\sin\alpha$ enthalten, während W und Z ihn nicht enthalten können. Demnach ist wegen $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \cdots$ die niedrigste in W und Z enthaltene Potenz von $\sin\alpha$ die zweite.

Einfacher und mehr besagend folgt unmittelbar aus der Anschauung (Abb. 8): Wenn α sein Zeichen wechselt, wechselt auch $\overline{W}$ das Zeichen, während W es beibehält. Also:

Satz I: W ist eine gerade, $\overline{W}$ eine ungerade Funktion von $\sin\alpha$, wie ich auf anderem Wege schon 1918 gefunden und im März 1919 im Artilleristischen Monatsheft Nr. 147 veröffentlicht habe.

Der Widerstandspunkt von $d\sigma$ liegt auf dessen Normalen. Für eine schmale Zone σ_i liegt er also auf der Achse. Demnach teilt er bei einem Kegel der Höhe h und der Seite s (Abb. 9) die Strecke $SM = \frac{s^2}{h}$, auf der die

Angriffspunkte aller Zonen liegen, in demselben Verhältnis wie der Mantelschwerpunkt die Höhe, also im Verhältnis von 1 : 2, unabhängig von α. Das ergibt $\zeta = \frac{1}{3}\,\frac{r^2 + h^2}{h} - \frac{r^2}{h} = \frac{1}{3}\,h - \frac{2}{3}\,\frac{r^2}{h}$, wie auch Kummer durch seine Integrale findet.

Bei einer Bogenspitze ergibt sich die Ordinate ζ des Widerstandspunktes als Mittel aus den Ordinaten der Widerstandspunkte der Zonen σ_i, in die man die Spitze zerlegen kann: $\zeta = \frac{\sum \zeta_i \sigma_i}{\sum \sigma_i}$, also ist ζ bei einer Spitze, also auch für ein zylindrisches Geschoß mit Bogenspitze, eine gerade Funktion von α.

Ähnliche Berechnungen mit $F(\cos\omega) = \cos\omega$ hat ohne Bezug auf Kummer W. Groß*) durchgeführt. Er erhielt

$$\text{für } R = 4r\text{:}\quad W = k\,r^2\,(0{,}3655 + 1{,}3606\sin^2\alpha)$$
$$\text{für } R = 5r\text{:}\quad W = k\,r^2\,(0{,}3312 + 1{,}6344\sin^2\alpha)\,.$$

Diese Rechnungen von Groß werden in bezug auf die Art der Abhängigkeit des W von α durch die meinigen bestätigt und verallgemeinert. Ich mache von meiner Berechnung nur zur Herleitung des Satzes I Gebrauch; den Zahlenwerten der Koeffizienten lege ich keine Bedeutung bei, auch wenn man für $F(\cos\omega)$ die zutreffende Funktion kennen und einsetzen würde. Andererseits macht man von derselben Rechnung für den Fall $\alpha = 0$ zur annähernden Berechnung des Spitzenfaktors Gebrauch.

Cranz bemängelt (S. 72—80) bei Kummer 1. die Annahme, daß die tangentielle Komponente des Widerstandes, d. h. die Reibung, vernachlässigt wird. Das ist in der Mechanik vielfach nötig, um die Gesetze zunächst einmal für diesen Fall zu ermitteln. Z. B. sagt Prandtl (Handwörterbuch der Naturwissenschaften [IV 1913] S. 101 ff.): „Die Reibung bringt fast unüberwindliche Schwierigkeiten mit sich. Für die mathematische Behandlung muß man die Probleme zunächst idealisieren und dabei auf Berücksichtigung der Reibung verzichten." Auch andere Aerodynamiker verfahren entsprechend.

2. bemängelt Cranz: man kenne nicht den am besten zutreffenden Wert des Exponenten m in $\cos^m\omega$. Aber jede solche Annahme vernachlässigt die tangentielle Komponente. Deshalb habe ich den Faktor $\cos^m\omega$ durch den allgemeineren $F(\cos\omega)$ ersetzt und das vermutete Gesetz auf Grund dieser allgemeineren Annahme abgeleitet.

3. „ist das Abfließen der Luft am Geschoß, die Bildung von Wellen und Wirbeln nicht berücksichtigt und kann zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise mathematisch berücksichtigt werden."

4. bemängelt Cranz (S. 81) die geringen Geschwindigkeiten, die Kummer (s. u.) anwendet. Cranz übersieht, daß auch kleine Geschwin-

*) Berechnung der Schußtafeln, Leipzig 1901.

digkeiten vorkommen, z. B. beim Bombenabwurf, ferner bei Flugzeugen und Schiffen. Auch auf diese ist der auf die Abb. 8 gegründete Beweis meines Satzes I anwendbar, weil hierbei nicht die Symmetrie eines Drehkörpers, sondern nur die Symmetrie in bezug auf eine Mittelebene vorausgesetzt wird, wie sie auch bei Schiffen und Flugzeugen vorhanden ist. Die Einwände von Cranz finden sich schon bei Kummer selbst mit beachtenswerter Stellungnahme dazu. Daß man trotz der im Hinblick auf die verfügbaren Hilfsmittel vorgenommenen Vernachlässigungen doch noch zu brauchbaren Ergebnissen kommt, zeigt der Vergleich mit Meßreihen.

Zur Prüfung des Satzes über das Widerstandszentrum kann man die Kummerschen Versuche heranziehen. Für eine Granate mit der Mantelhöhe 112,5 mm, dem Radius 37,5 mm, der Spitzenhöhe (halbes Ellipsoid) 47,5 mm fand Kummer für den Abstand des Angriffspunktes vom Boden:

	$\zeta =$ 110	108	106	104	102	100 mm
den Winkel	$\alpha =$ 18	21	23	25	30	32 Grad.

Die Beziehung zwischen ζ und α läßt sich angenähert ausdrücken durch:

$$116 - \zeta = \frac{1}{54}\,\alpha^2\,,$$

denn diese Formel gibt für

$\zeta =$ 110	108	106	104 mm
$\alpha =$ 18	20,78	23,23	25,45 Grad.

Eine bessere Übereinstimmung kann bei diesen schon nicht mehr kleinen Winkeln nicht erwartet werden, auch sind die Kummerschen Werte für α wohl nur auf ganze Grade genau.

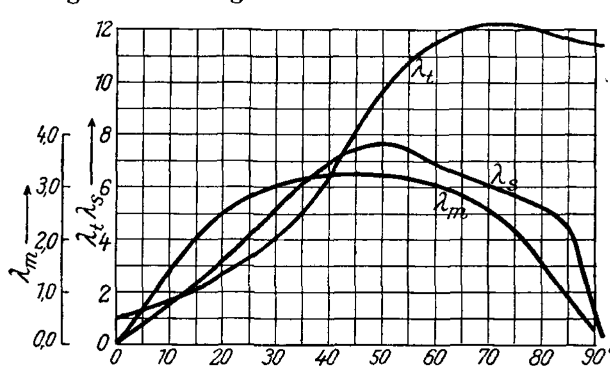

Abb. 10

Cranz berichtet (S. 83) über Versuche von Prandtl mit $v = 40{,}5$ m/sec im Windkanal, denen er Gültigkeit mindestens für Unterschallgeschwindigkeiten glaubt beilegen zu können. Prandtls λ_t, λ_s, λ_m sind erklärt durch

$$W_a = W_0 \cdot \lambda_t\,, \quad \overline{W}_a = W_0 \cdot \lambda_s\,, \quad M = W_0 \cdot \zeta \cdot \lambda_m\,,$$

wo M das Drehmoment des Luftwiderstandes um den Schwerpunkt ist. Für ζ nimmt Prandtl wie früher Charbonnier den Abstand Schwerpunkt—Spitzenmitte. Die Versuchsergebnisse zeigt Abb. 10. Für kleine α sind λ_s, λ_m proportional α, was meinem Satze I entspricht. Aus dem Verhältnis von $\lambda_m : \lambda_s$ würde sich der wahre Wert von ζ für kleine α ergeben. Man sieht, daß er für solche Werte konstant, also der Widerstandspunkt unabhängig von α ist. Daß mein Satz I auch für λ_t zutrifft, ist weniger deutlich zu erkennen, da die Werte für sehr kleine α extrapoliert sind. Immerhin erkennt man, daß die zweite Ableitung positiv, also λ_m durch eine Potenz von α höheren als ersten Grades approximiert wird.

Ohne Beziehung zu den Arbeiten von Kummer, Groß und den meinigen machte im Jahre 1934 die Aerodynamische Versuchsanstalt in Göttingen*) [Kaiser-Wilhelm-Institut] auf Veranlassung von Grötsch Widerstands- und Auftriebs**)-Messungen an Geschoßmodellen für eine Machsche Zahl 1,47, also etwa eine Geschwindigkeit von 500 m/sec. Das Ergebnis zeigt anschaulich die Abb. 11 und die folgende Tabelle:

α	Geschoß Nr. 2				Geschoß Nr. 3			
	0^0	4^0	8^0	12^0	0^0	4^0	8^0	12^0
$\overline{W}$	0	0,17	0,34	0,51	0	0,105	0,220	0,385
W	0,340	0,350	0,380	0,425	0,285	0,290	0,305	0,345

Die Beiwerte c_w und c_a der Abbildung hängen mit W, $\overline{W}$ zusammen durch: $c_w : c_a = W : \overline{W}$.

Man erkennt deutlich, daß

$$1.\quad \overline{W}_{8^0} = 2 \cdot \overline{W}_{4^0} \qquad \overline{W}_{12^0} = 3 \cdot \overline{W}_{4^0}$$

$$2.\quad W_{8^0} - W_{0^0} = 2^2 \cdot (W_{4^0} - W_{0^0})$$

$$W_{12^0} - W_{0^0} = 3^2 \cdot (W_{12^0} - W_{0^0})$$

ist, und zwar bis zu 8^0 fast genau, bei 12^0 mit kleinen Fehlern, weil hier die Vernachlässigung der Glieder höherer als zweiter Ordnung in α bemerkbar wird.

Daß diese einfache Feststellung bis heute nicht gemacht wurde, ist ein Zeichen mangelnder Fühlung zwischen Theorie und Praxis.

Bei dem S-Geschoß (Abb. 11) ist die Veränderung von W sehr klein; d. h. die Entwicklung von $W_\alpha - W_0$ nach Potenzen von $\sin^2 \alpha$ beginnt mit einer höheren als der ersten Potenz von $\sin^2 \alpha$. Wichtiger wäre im Hinblick auf die unerwünschte, die Präzision besonders beim Flakschießen erschwerende Seitenabweichung ein Geschoß, bei dem der Magnuseffekt fort-

*) Ihr verdanke ich die folgenden Angaben und auch den Hinweis auf die Arbeiten von v. Kármán und Moore, sowie von Tsien.

**) Das Wort stammt aus der Flugzeugtechnik, bei Geschossen erweckt es falsche Vorstellungen. Nach welcher Richtung das Geschoß abgedrängt wird, hängt von der Ebene Geschoßachse—Windrichtung ab.

fällt. Man müßte erreichen, daß die Resultante des Luftwiderstandes bei kleinem α durch den Schwerpunkt geht. Die Möglichkeit eines solchen Geschosses erläutert Kummer an einem Beispiel.

Tsien (Supersonic flow over an inclined body of revolution. J. Aeron. Sci. 5, 12 [1938], S. 480—483) behandelt dasselbe Problem im Anschluß an eine Arbeit von v. Kármán und Moore, ausgehend von der Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials. Dabei werden sehr starke Idealisierungen vorgenommen: Zähigkeit des Mediums und Reibung mit demselben werden vernachlässigt, der Körper soll sehr schlank, der Angriffswinkel α sehr klein sein. Unter diesen Vereinfachungen kann Tsien den Gesamtwiderstand durch Superposition aus dem Längs- und dem Querwiderstand zusammensetzen. Der Längswiderstand müßte nach Satz I unabhängig von α, also gleich dem Spitzenfaktor werden, da Glieder höherer als erster Ordnung vernachlässigt werden; aber Tsien berechnet ihn nicht. Den Querwiderstand erhält Tsien proportional dem Angriffswinkel α. Das entspricht also meinem viel einfacher erhaltenen und viel mehr besagenden Ergebnis I. Aus Satz I folgt:

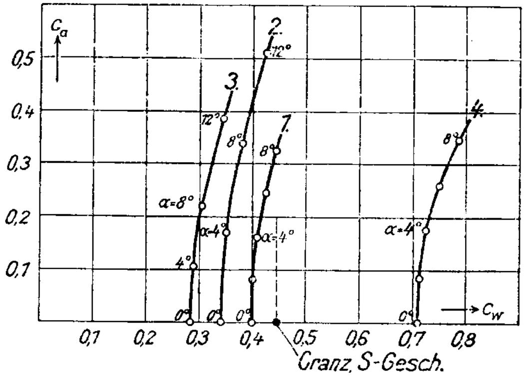

Abb. 11

Satz II: Bis auf Größen zweiter Ordnung in α ist $W_\alpha = W_0$. Dieser Satz ist nicht unwichtig, sondern wesentlich für die Behandlung der konischen Pendelung des Geschosses infolge des Magnuseffektes. Man muß hierbei, wie wir sehen werden, eine Prandtlsche Idealisierung vornehmen, nämlich zunächst W_α als von α unabhängig annehmen. Das bedeutet zufolge des Satzes II, daß Glieder in α von der zweiten Ordnung an vernachlässigt werden. Die Ergebnisse sind also in viel weiterem Maße gute Annäherungen, als wenn man mit dieser Annahme Glieder erster Ordnung in α vernachlässigen würde.

Die Widerstandsfläche ist bei geradem Flug gleich $F(\cos\omega_0)\cdot r^2\pi$, wo $r^2\pi$ der Geschoßquerschnitt, $F(\cos\omega_0)$ ein Mittelwert von $F(\cos\omega)$ an allen Stellen der Spitze ist, der sogenannte „Spitzen“- oder Formfaktor, der in der Regel mit i bezeichnet wird. Bezeichnet jetzt q den Querschnitt, so ist $q\cdot i$ die Widerstandsfläche. Der von der Geschwindigkeit v abhängige Widerstandsdruck sei $f(v)$. Diesen liefert die Widerstandstabelle. Der Widerstand ergibt sich also zu

$$W = q\,i\,f(v) \tag{15}$$

und die Verzögerung $w = \frac{W}{m}$ zu

$$w = \frac{q\,i}{m} f(v)\,. \tag{16}$$

Der hier auftretende Divisor m/q heißt die Querdichte; ebenso der Faktor G/q das Quergewicht (Querschnittsbelastung). Je größer die Querdichte, desto kleiner die Verzögerung. Der Faktor $q\,i/m$ werde mit c bezeichnet und soll der Geschoßfaktor heißen. Die Verzögerung des Geschosses ist also $c \cdot f(v)$.

Die obige Berechnung der Widerstandsfläche kann nur als eine Annäherung angesehen werden, da sie auf der unzutreffenden Annahme der Addierbarkeit der Widerstände beruht. Das Unzulängliche geht auch aus folgendem hervor. Die Berechnung würde für ähnliche Geschosse gleiche Formfaktoren $i = F(\cos \omega_0)$ ergeben, während z. B. die Versuche von Didion ergaben, daß der Formfaktor für Kugeln noch vom Radius derselben abhängt. Da $F(1) = 1$ ist, würde sich für ein ebenes Flächenstück, das sich senkrecht zu seiner Ebene bewegt, immer der Formfaktor $i = 1$ ergeben, unabhängig von der Begrenzung des Flächenstückes; das stimmt auch nicht mit der Erfahrung*) überein. Wir definieren deshalb unter Zugrundelegung der Tabelle wie folgt: Die Tabelle liefert den Widerstandsdruck $f(v)$; der Widerstand W dividiert durch den Widerstandsdruck $f(v)$ ist die Widerstandsfläche. Die Widerstandsfläche dividiert durch den Querschnitt q ist der Formfaktor i. Die Verzögerung w dividiert durch $f(v)$ gibt den Geschoßfaktor c. In diesen Festsetzungen liegt nur die eine Annahme, daß zwei Geschosse proportionale Widerstandstabellen haben. Diese Annahme liegt dem größten Teile der Ballistik zugrunde. Wie man von dieser Annahme zu einer genaueren fortzuschreiten hat, wird sich später ergeben.

Im vorstehenden ist i eine unbenannte, $f(v)$ eine benannte Zahl, nämlich ein Druck. Legen wir die Dimension von $f(v)$ in i hinein, so daß $f(v)$ eine unbenannte Zahl, i ein Druck wird, so nennen wir $q \cdot i = C$ den „spezifischen" Widerstand und $\frac{q\,i}{m} = c$ die spezifische Verzögerung des Geschosses. Es ist $C = m \cdot c$, wie $G = m \cdot g$ und $W = m \cdot w$ ist.

§ 8. Mechanische Ähnlichkeit

Zwei mechanische Vorgänge heißen „mechanisch ähnlich", wenn sie in entsprechenden Zeitmomenten geometrisch ähnlich sind und in entsprechenden Raumteilen proportionale Massen haben. Zwischen den Verhältnissen λ, τ, μ, $\varkappa$ entsprechender Längen, Zeiten, Massen, Kräfte besteht dann die Relation $\varkappa = \mu\,\lambda\,\tau^{-2}$ (Newton). Die geradlinigen Bewegungen

*) Vgl. z. B. Eiffel, La résistance de l'air et l'aviation, Paris 1911.

zweier Geschosse in der Luft sind mechanisch ähnlich, wenn $\mu = 1$ ist, weil sie sich in Medien gleicher Masse bewegen, und wenn $\varkappa = 1$ ist, weil auf beide dieselbe Schwerkraft wirkt. Demnach ist $\sqrt{\lambda} = \lambda\,\tau^{-1}$, d. h. die Geschwindigkeiten müssen sich wie die Quadratwurzeln der linearen Abmessungen verhalten. Alsdann sind wegen $\lambda\,\tau^{-2} = 1$ die Verzögerungen durch den Luftwiderstand gleich. Leider ist aber die Ähnlichkeit nicht vollständig, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenbewegung in beiden Medien dieselben sind, statt auch im Verhältnis $\sqrt{\lambda}$ zu stehen. Nur weit genug von dieser Geschwindigkeit entfernt, also bei sehr kleinen und sehr großen Geschwindigkeiten, ist der Ähnlichkeitssatz anwendbar.

Bei geometrisch ähnlichen Geschossen gleichen Materials ist die Masse dem Kubus, der Querschnitt dem Quadrate, also die Querschnittsbelastung der ersten Potenz und der Geschoßfaktor c der reziproken ersten Potenz des Kalibers proportional. Mit wachsendem Kaliber kann man also c (theoretisch), also auch w/g beliebig klein machen, d. h. es gibt Flugbahnen, die der Parabel beliebig nahekommen (vgl. § 14).

§ 9. Der Luftwiderstand abhängig vom Luftgewicht

Nach dem Newtonschen Gesetz ist der Luftwiderstand der Dichte der Luft proportional. Man hat bisher keine Veranlassung gehabt, diese Annahme durch eine genauere zu ersetzen. Statt der Dichte führt man das spezifische Gewicht in kg/cbm ein, das „Luftgewicht", das im Mittel etwa 1,2 beträgt. Der Kruppschen Widerstandstabelle liegt der Wert 1,206 zugrunde, der bei 15° Celsius, 750 mm Barometerstand und halber Sättigung statthat. Braucht man den Widerstand für ein anderes Luftgewicht δ, so muß man die Zahlen der Tabelle mit $\frac{\delta}{1{,}206}$ multiplizieren. Andere nehmen 1,22 als Mittelwert.

Bei der Unbestimmtheit, die jedem Mittelwert von Natur anhaftet, wäre es berechtigt und zweckmäßig, sich auf einen „runden" Wert, z. B. 1,2 als Mittelwert, zu einigen, was für Umrechnungen bequemer ist.

Tagesluftgewicht. Das Luftgewicht hängt von der Temperatur, dem Luftdruck und dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft ab. Zur Berechnung desselben dient die Formel:

$$\delta = 0{,}4636 \cdot \frac{B_0}{T} - 0{,}174 \cdot \frac{s \cdot E}{T}\,, \tag{17}$$

darin bedeutet:

B_0 den auf 0° Celsius reduzierten Barometerstand,

T die absolute Temperatur (273° = 0° Celsius, 274° = 1° Celsius),

E die Spannung des gesättigten Wasserdampfes bei T Grad in mm Quecksilbersäule,

s die relative Feuchtigkeit in Teilen der Sättigung, so daß $s = 1$ der Sättigung entspricht.

B_0 ergibt sich aus dem abgelesenen Barometerstand B durch Subtraktion von $0{,}000163 \cdot B \cdot (T - 273)$, s liest man am Hygrometer ab, E entnimmt man einer Tabelle. Im folgenden ein kurzer Auszug aus einer solchen:

$T - 273$	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
E	1,95	3,01	4,58	6,5	9,2	12,8	17,5	23,8	31,8	42,2	55,3	71,9	92,5

Höhenluftgewicht. Bezeichnet man mit δ_z das Luftgewicht in z m Höhe, so ist annähernd (für Höhen von einigen Kilometern höchstens)

$$\delta_z = \delta_0 \cdot (1 - 0{,}0001 \cdot z)\,. \tag{18}$$

Der Koeffizient 0,0001 ist das Mittel aus dem älteren St.-Robertschen Werte 0,00008 und dem neueren Charbonnierschen Werte 0,00011, wenn man dem letzteren das doppelte Gewicht des ersteren beilegt. Ein genauer Wert steht nicht fest, da es sich um interpolierende Approximation einer Tabelle handelt.

Eine solche lineare Formel hat aber den Nachteil, daß sich für große z negative δ_z ergeben. Aus ähnlichen Gründen ist überhaupt eine ganze oder unecht gebrochene Funktion von z unbrauchbar. Man muß eine echt gebrochene oder eine exponentielle Formel nehmen, also z. B.*):

$$\delta_z = \delta_0 \cdot \frac{1}{1 + 0{,}0001 \cdot z} \quad \text{oder} \quad \delta_z = \delta_0 \cdot e^{-\frac{z}{10^4}} \quad \text{oder} \quad \delta_z = \frac{\delta_0}{1{,}0001^z}\,.$$

Alle solchen Formeln geben den Koeffizienten von z in der Entwicklung von δ_z nach Potenzen von z übereinstimmend zu $\frac{\delta_0}{10^4}$. Das bedeutet, soweit die Siacci-Formeln (s. §§ 31, 32) gelten, daß die Elemente t, s, x der Flugbahn für jeden Kilometer Höhe um $\frac{1}{10}$, $x \operatorname{tg} \omega_0 - z$ um $\frac{2}{10}$ wachsen. Eine exponentielle Formel würde bedeuten, daß zwischen $\log \delta_z$ und z eine lineare Gleichung besteht. Das ist nicht der Fall; die Kurve der Punkte $(\log \delta_z, z)$ ist vielmehr noch deutlich und einseitig gekrümmt**). Das weist darauf hin, daß man im Exponenten wenigstens bis zum 2. Grade gehen, also etwa $\delta_z = \delta_0 \cdot e^{-\alpha \frac{z}{10^4} - \beta \left(\frac{z}{10^4}\right)^2}$ nehmen muß. Für die Berechnung sehr hoher Flugbahnen können solche interpolatorischen Darstellungen eines empirischen Gesetzes von Vorteil sein, wenn sie so eingerichtet sind, daß sie eine Rechnungsersparnis mit sich bringen. Sonst kann man bei der direkten Verwendung der empirischen Tabelle stehenbleiben (s. Kapitel XII) und für nicht zu große Schichten linear interpolieren $\delta_z = \delta_{z_0}\big(1 - \varepsilon\,(z - z_0)\big)$.

---

*) Die Exponentialformel kommt schon bei Bessel vor.

**) Siehe z. B. W. Große, Über das Luftgewicht. Artilleristische Monatshefte Nr. 141 (1918), S. 75.

Drittes Kapitel

Grundlegung und allgemeine Geschoßbahneigenschaften

§ 10. Die Differentialgleichungen der Geschoßbewegung

Bezeichnungen: Es sei

$\mathfrak{r}$ der Lagevektor des Geschosses, bezogen auf den Abschuß;
x die horizontale Abszisse eines Bahnpunktes, vorwärts positiv;
z seine vertikale Ordinate, aufwärts positiv;
s der Geschoßbahnbogen OP;
t die Flugzeit;
$\mathfrak{v} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}$ der Geschwindigkeitsvektor des Geschosses im Punkte P;
$v = \dot{s} = \dfrac{ds}{dt}$ der Geschwindigkeitsbetrag ($v \geqq 0$);
$\mathfrak{e}$ der Tangentenvektor (Länge 1), $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e}$;
$\mathfrak{n}$ der Normalenvektor (Länge 1), $\dfrac{d\mathfrak{e}}{ds} = \dfrac{\mathfrak{n}}{\varrho}$;
ω die Erhöhung der Tangente gegen die Horizontale ($\omega > 0$ im aufsteigenden, $\omega < 0$ im absteigenden Ast);
$\dot{x} = v\cos\omega$, $\dot{z} = v\sin\omega$ die Geschwindigkeitskomponenten;
ϱ der Krümmungsradius der Bahn im Punkte P ($\varrho \geqq 0$);
$\dot{\mathfrak{v}} = \dfrac{d\mathfrak{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ der Beschleunigungsvektor des Geschosses im Punkte P;
$\ddot{x}$, $\ddot{z}$ die Komponenten der Beschleunigung;
m die Geschoßmasse;
$m\,\mathfrak{g}$ die auf das Geschoß wirkende Schwerkraft;
$m\,\mathfrak{w}$ der Luftwiderstand ($|\mathfrak{w}| = w(v) \geqq 0$, $\mathfrak{w} = -w\,\mathfrak{e}$);
$-w\cos\omega$, $-w\sin\omega$ die Komponenten der Verzögerung durch den Luftwiderstand.

Im Zeitpunkt des Abschusses $t_0 = 0$: $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\mathfrak{r}_0 = 0$, $\mathfrak{v}_0, \ldots$
Im Gipfel der Geschoßbahn t_*: x_*, z_*, s_*, $\dot{z}_* = 0$, $\omega_* = 0, \ldots$
Im Zeitpunkt t^0 des Auftreffens auf die Horizontalebene des Abschusses:

$$x^0,\ z^0 = 0,\ s^0,\ \mathfrak{r}^0,\ \mathfrak{v}^0,\ \ldots$$

Auf das Geschoß wirkt die Schwerkraft $m\,\mathfrak{g}$ und der Luftwiderstand $m\,\mathfrak{w}$. Die Geschoßbewegung berechnet sich daher aus den beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,, \qquad \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v}\,. \tag{1}$$

Das sind die Newtonschen Gleichungen der Schwerpunktsbewegung. Die Schwere $\mathfrak{g}$ ändert Größe und Richtung mit dem Ort des Geschosses. Die

Verzögerung durch den Luftwiderstand — $\mathfrak{w}$ ist im allgemeinen Funktion der Geschwindigkeit und des Ortes, gelegentlich auch Funktion der Zeit. Außerdem hängt ihre Richtung wesentlich von der Lage der Geschoßachse ab. Dennoch ist es bei sehr vielen Geschoßbahnen zulässig, in erster Näherung für die wirkenden Kräfte die vereinfachende Annahme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{const.}\,, \qquad \mathfrak{w} = -\frac{w(v)}{v}\,\mathfrak{v}\,, \qquad w(v) \geqq 0 \tag{2}$$

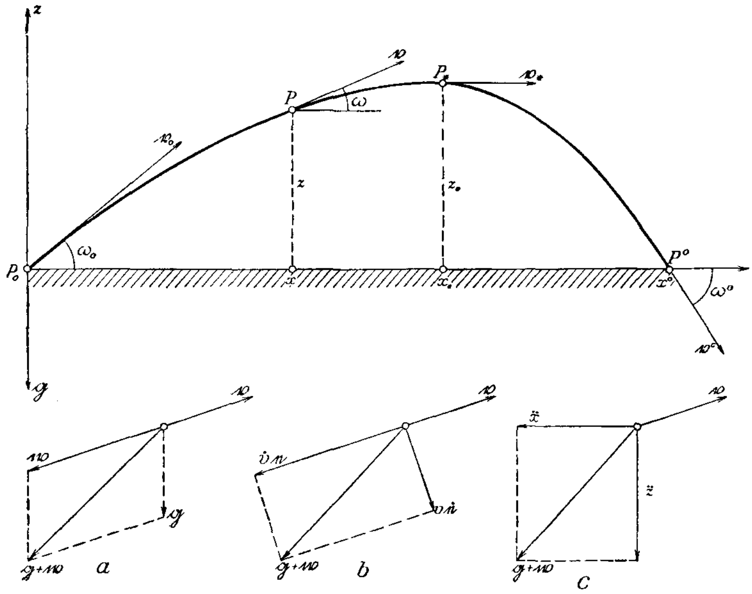

Abb. 12

zu machen. Die Schwere soll also nach Größe und Richtung unveränderlich sein, und die Verzögerung durch den Luftwiderstand soll ihrer Größe nach nur vom Geschwindigkeitsbetrage abhängen, ihrer Richtung nach der Geschwindigkeitsrichtung entgegen sein. Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen soll in den Kapiteln III—VIII die Geschoßbewegung untersucht werden.

Zunächst läßt sich einsehen, daß dann die Geschoßbahn stets eine ebene Kurve sein muß. Nach den Regeln der Differentialgeometrie*) bestimmt sich die Windung der Bahnkurve aus

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}, \ddot{\mathfrak{v}})}{|\mathfrak{v} \times \dot{\mathfrak{v}}|^2}\,.$$

*) Vgl. z. B. Lagally, Vektorrechnung, S. 64.

Nun folgt aus (1) und (2)

$$\ddot{\mathfrak{v}} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{w}{v}\right)\mathfrak{v} - \frac{w}{v}\,\dot{\mathfrak{v}}\,, \tag{3}$$

mithin liegt $\ddot{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}$ ständig in der gleichen Ebene, das Spatprodukt $(\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}, \ddot{\mathfrak{v}})$ und damit auch die Windung $\frac{1}{\tau}$ ist also überall in der Bahn Null. Der Ausnahmefall, daß $\dot{\mathfrak{v}} \parallel \mathfrak{v}$ ist, wird später zu besprechen sein (§ 12).

Über den Energieaustausch erhält man eine Aussage, wenn man die erste Gleichung (1) beiderseits skalar mit $m\,\mathfrak{v}$ multipliziert. Da $m\,\dot{\mathfrak{v}}\cdot\mathfrak{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right)$, also gleich der zeitlichen Änderung der lebendigen Kraft (der kinetischen Energie) des Geschosses ist, so ergibt sich der Energiesatz:

$$d\left(\tfrac{1}{2}\,m\,v^2\right) = m\,(\mathfrak{g} + \mathfrak{w})\cdot d\mathfrak{r}\,. \tag{4}$$

Die Änderung der lebendigen Kraft ist gleich der auf dem Wegstück $d\mathfrak{r}$ geleisteten Arbeit. Eine leichte Abänderung der Schreibweise von (4) führt auf

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{r}\right) = -\,m\,w\,(v)\,v \leqq 0\,. \tag{5}$$

Der Klammerausdruck der linken Seite setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ und der potentiellen Energie $-\,m\,\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{r}$, deren Summe die mechanische Energie des Geschosses genannt wird. Aus (5) folgt also: Die mechanische Energie des Geschosses nimmt durch den Luftwiderstand ständig ab.

Bezeichnet $\mathfrak{e}$ die Bahntangente (Länge 1), v den Geschwindigkeitsbetrag, so läßt sich bekanntlich der Geschwindigkeitsvektor in der Form

$$\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{e} \tag{6}$$

schreiben. Daraus folgt durch Differentiation $\dot{\mathfrak{v}} = \dot{v}\,\mathfrak{e} + v\,\dot{\mathfrak{e}}$ (Abb. 12b). Hier steht $\dot{\mathfrak{e}} \perp \mathfrak{e}$, denn aus $\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e} = 1$ folgt $\mathfrak{e}\cdot\dot{\mathfrak{e}} = 0$. Es ist also $\dot{v}\,\mathfrak{e}$ die Tangential-, $v\,\dot{\mathfrak{e}}$ die Normalbeschleunigung. Aus der Energiegleichung (5) ergibt sich sofort ein Ausdruck für die Tangentialbeschleunigung und danach durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1) auch für die Normalbeschleunigung:

$$\dot{v} = \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e} - w\,(v)\,, \tag{7}$$

$$v\,\dot{\mathfrak{e}} = \mathfrak{g} - \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{e}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}\,. \tag{8}$$

Hier ist $\mathfrak{n}$ die Bahnnormale (Länge 1). Die Richtung von $\mathfrak{n}$ werde so gewählt, daß anfangs der Winkel zwischen Normale und Schwererichtung spitz ist. Aus (8) folgt dann: Die Bahntangente dreht sich ständig im selben Sinn, so lange nicht die Tangente der Schwererichtung parallel geworden ist; den Drehsinn gibt die Normalenrichtung an. (Der Fall, daß $v = 0$ werden kann, ist dabei auszuschließen.) Jede Geschoßbahn, die einen aufsteigenden Ast hat, hat also immer einen Gipfel ($\mathfrak{e} \perp \mathfrak{g}$). Hier und im folgenden wird die Geschoßbahn in ihrem ganzen Ausmaß betrachtet. Der Bahnabschnitt, der sich für $t < t_0 = 0$ als Lösung von (1) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt, soll der virtuelle Bahnbogen genannt werden. Der Gipfel liegt also möglicherweise im virtuellen Teil der Bahn.

Da die Bahn eben ist, kann die Geschwindigkeit auch durch Betrag v und Erhöhung ω vollständig gekennzeichnet werden. (7) und (8) sind dann zu ersetzen durch

$$\dot{v} = -g \sin \omega - w\,, \tag{9}$$

$$v\,\dot{\omega} = -g \cos \omega\,. \tag{10}$$

Aus (10) folgt $\dot{\omega} < 0$ für $|\omega| < \frac{\pi}{2}$, also: die Erhöhung nimmt mit wachsender Zeit ständig ab; bei gleicher Erhöhung ist die Drehung der Bahntangente um so rascher, je kleiner die Geschwindigkeit ist.

Für manche Untersuchungen ist noch die Kenntnis von $\ddot{v}$ und $\ddot{\omega}$ nützlich. Aus (9) und (10) ergibt sich durch Differentiation

$$\ddot{v} = \frac{1}{v}\, g^2 \cos^2 \omega + w' \,(g \sin \omega + w)\,, \tag{11}$$

$$\ddot{\omega} = -\frac{g}{v^2}\,(g \sin 2\,\omega + w \cos \omega)\,. \tag{12}$$

Schließlich sollen noch die kinematischen Elemente v, t durch die geometrischen ϱ, s ersetzt werden. Die Bogenlänge ist definiert durch

$$s\,(t) = \int_0^t v\, dt\,. \tag{13}$$

Die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ (ϱ Krümmungsradius) bestimmt sich nach den Regeln der Differentialgeometrie*) aus $\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}$ oder, wegen (8) bzw. (10) zu

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \cos \omega\,. \tag{14}$$

Differentiation von (14) ergibt für die zeitliche Änderung des Krümmungsradius

$$\dot{\varrho} = -\frac{v}{g \cos \omega}\,(3\,g \sin \omega + 2\,w)\,. \tag{15}$$

$\frac{v^2}{\varrho}$ ist die Zentrifugalbeschleunigung. (14) bedeutet also: Die Zentrifugalbeschleunigung hält der Normalkomponente der Schwere das Gleich-

*) Vgl. Lagally, Vektorrechnung, S. 62.

gewicht. Die Gleichung (14) läßt weiter erkennen, daß Geschoßbahnen, die an einer Stelle gleiches v und ω haben, auch in der Krümmung übereinstimmen, sich also oskulieren; unabhängig von w. Für $w = 0$ erhält man: die tangierende Parabel oskuliert zugleich.

§ 11. Die Hauptgleichung

Da, wie in § 10 gezeigt wurde, die Erhöhung eine monotone Funktion der Zeit ist, so kann an Stelle von t auch ω als unabhängige Veränderliche Verwendung finden. Die Division der Gleichungen (9), (10) führt dann auf die „Hauptgleichung" der Geschoßbewegung

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{d\omega} &= \frac{g \sin\omega + w(v)}{g\cos\omega} \cdot v \\ &= \left(\operatorname{tg}\omega + \frac{w}{g\cos\omega}\right) v\,. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

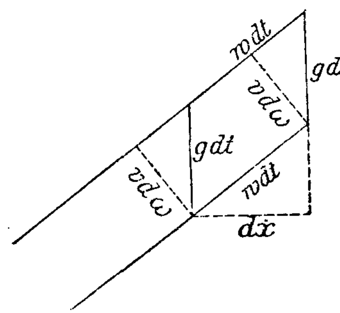

Abb. 13

Diese Hauptgleichung kann man auch unmittelbar aus Abb. 13 ableiten. Es ist $g\,dt : v\,d\omega = w\,dt : d\dot{x}$, also

$$g\,d\dot{x} = w\,v\,d\omega\,, \quad \text{wo} \quad \dot{x} = v\cos\omega\,. \quad (16')$$

Das ist aber bereits die gesuchte Beziehung.

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nach den Voraussetzungen des § 10 nur von ω und v ab, die Zeit t ist also eliminiert. Ist die Hauptgleichung gelöst, ist also v als Funktion von ω bekannt, so sind nur noch die folgenden Quadraturen zu erledigen:

$$\left.\begin{aligned} g\,t &= \int_{\omega}^{\omega_0} v \sec\omega\,d\omega && \text{nach (10)}\,, \\ g\,s &= g\int_0^t v\,dt = \int_{\omega}^{\omega_0} v^2 \sec\omega\,d\omega && \text{nach (13)}\,, \\ g\,\mathfrak{r} &= g\int_0^t \mathfrak{v}\,dt = \int_{\omega}^{\omega_0} \mathfrak{e}\,v^2 \sec\omega\,d\omega && \text{nach (1)}\,, \\ g\,x &= g\int_0^t v\cos\omega\,dt = \int_{\omega}^{\omega_0} v^2\,d\omega && \text{nach (1)}\,, \\ g\,z &= g\int_0^t v\sin\omega\,dt = \int_{\omega}^{\omega_0} v^2 \operatorname{tg}\omega\,d\omega && \text{nach (1)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Gleichung (16) ist also die Schlüsselgleichung des Problems, darin liegt ihre Bedeutung. Die durch die Polarkoordinaten v, ω bestimmte Kurve heißt der Geschwindigkeitsriß [Hodograph]*). Die Geschwindigkeitsvektoren sind bei dieser Darstellung alle auf denselben Ursprung bezogen

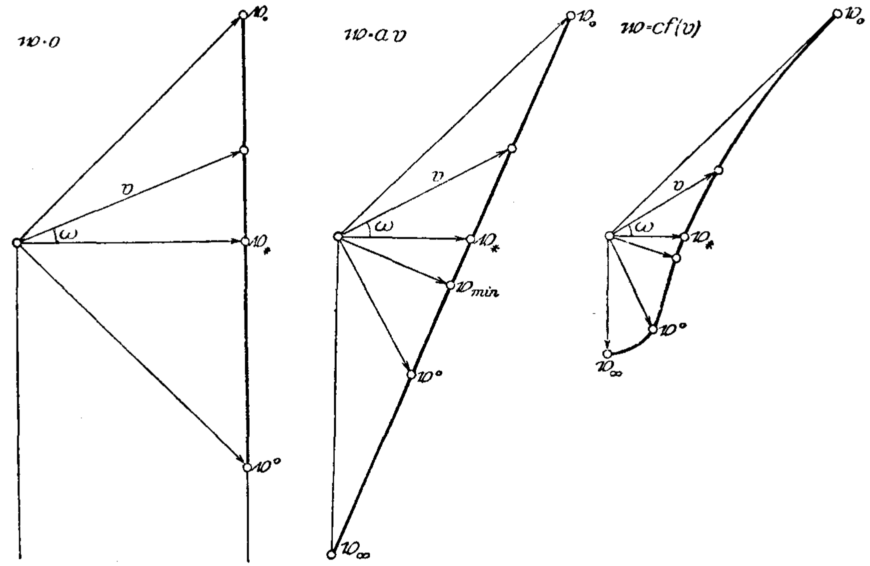

Abb. 14

(s. Abb. 14). Das der Bestimmung von x dienende Integral läßt sich anschaulich deuten. Es ist $\int\limits_{\omega}^{\omega_0} v^2\,d\omega$ gleich der doppelten vom Geschwindigkeitsvektor zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_0$ überstrichenen Fläche. Durch Planimetrierung dieser Fläche $F(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}_0)$ ergibt sich also bei Zielen im Mündungshorizont die Schußweite zu

$$x^0 = \frac{1}{2g} F(\mathfrak{v}^0, \mathfrak{v}_0)\,.$$

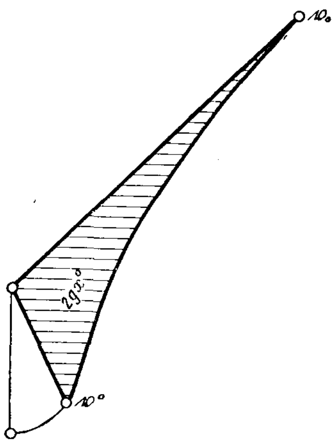

Abb. 15

Für die Schußzeit t ist die Bogenlänge σ des Geschwindigkeitsrisses charakteristisch. Aus $d\sigma = -\,v\,d\omega$ folgt nämlich aus der ersten Gleichung (17)

$$g\,t = \int\limits_0^{\sigma} \sec\omega\,(\sigma)\,d\sigma\,.$$

*) Hodograph ist schlecht, besser wäre Tachygramm.

Man erhält aus (16') die integrierte Form der Hauptgleichung

$$v \cos \omega = v_0 \cos \omega_0 \cdot e^{-\frac{1}{g} \int\limits_{\omega}^{\omega_0} w \sec \omega \, d\omega} . \tag{18}$$

Aus (18) folgt, falls $|\omega_0| < \frac{\pi}{2}$ ist, daß die Geschwindigkeit in keinem Punkte der Bahn, also auch nicht im Gipfel Null werden kann. Daher ist nach (9) im ganzen aufsteigenden Ast und noch ein Stück über den Gipfel hinaus $\dot{v} < 0$, v nimmt also zunächst ständig ab. In jedem Punkte der Ebene des Geschwindigkeitsrisses, in dem

$$-\dot{v} = g \sin \omega + w = 0 \tag{19}$$

wird, ist nach (11) gleichzeitig $\ddot{v} > 0$. Dem ersten Schnitt der Kurve (19) mit dem Hodographen entspricht also ein Geschwindigkeitsminimum $v_{\min} > 0$. Von da an ist zunächst $\dot{v} > 0$, die Geschwindigkeit nimmt also zu, und zwar dauernd. Auf das erste Minimum kann nämlich kein Maximum folgen, weil für $\dot{v} = 0$ nach (11) stets $\ddot{v} > 0$ wird. Die Geschwindigkeit wächst trotzdem im absteigenden Ast nicht unbeschränkt. In dem Maße, in dem $\omega \to -\frac{\pi}{2}$ abnimmt, geht nach (9) und (10) $\dot{\omega} \to 0$ und $\dot{v} \to 0$, also strebt $\mathfrak{v}$ einem Grenzwert $\mathfrak{v}_\infty$ zu, dessen Betrag sich aus

$$-g + w(v_\infty) = 0 \tag{20}$$

berechnet, dessen Richtung mit der Schwererichtung zusammenfällt. Die Grenzgeschwindigkeit ist also vom Anfangszustand unabhängig. Die lotrechte Asymptote an den absteigenden Ast der Bahn habe den Abstand x_∞ vom Abschußpunkt. Nach (17) ist

$$g\, x_\infty = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\omega_0} v^2 \, d\omega .$$

Dieses Integral ist beschränkt, also ist x_∞ endlich.

Der Krümmungsradius ϱ ist ohne Quadratur direkt aus (14) zu berechnen, sobald die Hauptgleichung (16) gelöst ist. Wie aus (15) folgt, ist im aufsteigenden Ast und noch ein Stück über den Gipfel hinaus $\dot{\varrho} < 0$. Der Krümmungsradius nimmt also zunächst ab. Da überall in der Bahn $v > 0$ ist, kann erst dann $\dot{\varrho} = 0$ werden, wenn

$$3\, g \sin \omega + 2\, w(v) = 0 \tag{21}$$

geworden ist. Der Vergleich mit (19) ergibt, daß die zu $v_{\min}$ gehörige Erhöhung $\omega(v_{\min}) < \omega(\varrho_{\min})$ sein muß und daß auch ϱ nur dieses eine Minimum und kein Maximum besitzt. Das Minimum von ϱ liegt stets zwischen dem Gipfel und der Stelle kleinster Bahngeschwindigkeit. Der zugehörige Bahnpunkt, also die Stelle größter Krümmung, wird Scheitel genannt. Mit $\omega \to -\pi/2$ geht $\varrho \to \infty$.

Die beiden Bedingungen für die Stelle kleinster Geschwindigkeit und für die Stelle größter Krümmung rücken nur dann beliebig zusammen, wenn $w \to 0$ geht. Dann geht auch gleichzeitig $\omega \to 0$. Also nur beim Schuß senkrecht aufwärts und bei der widerstandsfreien Schußbahn liegen die beiden Extreme beisammen, und zwar im Gipfel der Bahn.

Aus dem Verhalten des Geschwindigkeitsbetrages geht hervor, daß v in jedem Teilgebiet von $(v_0, v_{\min})$ bzw. $(v_{\min}, v_\infty)$ als unabhängige Veränderliche Verwendung finden kann. Nachdem $\omega(v)$ bekannt ist, bleibt dann noch die Berechnung der folgenden Quadraturen

$$\left.\begin{aligned}
t - t_1 &= \int_v^{v_1} \frac{dv}{w + g \sin\omega} && \text{nach (9)}\,, \\
s - s_1 &= \int_v^{v_1} \frac{v\,dv}{w + g \sin\omega} && \text{nach (13)}\,,\ (9)\,, \\
x - x_1 &= \int_v^{v_1} \frac{v \cos\omega\, dv}{w + g \sin\omega} && \text{nach (1)}\,,\ (9)\,, \\
z - z_1 &= \int_v^{v_1} \frac{v \sin\omega\, dv}{w + g \sin\omega} && \text{nach (1)}\,,\ (9)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

v und v_1 müssen demselben Teilgebiet angehören. Mit denselben Einschränkungen läßt sich auch eine integrierte Form für die Hauptgleichung ableiten. Da $\sec\omega\, d\omega = d \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)$ geschrieben werden kann, so folgt aus (16)

$$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_1}{2}\right) - g \int_v^{v_1} \frac{dv}{v\,(w + g \sin\omega)}\,. \tag{23}$$

Nunmehr kann auch über den Verlauf des virtuellen Bahnbogens einiges ausgesagt werden. Der Abschußpunkt liege so, daß dort $\dot v_0 < 0$ ist. Da $|\dot v| > g \sin\omega_0 + w(v_0)$ ist, muß die Geschwindigkeit mit abnehmendem t unbeschränkt zunehmen. Über die Richtung der Asymptote an den aufsteigenden Ast entscheidet das Verhalten von $w(v)$ im Unendlichen. Wächst $w(v)$ für gehörig große v wenigstens wie v^ε, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so ist das Integral in (23) endlich, also $\omega_{-\infty} < \frac{\pi}{2}$. Die Asymptote ist dann gegen die Horizontale geneigt. Die Flugzeit $t_{-\infty}$ ist übrigens beschränkt, wie man aus (22) sieht, sobald $w(v)$ im Unendlichen wenigstens wie $v^{1+\varepsilon}$ (ε positiv) wächst.

C. Cranz und R. Rothe*) haben der Hauptgleichung (16) eine Form gegeben, die bei gewissen Lösungsmethoden Vorteile bringt. Aus (16) folgt

$$\frac{\cos\omega}{v}\,\frac{dv}{d\omega} = \sin\omega + \frac{w(v)}{g}\,.$$

Führt man die neuen Variablen $\lg v$ und ζ ein durch $\frac{dv}{v} = d\lg v$ und $\sec\omega\, d\omega = d\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = d\zeta$, so ergibt sich wegen $\sin\omega = \operatorname{tg\,hyp}\zeta$

$$\frac{d\lg v}{d\zeta} = \operatorname{tg\,hyp}\zeta + F(\lg v)\,, \qquad \text{wo} \qquad F(\lg v) = \frac{w(v)}{g}\,. \tag{24}$$

Durch diese Umformung ist auf der rechten Seite der Hauptgleichung jeder der beiden Summanden nur von einer Veränderlichen abhängig.

§ 12. Der fast senkrechte Schuß

Bisher wurde $|\omega_0| < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt. Geht man mit der Abschußrichtung ω_0 immer näher an die Vertikale heran, so geht nach (10) $\dot\omega \to 0$ (vorausgesetzt, daß $v > 0$ ist). In diesem Fall ist ω so schwach veränderlich, daß es als unabhängige Veränderliche ungeeignet wird. Es ist dann dafür v als unabhängige Veränderliche zu wählen. An Stelle der Gleichungen (16), (17) treten damit (22), (23). Die Gipfelgeschwindigkeit v_* ergibt sich nach (23) aus

$$\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega_0}{2}\right) = g\int_{v_*}^{v_0}\frac{dv}{v\,(g\sin\omega + w)}\,.$$

In der Flakartillerie interessiert vor allem der aufsteigende Ast, beim Bombenabwurf aus dem Flugzeug der absteigende Ast der Geschoßbahn. Da beim Bombenabwurf die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses gleich der Flugzeuggeschwindigkeit, also verhältnismäßig klein ist, liegt das Geschwindigkeitsminimum meist so nahe beim Gipfel der Geschoßbahn, daß die Formeln (22), (23) im allgemeinen auch vom Gipfel an (nicht erst vom Geschwindigkeitsminimum an) Verwendung finden können.

Die Berechnung wird am einfachsten, wenn $|\omega_0|$ so nahe bei $\pi/2$ ist, daß man, abgesehen von einer kleinen Umgebung des Gipfels, genau genug $\sin\omega = \pm 1$, $\cos\omega = \frac{\pi}{2} \mp \omega$ setzen kann. Das obere Vorzeichen gilt für den aufsteigenden, das untere für den absteigenden Ast der Bahn. Für die integrierte Hauptgleichung (23) ergibt sich zunächst genähert

$$\lg\left(\frac{\pi}{2}\mp\omega\right) = \lg\left(\frac{\pi}{2}\mp\omega_0\right) - g\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v\,(g\pm w)}\,.$$

*) Artilleristische Monatshefte 1917, S. 197.

Werden nun die beiden Funktionen $G(v)$ eingeführt durch

$$\lg G(v) = -g \int^{v} \frac{dv}{v(g \pm w)}, \tag{25}$$

so ergibt sich als Näherungslösung der Hauptgleichung

$$\cos\omega = \cos\omega_0 \frac{G(v)}{G(v_0)}. \tag{26}$$

Entsprechend gehen die Quadraturen (22) über in

$$\left.\begin{aligned}
t &= M(v) - M(v_0) & M(v) &= -\int^{v} \frac{dv}{w \pm g}, \\
s &= Q(v) - Q(v_0) = z - z_0 & Q(v) &= -\int^{v} \frac{v\,dv}{w \pm g}, \\
x &= -\frac{\cos\omega_0}{G(v_0)}\left(P(v) - P(v_0)\right) & P(v) &= -\int^{v} \frac{G(v)\,v\,dv}{w \pm g}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die acht Integrale $G(v)$, $M(v)$, $Q(v)$, $P(v)$ sind für eine Anzahl Werte des in der Verzögerung $w = c\,f(v)$ vorkommenden Geschoßfaktors c und für die untere Grenze $v = 1200$ m/sec berechnet und graphisch dargestellt worden (s. Cranz, Ballistik, Band 1, 5. Auflage, S. 688ff.).

Für den senkrechten Schuß kommen nur die erste und zweite Formel von (27) in Betracht. Beim Schuß senkrecht abwärts ist für $v_0 = 0$ auch das Fallenlassen eines Geschosses von einem unbewegten Luftfahrzeug aus erfaßt.

Beim Schuß senkrecht aufwärts wird der Gipfel erreicht, wenn $v_* = 0$ ist. Also ergeben sich die Gipfelelemente aus

$$t_* = \int_0^{v_0} \frac{dv}{g + w}, \qquad s_* = \int_0^{v_0} \frac{v\,dv}{g + w}.$$

Für $v_0 \to \infty$ bleibt s_* endlich, falls $w(v)$ mit $v \to \infty$ wie $v^{2+\varepsilon}$ (ε positiv) wächst. Da aber $w(v)$ erfahrungsgemäß bei großen Geschwindigkeiten weniger rasch zunimmt, entweicht das Geschoß bei hinreichender Geschwindigkeit, selbst wenn Schwere und Luftgewicht mit der Höhe nicht abnähmen.

Für den Schuß senkrecht abwärts gelten in (27) die unteren Vorzeichen. Es ist also

$$t = \int_v^{v_0} \frac{dv}{g - w}, \qquad s = \int_v^{v_0} \frac{v\,dv}{g - w}.$$

Es sei v_g der Wert von v, für den $w = g$ wird. $\lim\limits_{w \to g} \frac{(v - v_g)\, w'}{w - g} = n_g$ bedeutet dann, daß in der Nähe von $w = g$ der Nenner $w - g$ proportional der n_g-ten Potenz von $v - v_g$ ist; denn aus $w - g = c\,(v - v_g)^n$ folgt $w' = c\,n\,(v - v_g)^{n-1} = n\,\frac{w - g}{v - v_g}$. Die zu v_g gehörigen Bahnelemente sind

$$t_g = \int\limits_{v_g}^{v_0} \frac{dv}{g - w}\,, \qquad s_g = \int\limits_{v_g}^{v_0} \frac{v\,dv}{g - w}\,.$$

Ist $w < g$, wie z. B. beim absteigenden Ast eines senkrecht aufwärts gerichteten Schusses [vgl. (20)], so ist $dv = (g - w)\,dt$ positiv; v, also auch w wächst. Demnach sind t_g, s_g endlich, wenn $n_g < 1$. Aber es ist $n_g = 1$, denn die Widerstandskurve $w = c\,f(v)$ kann an der Stelle $w = g$, $v = v_g$ wie an jeder anderen nur eine geneigte Tangente haben. Also erreicht das Geschoß die Geschwindigkeit $v = v_g$ erst für $t_g = \infty$, $s_g = \infty$.

Ist $w > g$, so ist $dv = (g - w)\,dt$ negativ, also nehmen v und w ab. Die Geschwindigkeit $v = v_g$ wird wieder erst für $t_g = \infty$, $s_g = \infty$ angenommen.

Ist $w = g$, so ist $dv = (g - w)\,dt = 0$, das heißt, die Geschwindigkeit bleibt konstant gleich v_g; die Bewegung ist gleichförmig. v_g ist die schon von Huygens eingeführte Grenzgeschwindigkeit. Ein vertikaler Luftstrom von der Geschwindigkeit v_g ist also gerade stark genug, den Körper am Fallen zu hindern.

Für den Schuß senkrecht abwärts werden die Elemente des „virtuellen" Gipfels ($v_* = 0$):

$$t_* = \int\limits_{0}^{v_0} \frac{dv}{g - w}\,, \qquad s_* = \int\limits_{0}^{v_0} \frac{v\,dv}{g - w}\,.$$

Ist $w \geqq g$, so ist kein Gipfel vorhanden, denn mit abnehmender Zeit nimmt v, wie eben gezeigt wurde, nicht ab. Ist $w < g$, so sind t_*, s_* die Zeit, bzw. die Fallhöhe, in der von der Ruhe aus die gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht wird.

§ 13. Die beiden Integrationsansätze und ihre Grenzfälle

In dem Grenzfall, daß die Verzögerung durch den Luftwiderstand dauernd Null ist, $w = 0$, ist die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit $\dot{x}$ nach (18) unveränderlich. Ist nun $w/g \doteq 0$, so empfiehlt es sich, in den Quadraturformeln v durch die schwach veränderliche Größe $\dot{x}$ zu ersetzen. Da $\dot{x} = v \cos \omega$ ist, so folgt unter Benutzung von (9) und (10) bzw. aus (16′) die neue Hauptgleichung

$$\frac{d\dot{x}}{d\omega} = \frac{w\,v}{g}\,. \tag{28}$$

Wird nun noch ω durch die neue Veränderliche $p = \operatorname{tg}\omega$ ersetzt, so nimmt wegen $d \operatorname{tg}\omega = \sec^2\omega\, d\omega$ die Hauptgleichung die Form an:

$$\frac{d\dot{x}}{dp} = \frac{w \cos\omega}{g}\,\dot{x} = -\,\frac{\dot{x}\,\ddot{x}}{g}\,. \tag{29}$$

Die Quadraturformeln (17) gehen über in

$$\left.\begin{aligned} g\,t &= \int_p^{p_0} \dot{x}\,dp\,, \qquad & g\,s &= \int_p^{p_0} \dot{x}^2 \sec\omega\,dp = \int_p^{p_0} \dot{x}^2 \sqrt{1+p^2}\,dp\,, \\ g\,x &= \int_p^{p_0} \dot{x}^2\,dp\,, \qquad & g\,z &= \int_p^{p_0} \dot{x}^2\,p\,dp\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Diese Formeln geben eine Lösung, wenn man $\dot{x}$ als Funktion von $p = \operatorname{tg}\omega$ ausdrücken kann; das hätte durch Integration der Hauptgleichung (29) zu geschehen. Im Fall $w = 0$ ergibt sich aus (29) $\dot{x} = \dot{x}_0 = \text{const}$, die Quadraturformeln (30) lassen sich also dann in geschlossener Form auswerten (vgl. § 14). Die beiden Integrale für t und x in (30) lassen sich anschaulich deuten. Zeichnet man den Geschwindigkeitsriß mit $\dot{x}$ als Abstandsvektor, p/g als Winkel, so wird t gleich der Bogenlänge des Geschwindigkeitsrisses zwischen p_0 und p, x gleich dem doppelten Flächeninhalt des von $\dot{x}$ überstrichenen Sektors (Abb. 16).

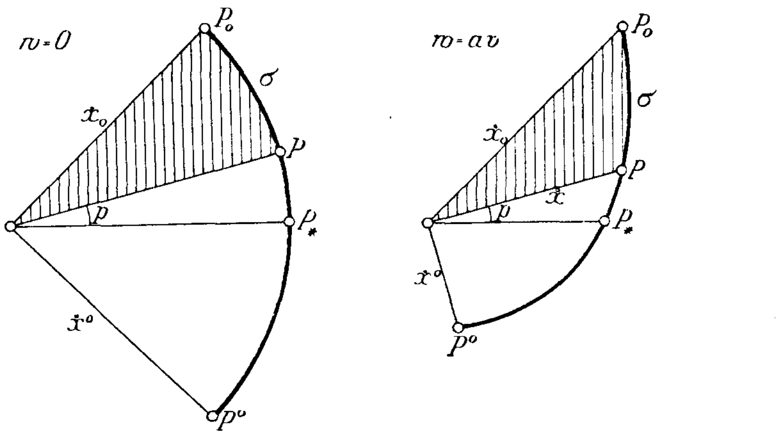

Abb. 16

In dem zweiten Grenzfall, daß die Schwere Null ist, $g = 0$, ist nach (10) die Erhöhung ω dauernd unveränderlich, die Geschoßbahn ist also geradlinig. ω muß daher durch eine andere Veränderliche ersetzt werden. Wie aus (18) folgt, ist bei jeder nichtgeradlinigen Bahn $\dot{x} = v\cos\omega$ monoton abnehmend. Im Grenzfall $\omega = \omega_0$ gilt dies aber auch noch, denn nach (9) ist für $g = 0$ die Geschwindigkeit v also auch $v\cos\omega_0$ monoton abnehmend. Ist daher $g/w \doteq 0$, so empfiehlt es sich, bei nicht zu steilen Bahnen $\dot{x}$ als unabhängige Veränderliche zu benutzen. Aus (29) geht dann die Hauptgleichung

$$\frac{d \operatorname{tg} \omega}{d \dot{x}} = -\frac{g}{\dot{x}\,\ddot{x}} \tag{31}$$

hervor, oder, in integrierter Form,

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_0 + g \int\limits_{\dot{x}}^{\dot{x}_0} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}}\,. \tag{32}$$

Die Quadraturformeln (30) sind durch die folgenden Formeln zu ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} t &= \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\ddot{x}}\,, & s &= \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} \sec \omega \, d\dot{x}}{\ddot{x}}\,, \\ x &= \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x}\, d\dot{x}}{\ddot{x}}\,, & z &= \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} \operatorname{tg} \omega \, d\dot{x}}{\ddot{x}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

In Verbindung mit (32) kann statt der letzten Gleichung auch

$$x \operatorname{tg} \omega_0 - z = \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{g\, d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}} \cdot \frac{\dot{x}\, d\dot{x}}{\ddot{x}} \tag{34}$$

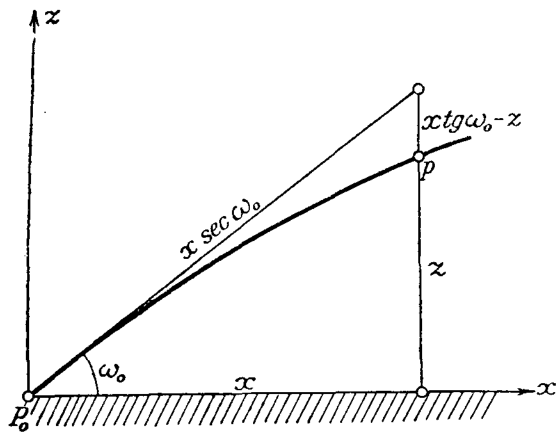

Abb. 17

geschrieben werden (Abb. 17). Damit diese Formeln eine Lösung liefern, muß man $\ddot{x}$ durch $\dot{x}$ ausdrücken. Auch das erfolgt durch die Hauptgleichung (32). Kennt man nämlich die Beziehung zwischen $\operatorname{tg} \omega$ und $\dot{x}$, dann kann man auch $\ddot{x}$ durch $\dot{x}$ ausdrücken vermittels (31) und umgekehrt, kann man $\ddot{x}$ durch $\dot{x}$ ausdrücken, dann wird durch diese Gleichung, in der die Variablen getrennt sind, auch $\operatorname{tg} \omega$ durch $\dot{x}$ ausgedrückt.

Diesen beiden Integrationsansätzen (29), (30), bzw. (32), (33) entsprechen zwei Klassen von Lösungen. Zur ersten Klasse gehört als Grenzfall der widerstandsfreie Schuß, gekennzeichnet durch $w = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Zur zweiten Klasse gehört als Grenzfall der schwerefreie Schuß, gekennzeichnet durch $g = 0$, $\omega = \omega_0$. Der Grenzfall der einen Klasse ist in der anderen nicht enthalten, weil für $\dot{x} = \dot{x}_0$ die Gleichungen (32), (33), für $\omega = \omega_0$ die Gleichungen (29), (30) hinfällig werden.

Die hier vorgenommene Unterscheidung, ob w/g oder g/w die kleinere Größe ist, hat an die Stelle der früher üblichen nach Flach- und Steilfeuer zu treten, mit der sie sich nur zum Teil deckt. Wie in § 11 gezeigt wurde, wächst w von dem Bahnpunkt an, wo es seinen kleinsten Wert hat, asymptotisch gegen den Wert g hin. Die Geschoßbahn wird daher durch den Punkt, wo $w = g$ ist, in zwei Teile geteilt, in deren erstem $w > g$, in deren zweitem $w < g$ ist. Beim Steilschuß der Praxis liegt dieser Teilpunkt $w(v) = g$ diesseits des Anfangspunktes, im virtuellen Teil der Geschoßbahn, falls die Anfangsgeschwindigkeit genügend klein ist; dann ist also durchweg $w < g$. Beim Flakschießen gegen Luftziele dagegen liegt mit Rücksicht auf die großen Anfangsgeschwindigkeiten der Teilpunkt $w = g$ sicher zwischen Abschußpunkt und Gipfel. Beim Flachschuß der Praxis liegt der Teilpunkt $w = g$ jenseits des Endpunktes der Geschoßbahn, wenn die Anfangsgeschwindigkeit groß, der Bahnbogen kurz ist, so daß auch noch für die Endgeschwindigkeit, also durchweg, $w > g$ ist.

§ 14. Der widerstandsfreie Schuß

Ist w/g so klein, daß es genau genug durch 0 ersetzt werden kann, ist also die Geschoßbewegung praktisch widerstandsfrei, so folgt aus der Hauptgleichung (29)

$$\dot{x} = v \cos \omega = \dot{x}_0 = \text{const}\,. \tag{35}$$

Die Quadraturformeln (30) ergeben dann

$$\left.\begin{aligned} g\,t &= \dot{x}_0 (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)\,, \\ g\,s &= \tfrac{1}{2} \dot{x}_0^2 \left[\operatorname{tg} \omega \cdot \sec \omega + \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) \right]_{\omega}^{\omega_0}, \\ g\,x &= \dot{x}_0^2 (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)\,, \\ g\,z &= \tfrac{1}{2} \dot{x}_0^2 (\operatorname{tg}^2 \omega_0 - \operatorname{tg}^2 \omega)\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} \omega)\,, \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \frac{g}{2\,\dot{x}_0^2}\, x^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Geschoßbahn ist also eine Parabel mit dem Parameter $\dot{x}_0^2/g$. Die Parabelachse hat die Schwererichtung. Der zeitliche Ablauf der Bewegung ergibt sich aus (36) und (37) zu

$$x = \dot{x}_0\, t\,, \qquad x \operatorname{tg} \omega_0 - z = \tfrac{1}{2} g\, t^2\,. \tag{38}$$

Die letzteren Gleichungen hätten natürlich auch aus den Bewegungsgleichungen unmittelbar gefolgert werden können. Aus

$$\ddot{x} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -g \tag{39}$$

schließt man nämlich sofort

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0\,, & \dot{z} &= \dot{z}_0 - g\,t\,, \\ x &= \dot{x}_0\,t\,, & z &= \dot{z}_0\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Das ist aber wegen $\dot{z}_0 = \dot{x}_0 \operatorname{tg} \omega_0$ mit (38) identisch.

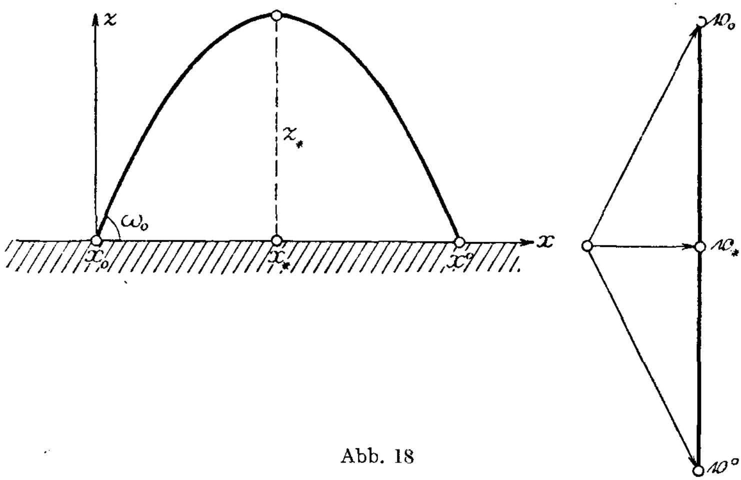

Abb. 18

Die Geschwindigkeit folgt aus (40) zu

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 - 2\,g\,z\,. \tag{41}$$

In der Form ($G = m\,g$ Geschoßgewicht)

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 = G\,z$$

geschrieben, ist das der bekannte Energiesatz [vgl. § 10 (5)].

Für Ziele im Mündungshorizont ist $z^0 = 0$, also nach (36) und (41)

$$\left.\begin{aligned} \omega^0 &= -\,\omega_0\,, \\ g\,t^0 &= 2\,\dot{x}_0 \operatorname{tg} \omega_0 = 2\,\dot{z}_0\,, \\ g\,s^0 &= \dot{x}_0^2 \left[\operatorname{tg} \omega_0 \cdot \sec \omega_0 + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{2}\right)\right], \\ g\,x^0 &= 2\,\dot{x}_0^2 \operatorname{tg} \omega_0 = 2\,\dot{x}_0\,\dot{z}_0 = v_0^2 \sin 2\,\omega_0\,, \\ v^0 &= v_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Bei der Berechnung der Bogenlänge s^0 wurde von der Beziehung $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega_0}{2}\right) = 1$ Gebrauch gemacht. Die gleiche Schußweite x^0 kann also bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit unter zwei verschiedenen Anfangserhöhungen erreicht werden: ω_0' und ω_0'', wobei $\omega_0' + \omega_0'' = \frac{\pi}{2}$ ist. Die größte Schußweite bei vorgegebenem v_0

ergibt sich für $\omega_0 = 45^0$. Mit $\omega_0 = 15^0$ bzw. $\omega_0 = 75^0$ erreicht man die halbe Höchstschußweite, weil $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ist.

Im Gipfel der Geschoßbahn ist $\omega_* = 0$, also nach (36) und (41)

$$\left.\begin{aligned} g\,t_* &= \dot{x}_0 \operatorname{tg} \omega_0 = \dot{z}_0\,, \\ g\,s_* &= \frac{1}{2}\,\dot{x}_0^2 \left[\operatorname{tg}\omega_0 \cdot \sec\omega_0 + \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{2}\right)\right], \\ g\,x_* &= \dot{x}_0^2 \operatorname{tg}\omega_0 = \dot{x}_0\,\dot{z}_0 = \tfrac{1}{2}\,v_0^2 \sin 2\,\omega_0\,, \\ g\,z_* &= \tfrac{1}{2}\,\dot{x}_0^2 \operatorname{tg}^2\omega_0 = \tfrac{1}{2}\,\dot{z}_0^2 = \tfrac{1}{2}\,g\,x_* \operatorname{tg}\omega_0\,, \\ v_* &= \dot{x}_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Es ist also

$$t_* = \tfrac{1}{2}\,t^0\,, \qquad s_* = \tfrac{1}{2}\,s^0\,, \qquad x_* = \tfrac{1}{2}\,x^0\,, \qquad z_* = \tfrac{1}{4}\,x^0 \operatorname{tg}\omega_0\,.$$

Schreibt man die Bahngleichung (37) in der Form

$$z = x\,(x^0 - x) \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{x^0}\,,$$

so erkennt man die Symmetrie des auf- und des absteigenden Astes. Auch die Geschwindigkeitsverteilung ist symmetrisch, denn nach (41) folgt für gleiche z auf dem auf- und dem absteigenden Aste gleiches v. Im Gipfel hat also v seinen kleinsten Wert. Daher fällt auch das Minimum des Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{v^2}{g\cos\omega}$ in den Gipfel. $\varrho_* = \dfrac{\dot{x}_0^2}{g}$ ist also dem Parabelparameter gleich.

Vier Aufgaben: a) Gegeben die Anfangserhöhung ω_0 und das Ziel $P\,(x, z)$; gesucht Anfangsgeschwindigkeit und Geschoßbahn. Für $\dot{x}_0$ erhält man aus (37) die Gleichung

$$\dot{x}_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g\,x^2}{x\operatorname{tg}\omega_0 - z} \qquad \text{und} \qquad v_0 = \dot{x}_0 \sec\omega_0\,.$$

Demnach muß die Bedingung $x\operatorname{tg}\omega_0 - z > 0$ erfüllt sein, das heißt, P muß unter der Anfangstangente liegen. v folgt aus (41), die Geschoßbahn aus (36). $\dot{x}_0$ ist eindeutig bis auf das Vorzeichen. Ist $x \gtreqless 0$, so ist $\dot{x}_0 \gtreqless 0$ zu wählen.

b) Gegeben die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und das Ziel $P\,(x, z)$; gesucht Anfangserhöhung und Geschoßbahn. Liegt das Ziel P in einer schiefen Ebene durch den Mündungshorizont, dann wird man den Geländewinkel ε einführen durch $z/x = \operatorname{tg}\varepsilon$. Aus (37) folgt für $\operatorname{tg}\omega_0$ die quadratische Gleichung

$$z = x\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2}\,(1 + \operatorname{tg}^2\omega_0)\,.$$

Die beiden Lösungen seien ω_0' und ω_0''. Durch die Gleichung $v_0^2 = 2\,g\,h$ werde die Größe h definiert. Nach (41) ist h die Höhe, in der $v = 0$ werden würde, es ist also die im Vertikalschuß erreichbare Höhe. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung für $\operatorname{tg}\omega_0$ sind reell, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem die Diskriminante

$$4h^2 - (x^2 + 4hz) \gtreqless 0$$

ist. Es liegen also innerhalb der Parabel

$$4h^2 = x^2 + 4hz\,, \qquad \text{mit} \qquad v_0^2 = 2gh\,, \tag{44}$$

die mit zwei Erhöhungen ω_0', ω_0'' erreichbaren Zielpunkte, auf ihr die mit einer Erhöhung $\omega_0' = \omega_0''$ erreichbaren, außerhalb die nicht erreichbaren. Dividiert man die Gleichung für $\operatorname{tg}\omega_0$ durch x, so gilt $\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{gx}{2v_0^2\cos^2\omega_0}$. Nun ist

$$2(\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\varepsilon)\cos^2\omega_0 = 2\sin(\omega_0 - \varepsilon)\cos\omega_0\sec\varepsilon = \sin(2\omega_0 - \varepsilon)\sec\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon\,,$$

also ergibt sich

$$\sin(2\omega_0 - \varepsilon) = \sin\varepsilon + \frac{gx}{v_0^2}\cos\varepsilon\,.$$

Demnach sind die beiden Lösungen dieser Gleichung, $2\omega_0' - \varepsilon$ und $2\omega_0'' - \varepsilon$ supplementär, das heißt, $(2\omega_0' - \varepsilon) + (2\omega_0'' - \varepsilon) = \pi$ oder $\omega_0' + \omega_0'' = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$. Die beiden Abschußrichtungen liegen daher symmetrisch gegen die Halbierungslinie des Winkels $ZOP = 90^0 - \varepsilon$. Das Maximum der Schußweite in der Richtung OP, also das Maximum von x bei gegebenem ε, erhält man für $\sin(2\omega_0 - \varepsilon) = 1$, das heißt, die Abschußrichtung halbiert dann den Winkel ZOP. Die Schußweite bei vorgegebenem Geländewinkel ist $x\sec\varepsilon$, also $(x\sec\varepsilon)_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}(1 - \sin\varepsilon)\sec^2\varepsilon$. Dieselben Überlegungen gelten natürlich auch bei Luftzielen. Dann ist ε die Neigung der Visierlinie gegen den Mündungshorizont.

c) Gegeben zwei Bahnpunkte $P_1(x_1, z_1)$ und $P_2(x_2, z_2)$; gesucht ω_0, v_0. Man erhält nach (37) zwei lineare Gleichungen für $\operatorname{tg}\omega_0$ und $1/\dot{x}_0^2$:

$$x_1\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{gx_1^2}{2}\cdot\frac{1}{\dot{x}_0^2} = z_1\,,$$

$$x_2\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{gx_2^2}{2}\cdot\frac{1}{\dot{x}_0^2} = z_2\,.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}\omega_0 = \frac{z_1x_2^2 - z_2x_1^2}{x_1x_2(x_2 - x_1)}\,, \qquad \dot{x}_0^2 = \frac{g}{2}\cdot\frac{x_1x_2(x_2 - x_1)}{z_1x_2 - z_2x_1}\,.$$

Einfacher als durch Rechnung löst man die Aufgabe durch Zeichnung, da man eine Parabel aus drei gegebenen Punkten O, P_1, P_2 und der gegebenen Achsenrichtung OZ zu konstruieren hat. Hat man sie gefunden, so ergibt sich $\dot{x}_0$ aus dem Parameter $\dot{x}_0^2/g$, und daraus $v_0 = \dot{x}_0\sec\omega_0$. Von dieser

Schußart machte man früher Gebrauch, um zum Beispiel die Crete der Brustwehr (Punkt P_1) noch eben zu überschießen und ein im Wallgang befindliches Ziel (Punkt P_2) zu treffen. Ein solcher Schuß ist als Streifschuß zu bezeichnen, wobei man unter Streifen eine so schwache Berührung meint, daß dadurch die Geschoßbahn unbeeinflußt bleibt. Wenn Otto*) ihn als Rikoschettschuß bezeichnet, so entspricht dies nicht dem sonstigen Sprachgebrauch, demzufolge hierunter der heute als Abpraller bezeichnete Schuß zu verstehen ist.

d) Gegeben drei Bahnpunkte P_1, P_2, P_3. Diese Aufgabe ist überbestimmt, da zwar durch vier Punkte O, P_1, P_2, P_3 eine Parabel (zweideutig) bestimmt ist, aber die Achsenrichtung dann nicht die vorgeschriebene Vertikale zu sein braucht. Durch zwei Punkte und die Tangenten in ihnen ist ein Parabelbogen eindeutig bestimmt. Davon kann man Gebrauch machen, wenn man die Geschoßbahn in Teilbögen durch Parabeln annähern will. Ebenso kann man die ganze Geschoßbahn zwischen Geschütz und Ziel durch einen Parabelbogen annähern, der die wahre Bahn im Anfang O und im Ziel P berührt.

Geschoßbahnscharen. Lassen wir bei vorgegebenem v_0 die Anfangserhöhung ω_0 alle Werte von 0^0 bis 180^0 durchlaufen, so erhalten wir eine Schar von Geschoßbahnen. Für diese ist der Abstand des Parabelscheitels von der Leitlinie, also

$$\text{der Halbparameter} \qquad \frac{1}{2}\,p = \frac{\dot{x}_0^2}{2\,g} = \frac{v_0^2 \cos^2\omega_0}{2\,g} = h\cos^2\omega_0\,,$$

$$\text{die Scheitelhöhe} \qquad z_* = \frac{\dot{z}_0^2}{2\,g} = h\sin^2\omega_0\,,$$

also haben alle Parabeln dieselbe Leitlinie;

$$z_* + \tfrac{1}{2}\,p = h\cos^2\omega_0 + h\sin^2\omega_0 = h$$

ist ihr Abstand von der Horizontalen.

Die Koordinaten des Scheitels sind nach (43)

$$x_* = \frac{v_0^2}{2\,g}\sin 2\,\omega_0 = h\sin 2\,\omega_0\,, \qquad z_* = h\sin^2\omega_0 = \frac{h}{2}\,(1-\cos 2\,\omega_0)\,,$$

also liegen die Scheitel auf der Ellipse

$$\frac{x_*^2}{A^2} + \frac{\left(z_* - \dfrac{h}{2}\right)^2}{B^2} = 1\,, \quad A = h\,, \quad B = \frac{h}{2}\,.$$

Die Hüllkurve der Schar fanden wir schon oben als die Parabel (44). Die Koordinaten der Brennpunkte sind nach (43)

$$x_F = x_* = h\sin 2\,\omega_0\,, \qquad z_F = z_* - \tfrac{1}{2}\,p = -\,h\cos 2\,\omega_0\,,$$

*) J. F. C. Otto, Mathematische Theorie des Ricochettschusses. Berlin 1833.

die Brennpunkte liegen also auf dem Kreis um O mit dem Radius h. Die „Simultanpunkte“, das heißt die zur gleichen Zeit t auf allen Bahnen erreichten Punkte, genügen der aus (40) hervorgehenden Gleichung

$$x^2 + (z + \tfrac{1}{2} g t^2)^2 = (v_0 t)^2 ;$$

sie liegen also auf einem Kreise vom Radius $v_0 t$ um den Punkt $x = 0$, $z = -\frac{1}{2} g t^2$.

§ 15. Der schwerefreie Schuß

Ist g/w so klein, daß es genau genug durch 0 ersetzt werden kann, so gibt die Hauptgleichung (31) wegen $\ddot{x} = -w \cos \omega$ sofort $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_0$, also $\omega = \omega_0$. Die Quadraturformeln (33), (34) gehen daher über in Integrale mit v als Veränderliche:

$$\left.\begin{aligned} t &= T(v) - T(v_0), \qquad T(v) = \int\limits_v \frac{dv}{w(v)}, \\ s &= D(v) - D(v_0), \qquad D(v) = \int\limits_v \frac{v\,dv}{w(v)}, \\ x &= s \cos \omega_0, \qquad z = s \sin \omega_0 = x \operatorname{tg} \omega_0 . \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Zur Darstellung der schwerefreien Geschoßbewegung genügen, bei bekanntem Widerstandsgesetz, wie man sieht, zwei Tafeln $T(v)$ und $D(v)$. Die obere Integrationsgrenze wird man zweckmäßig so groß wählen, daß die praktisch vorkommenden Anfangsgeschwindigkeiten kleiner sind als diese Integrationsgrenze.

Wir fragen nach den Werten von s und t, für welche die Geschwindigkeit v den Wert 0 erreicht. Sie ergeben sich aus den Formeln:

$$t_* = \int\limits_0^{v_0} \frac{dv}{w(v)}, \qquad s_* = \int\limits_0^{v_0} \frac{v\,dv}{w(v)} .$$

Da mit $v = 0$ auch $w = 0$ wird, können diese Integrale endliche oder unendliche Werte haben. Sei $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{v w'}{w} = n_0$, dann wird w für kleine v der n_0-ten Potenz von v proportional. Also bleibt die Zeit t_* endlich, wenn $n_0 < 1$ ist; der Weg s_* bleibt endlich, wenn $n_0 < 2$ ist. Die Erfahrung und die Theorie legen es nahe, $n_0 = 1$ zu wählen.

Im virtuellen Teil der Geschoßbahn nimmt v vom Abschußpunkt aus unbeschränkt zu, denn es ist $|\dot{v}| = w(v) > w(v_0)$. Wir fragen daher nach den Werten von s und t, für die $v \to \infty$ geht. Es ist

$$t_{-\infty} = -\int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{w(v)}, \qquad s_{-\infty} = -\int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{v\,dv}{w(v)} .$$

Setzt man $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{v\,w'}{w} = n_\infty$, so wird w für große v der n_∞-ten Potenz von v proportional. Demnach wird $t_{-\infty}$ endlich, wenn $n_\infty > 1$, die Weglänge $s_{-\infty}$ wird endlich, wenn $n_\infty > 2$ ist.

Auch bei kleinen Geschwindigkeiten ist der schwerefreie Schuß annähernd zu verwirklichen. Man muß dann das Geschoß der Schwere entziehen, entweder indem man es auf waagerechter Ebene gleiten oder rollen läßt, oder indem man seinen Auftrieb dem Gewicht gleich macht, wie es beim Aerostaten geschieht.

Die Formeln (45) können dazu benutzt werden, das Widerstandsgesetz eines Geschosses zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, daß sich in erster Näherung die Widerstandsgesetze ähnlich geformter Geschosse nur durch einen Faktor, den Geschoßfaktor c, unterscheiden, falls also $w = c\,f(v)$ ist, werden die Funktionen

$$\overline{T}(v) = c\,T(v) \qquad \text{und} \qquad \overline{D}(v) = c\,D(v)$$

eingeführt. Auf einem möglichst rasanten Bahnbogen werden Anfangs- und Endgeschwindigkeit, v_1, v_2 und die Flugzeit $t_2 - t_1$ gemessen. Dann folgt c aus

$$c \cdot (t_2 - t_1) = \overline{T}(v_2) - \overline{T}(v_1)\,.$$

Solche Messungen erfolgen zum Beispiel, indem man Rahmen durchschießt. Der Zeitpunkt des Durchgangs läßt sich elektrisch sehr genau registrieren. Zur Bestimmung einer Geschwindigkeit braucht man zwei Rahmen, deren Abstand bekannt sein muß. Insgesamt sind also vier Messungen zur Bestimmung von c erforderlich.

§ 16. Allgemeine Geschoßbahneigenschaften

Geschwindigkeitsriß. Wir schreiben die erste der Bewegungsgleichungen § 10 (1) in rechtwinkligen Komponenten. Wegen § 10 (2) ergibt sich

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\,a(v)\,\dot{x}\,, \qquad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\,a(v)\,\dot{z} - g \quad \text{mit} \quad a(v) = \frac{w(v)}{v}\,. \tag{46}$$

Daraus folgt für die Hauptgleichung

$$\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} = \frac{a(v)\,\dot{z} + g}{a(v)\,\dot{x}}\,, \quad \text{wo} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2\,. \tag{47}$$

Nochmalige Differentiation führt auf

$$\frac{d^2\dot{z}}{d\dot{x}^2} = -\,\frac{a'}{a^2} \cdot \frac{g}{\dot{x}} \cdot \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{a'}{a^2}\,\dot{v}\,\frac{g}{\dot{x}\,w\cos\omega}\,. \tag{48}$$

Hierin ist

$$a' = \frac{w'}{v} - \frac{w}{v^2} = \frac{w}{v^2}\left(\frac{v\,w'}{w} - 1\right) \gtreqless 0 \quad \text{falls} \quad n_1(v) = \frac{v\,w'}{w} \gtreqless 1\,.$$

Die empirisch ermittelten Widerstandsfunktionen haben durchweg $n_1 > 1$, also ist dann auch $a' > 0$ in der ganzen Bahn. Daher wird $\frac{d^2\dot{z}}{d\dot{x}^2} > 0$ soweit $\dot{v} < 0$, d. h. vom Bewegungsbeginn bis zur Stelle kleinster Geschwindigkeit; es ist $\frac{d^2\dot{z}}{d\dot{x}^2} < 0$ soweit $\dot{v} > 0$, d. h. von der Stelle kleinster Geschwindigkeit an im absteigenden Ast der Geschoßbahn. Der Hodograph hat also an der Stelle kleinster Geschwindigkeit seinen einzigen Wendepunkt, vorausgesetzt, daß überall in der Bahn $n_1(v) = \frac{v\,w'}{w} > 1$ ist. An der Stelle kleinster Geschwindigkeit wird $\left(\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}}\right)_{v_{\min}} = -\operatorname{ctg}\omega(v_{\min}) \geqq 0$. Die Wendetangente steht daher senkrecht auf $\mathfrak{v}_{\min}$. (Das Gleichheitszeichen gilt für den Fall, daß die Geschwindigkeit im absteigenden Ast dauernd abnimmt, also für $\omega(v_{\min}) \to -\frac{\pi}{2}$). Für $v \to v_\infty$ geht stets $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} \to 0$, d. h. der Hodograph trifft die negative $\dot{z}$-Achse unter rechtem Winkel, falls $n_1 > 1$ ist. Im absteigenden Ast zwischen $\mathfrak{v}_{\min}$ und $\mathfrak{v}_\infty$ ist stets $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} > 0$; $\dot{z}(\dot{x})$ wächst also monoton mit $\dot{x}$. Schneidet der Hodograph die $\dot{x}$-Achse, hat also die Geschoßbahn einen Gipfel, so ist im aufsteigenden Ast wegen (47) überall $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} > 0$. Es ist dann in der ganzen Bahn $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} > 0$; $\dot{z}(\dot{x})$ ist eine mit $\dot{x}$ monoton wachsende Funktion, die zwischen $\mathfrak{v}_\infty$ und $\mathfrak{v}_{\min}$ konvex, im übrigen konkav nach unten ist. In diesem Fall nimmt im Sinne fortschreitender Bewegung die Vertikalgeschwindigkeit $\dot{z}$ monoton gegen den Grenzwert $-v_\infty$ hin ab*) (vgl. Abb. 14).

Aber nicht jede Geschoßbahn hat einen Gipfel, nämlich immer dann nicht, wenn es im absteigenden Ast eine Stelle gibt, an der $w \sin\omega + g = 0$ wird. An dieser Stelle hat dann der Hodograph eine horizontale Tangente, $\dot{z}(\dot{x})$ hat hier ein Maximum, für alle größeren Werte von $\dot{x}$ ist dann $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} < 0$. Der für einen Gipfel charakteristische Wert $\dot{z}_* = 0$ kann also gar nicht erreicht werden. Bei Bahnen dieser Art nimmt in der Geschoßbahn zunächst $|\dot{z}|$ ab bis zu seinem kleinsten Wert; von da an wächst $|\dot{z}|$ bis zum Grenzwert v_∞. Die Gesamtgeschwindigkeit v dagegen nimmt ständig ab. Denn im Gipfel des Hodographen ist $w \sin|\omega| = g$, also $w > g$, also wird an dieser Stelle $\dot{v} = g \sin|\omega| - w = \frac{1}{w}(g^2 - w^2) < 0$, d. h. die Geschwindigkeit nimmt ab. An der Stelle kleinster Geschwindigkeit ist

*) So wie bei Cranz, Ballistik I (1925), S. 115, Abb. 46b, kann also der Hodograph nicht aussehen.

$\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} = \frac{g^2 - w^2}{g w \cos \omega}$; daraus folgt, da $d\dot{z}/d\dot{x}$ nicht negativ sein kann, daß $w(v_{\min}) = g$ sein muß, d. h. $v_{\min} = v_\infty$: In allen Bahnen, die keinen Gipfel haben, nimmt die Geschwindigkeit mit wachsender Zeit monoton gegen den Grenzwert v_∞ ab.

Ist längs der gesamten Geschoßbahn $n_1(v) = \frac{v\,w'}{w} = 1$, ist also der Widerstand eine lineare Funktion von v, so folgt aus (47) für die Hodographen (vgl. Abb. 14)

$$\dot{z}(\dot{x}) = C\,\dot{x} - \frac{g}{a}\,.$$

Das ist eine Schar von Geraden durch den Punkt $\dot{x} = 0$, $\dot{z} = -\frac{g}{a}$. Für die Stellen kleinster Geschwindigkeit ist

$$v\,\dot{v} = g\,\dot{z} + w(v)\,v = g\,\dot{z} + a \cdot (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = 0\,.$$

Das ist ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2}\,\frac{g}{a}$ durch den Punkt $\dot{x} = 0$, $\dot{z} = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{a}$. Bei linearem Luftwiderstand findet man also Erhöhung und Größe der Minimalgeschwindigkeit durch einfache Konstruktion. Ist $C \leqq 0$, so nimmt die Geschwindigkeit monoton gegen v_∞ ab. Ist $C = 0$, so hat die Vertikalgeschwindigkeit dauernd denselben Wert.

In der widerstandsfreien Bewegung, $w = 0$, ist nach § 14 (35) $\dot{x} = \text{const}$, also ist der Hodograph eine zur $\dot{z}$-Achse parallele Gerade. Die Kurve kleinster Geschwindigkeit hat die Form $g\,\dot{z} = 0$, d. h., wie bekannt, hat die Geschwindigkeit im Gipfel ihr Minimum.

G e s c h w i n d i g k e i t s v e r t e i l u n g i n d e r B a h n. Über die Verteilung der Geschwindigkeit als Funktion der Höhe über dem Mündungshorizont gibt die Energiegleichung § 10 (5) Auskunft. In integrierter Form lautet diese Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\,(v_2^2 - v_1^2) + g\,(z_2 - z_1) = -\int_{t_1}^{t_2} w(v)\,v\,dt\,. \tag{49}$$

Vergleichen wir also zwei Geschoßbahnpunkte gleicher Höhe (v_1, z_1 aufsteigender, v_2, z_2 absteigender Ast), so ergibt sich aus (49) $v_2 < v_1$. Insbesondere ist $v^0 < v_0$, d. h. die Endgeschwindigkeit bei Zielen im Mündungshorizont ist stets kleiner als die Abschußgeschwindigkeit.

Aus § 13 (30) ergibt sich, wenn man zunächst die Integraldarstellung für z differenziert, umgruppiert und dann wieder integriert,

$$\mathrm{tg}^2\,\omega = 2\,g \int_z^{z_*} \frac{d\,z}{\dot{x}^2}\,. \tag{50}$$

Nun ist $\dot{x}$ nach § 11 (18) eine monoton abnehmende Funktion; daher ist, wenn einmal vom Gipfel aus über den aufsteigenden Ast bis z_1, ein zweites

Mal über den absteigenden Ast bis z_2 integriert wird und wenn $z_1 = z_2$ gewählt wird, $\operatorname{tg}^2\omega_2 > \operatorname{tg}^2\omega_1$, also $|\omega_2| > \omega_1$. Insbesondere ist $|\omega^0| > \omega_0$, d. h. die Enderhöhung bei Zielen im Mündungshorizont ist (absolut genommen) stets größer als die Anfangserhöhung.

Es ist aber auch $v_2 < v_1$, wenn man die zu gleichem $|\omega|$ im auf- und absteigenden Ast gehörigen Geschwindigkeiten vergleicht. Denn $\dot{x} = v\cos\omega$ ist monoton abnehmend mit abnehmendem ω. Dasselbe folgt dann für den Krümmungsradius aus $\varrho = \dfrac{v^2}{g}\sec\omega$.

Setzt man in der Integraldarstellung für x in § 13 (30) $\dot{x}^2 dp = -\dfrac{g\,dz}{p}$, so ergibt sich

$$x - x_* = \int\limits_z^{z_*} \frac{dz}{\operatorname{tg}\omega}. \tag{51}$$

Bedeutet also einmal $z = z_1$ einen Punkt im aufsteigenden Ast, dann ein zweites Mal $z = z_2$ einen gleichhohen Punkt im absteigenden Ast, so ergibt sich $|x_1 - x_*| > x_2 - x_*$. Insbesondere gilt also: der Horizontalabstand des Gipfelpunktes vom Abschußpunkt ist stets größer als die halbe Schußweite x^0.

Geschoßbahnscharen. Es soll jetzt vorausgesetzt werden, daß sich der Luftwiderstand in der Form $w(v) = c\,f(v)$ schreiben läßt, wo $f(v)$ eine vorgegebene Funktion, c, der Geschoßfaktor, von der Geschoßform abhängen soll. Dann ist also die Schar der Geschoßbahnen von einem bestimmten Anfangspunkt aus (wenn man alle Bahnen in dieselbe Halbebene klappt) durch drei Parameter, die Anfangsgeschwindigkeit v_0, deren Erhöhung ω_0 und den Geschoßfaktor c gekennzeichnet. Ersetzen wir in der Hauptgleichung (47) auf der rechten Seite $\dot{x}, \dot{z}$ durch v, ω, so ergibt sich

$$\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} = \operatorname{tg}\omega + \frac{1}{c}\cdot\frac{g}{f(v)}\sec\omega. \tag{52}$$

Es seien ω_0, c fest, v_0 veränderlich zwischen 0 und ∞. Längs eines beliebigen Strahles $\omega = \text{const}$ der Geschwindigkeitsebene wird $d\dot{z}/d\dot{x}$ nach (47) mit wachsendem v kleiner und strebt mit $v \to \infty$ dem Grenzwert $\operatorname{tg}\omega$ zu. Da sich nach § 10 (10), die Bahntangente monoton dreht, schneidet jeder Hodograph, wenn überhaupt, nur einmal jeden Strahl $\omega = \text{const}$. Die durch einen Strahl ω gehenden Hodographen bilden ein mit wachsendem $\dot{x}$ divergierendes Büschel. Der einzige singuläre Punkt der $(\dot{x}, \dot{z})$-Ebene ist der Punkt $\dot{x} = 0$, $\dot{z} = v_\infty$, wo v_∞ aus $c\,f(v_\infty) = g$ folgt. In diesen Punkt münden sämtliche Kurven der Hodographenschar. Im übrigen geht durch jeden Punkt der Halbebene $\dot{x} > 0$ genau ein Hodograph. Die Hodographen, die einen Strahl ω_0 schneiden, überdecken das Gebiet der Halbebene oberhalb desjenigen Hodographen, der den Strahl ω_0 als Asymptote hat. Das ist die gesuchte Schar. Die Bahnkurven, die zu dieser Schar gehören und durch einen festen Punkt O gehen, überdecken das Gebiet der $\mathfrak{x}$-Ebene unterhalb des Strahles ω_0 und rechts von der Lotrichtung durch O. Durch jeden Punkt dieses Gebietes geht genau eine Geschoßbahn.

Es seien ω_0, v_0 fest, c veränderlich zwischen 0 und ∞. Alle Hodographen gehen von dem Punkt ω_0, v_0 der $\mathfrak{v}$-Ebene aus, aber jeder Hodograph trifft die negative $\dot{z}$-Achse in einem anderen Punkt (weil v_∞ mit wachsendem c monoton abnimmt). Die Schar der Hodographen wird begrenzt durch die Vertikale durch ω_0, v_0, gehörig zu $c = 0$ (widerstandsfreier Schuß) und den Strahl $\omega = \omega_0$, gehörig zu $c = \infty$. Daß die Hodographen der Schar dieses Gebiet einfach überdecken, kann man so einsehen: Nach § 13 (28) ist $\frac{d\dot{x}}{d\omega} = c\frac{f(v)\,v}{g}$, d. h. $\dot{x}$ nimmt, bei festgehaltenem v, um so stärker ab mit ω, je größer c ist. Die Hodographen bilden also ein im Sinne fortschreitender Bewegung divergierendes Büschel, wenn man die Linienelemente vergleicht, die zu gleichem v gehören. Zwei Hodographen der Schar können also für $\omega < \omega_0$ keinen Punkt gemeinsam haben, anderseits können die Hodographen durch stetige Veränderung von c ineinander übergeführt werden. Es muß also auch durch jeden Punkt des abgegrenzten Gebietes ein Hodograph gehen. Zu gleicher Vertikalgeschwindigkeit $\dot{z}$ gehört daher eine um so kleinere Horizontalgeschwindigkeit $\dot{x}$, je größer c ist. Daher bedecken die Geschoßbahnen, die zu dieser Schar gehören und durch einen festen Punkt O gehen, das Gebiet rechts von der Lotrichtung durch O und unterhalb der parabolischen Grenzbahn $c = 0$.

Halten wir c fest und variieren wir v_0 und ω_0 und ist P ein Punkt auf dem Strahl ω, so geht durch P eine einparametrige Schar von Geschoßbahnen, mit ω_0 (v_0) als Parameter; nämlich zu jedem $\omega_0 > \omega$ gehört ein v_0. Diese Bahnen erfüllen das Gebiet oberhalb des Strahles ω und links von der Vertikalen durch P sowie unterhalb des Strahles ω und rechts von derselben Vertikalen; so daß durch jeden Punkt Q dieses Gebietes eine solche Bahn geht. Durch drei Punkte O, P, Q, die diesen Bedingungen genügen, geht also bei vorgegebenem Geschoßfaktor immer eine und nur eine Geschoßbahn. Diese Eigenschaft hat also die Geschoßbahn mit der Parabel des widerstandsfreien Schusses gemeinsam.

Das gilt für jeden Wert des Geschoßfaktors c. Variieren wir also auch noch c, so entsteht eine einparametrige Schar von Geschoßbahnen, die alle durch O, P und Q gehen und ein gewisses Gebiet der $\mathfrak{x}$-Ebene erfüllen, so daß durch jeden darinliegenden Punkt eine Bahn geht. Hält man also auch noch den Geschoßfaktor c verfügbar, so geht durch vier Punkte der eben beschriebenen Art eine und nur eine Geschoßbahn.

Halten wir ω_0 fest und variieren wir v_0 und c, so geht durch jeden Punkt P des Gebietes unterhalb des Strahles ω_0 eine einparametrige Schar von Geschoßbahnen, darunter auch eine parabolische Bahn. Das Gebiet, das diese Bahnen durch O und P überdecken, ist einfach belegt. Denn durch jeden Punkt Q dieses Gebietes kann nach dem Vorigen nur eine Bahn gehen (weil der Punkt O wegen der dort vorgeschriebenen Richtung doppelt zählt). Insbesondere schneidet eine Parabel, die mit einer beliebigen Geschoßbahn Anfangs- und Endpunkt und entweder Anfangs- oder Enderhöhung gemeinsam hat, diese Geschoßbahn in keinem weiteren Punkte. Die Parabel liegt zwischen den beiden Punkten unter der wahren Geschoßbahn, wenn die Anfangserhöhungen gleich sind, darüber, wenn die Enderhöhungen gleich sind. Liegt der Endpunkt im Mündungshorizont, so liegt also die Gipfelhöhe z_* der Bahn zwischen denjenigen der beiden Parabeln, d. h. zwischen $\frac{1}{4} x^0 \operatorname{tg} \omega_0$ und $\frac{1}{4} x^0 \operatorname{tg} |\omega^0|$ [§ 14 (43)]. Zwischen diesen Grenzen liegen z. B. die Werte $\frac{1}{8} x^0 (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} |\omega^0|)$ oder $\frac{1}{4} x^0 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \omega_0 \cdot \operatorname{tg} |\omega^0|}$ oder $\frac{1}{2} x^0 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \omega_0 + \operatorname{ctg} |\omega^0|}$. Jeder dieser Werte kann also als genäherter Ausdruck für die Gipfelhöhe gelten.

Halten wir v_0 und c fest und variieren wir ω_0, so hat die zugehörige Schar von Geschoßbahnen eine Hüllkurve. Ist P ein Punkt derselben, so ist P der weiteste Punkt, der in der Richtung OP mit dem gegebenen v_0 und c erreicht werden kann. Insbesondere sei P^0 der in der Horizontalen weiteste erreichbare Punkt. Der zugehörige Schuß heiße der „Maximalschuß". Für einen Schuß, flacher als der Maximalschuß, wächst die Schußweite mit wachsender Anfangserhöhung ω_0; für einen Schuß, steiler als der Maximalschuß, wächst die Schußweite mit abnehmender Anfangserhöhung ω_0. Schüsse der ersten Art sollen „flache", der zweiten Art „steile" heißen. Der Teil einer Bahn bis zum Berührungspunkt P mit der Hüllkurve heiße „Hauptbogen", der übrige Teil heiße „Endbogen". Läßt man ω_0 alle Werte von $+\pi/2$ bis $-\pi/2$ annehmen, so beschreibt P die ganze Hüllkurve, und das Innere der Hüllkurve wird bestrichen sowohl von den Hauptbogen als auch von den Endbogen. Demnach gehen durch jeden Punkt innerhalb der Hüllkurve zwei Bahnen, und zwar oberhalb des Maximalschusses zwei steile oder zwei flache; unterhalb des Maximalschusses ein steiler und ein flacher; ferner oberhalb des Horizontalschusses ($\omega_0 = 0$) ein Haupt-, ein Endbogen, unterhalb des Horizontalschusses zwei Endbogen.

Approximation durch Kegelschnitte. Ein Kegelschnittbogen, der den Bogen OP^0 der Geschoßbahn in O und P^0 berührt, hat die Gleichung

$$(x - z \operatorname{ctg} \omega_0)(x^0 - x + z \operatorname{ctg} \omega^0) = \lambda^2 z^2 .$$

Je kleiner (größer) λ^2, desto höher (flacher) ist der Bogen; denn zu $z'(x) = 0$ gehört die Gipfelhöhe $z_* = \frac{1}{2} x^0 : [\lambda + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \omega_0 - \operatorname{ctg} \omega^0)]$. Weiter folgt aus $z'(x) = 0$, daß im Gipfel $(x_* - z_* \operatorname{ctg} \omega_0)^2 = \lambda^2 z_*^2$, d. h. daß λ^2 positiv sein muß.

Für $\lambda^2 = -\operatorname{ctg}\omega_0 \cdot \operatorname{ctg}\omega^0$ wird die Gleichung linear in z:

$$z = \frac{x\,(x^0 - x)}{x^0 \operatorname{ctg}\omega_0 - \varepsilon\, x}\,, \qquad \text{wenn} \qquad \varepsilon = \operatorname{ctg}\omega_0 + \operatorname{ctg}\omega^0$$

gesetzt wird. Das ist die schon von Newton vorgeschlagene Näherungshyperbel mit senkrechter Endasymptote bei $x = \frac{1}{\varepsilon} \cdot x^0 \operatorname{ctg}\omega_0$. Das Widerstandsgesetz möge in der Form $\mathfrak{w} = -\frac{w\,(v)}{v}\,\mathfrak{v}$ angesetzt werden. Formale Differentiation ergibt bei Beachtung von (46)

$$z'\,(x) = \frac{\dot z}{\dot x}\,, \qquad z''\,(x) = -\frac{g}{\dot x^2}\,, \qquad z'''\,(x) = \frac{2\,g\,\ddot x}{\dot x^4}\,;$$

Differentiation der Bahngleichung führt auf

$$\begin{aligned} z' \; N^2 &= (x^0 - x)^2 \operatorname{ctg}\omega_0 + x^2 \operatorname{ctg}\omega^0\,, \\ z'' \; N^3 &= 2\, x^{0\,2} \operatorname{ctg}\omega_0 \operatorname{ctg}\omega^0\,, \\ z''' \, N^4 &= 3\,\varepsilon\, z''\, N^3\,, \end{aligned}$$

wo $\quad N\,(x) = x^0 \operatorname{ctg}\omega_0 - \varepsilon\, x = (x^0 - x) \operatorname{ctg}\omega_0 - x \operatorname{ctg}\omega^0 > 0\,.$

Es ist also $z'''^3 : z''^4 = \text{const.}$ Damit ist x eliminiert und es ergibt sich $\ddot x = -C\,\dot x^{4/3}$, also

$$w\,(v) = C\,v\,\dot x^{1/3} = C\,v^{4/3} \cos^{1/3}\omega \quad \text{mit} \quad C = \frac{3}{2}\,\varepsilon \sqrt[3]{\frac{g}{2\,x^{0\,2} \operatorname{ctg}\omega_0 \operatorname{ctg}\omega^0}}\,.$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}\omega_0 - \operatorname{ctg}\omega^0)$ wird der Kegelschnitt eine Parabel mit der schiefen Achsenrichtung $x = \frac{\varepsilon}{2}\,z$, also dem konstanten Horizontalwiderstand $\ddot x = -\frac{\varepsilon}{2}\,g$. Das Widerstandsgesetz hat also die Form

$$w\,(v) = \frac{\varepsilon}{2}\,g\,\frac{v}{\dot x} = \frac{\varepsilon}{2}\,g \sec\omega\,.$$

Die Gipfelwerte sind bei beliebigem λ

$$x_* = \frac{1}{2}\,x^0 \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{\lambda + \frac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}\omega_0 - \operatorname{ctg}\omega^0)}\right),$$

$$z_* = \frac{1}{2}\,\frac{x^0}{\lambda + \frac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}\omega_0 - \operatorname{ctg}\omega^0)}\,.$$

Der Gipfel eines Kegelschnittbogens liegt also auf der Geraden $x = \frac{1}{2}\,x^0 + \frac{1}{2}\,\varepsilon z$, diese geht durch den Schnitt T der beiden Tangenten $x - z \operatorname{ctg}\omega_0 = 0$ und $x^0 - x + z \operatorname{ctg}\omega^0 = 0$ und durch die Mitte M von $O\,P^0$. Für den Fall der schiefliegenden Parabel ist der Gipfel die Mitte von $M\,T$. Solche Näherungsformeln sind besser als z. B. die gelegentlich gebrauchte $x_* = \frac{1}{2}\,x^0\,(1 + \frac{1}{10})$ und ähnliche, die für die Parabel nicht gelten; denn einer Parabel kommt eine Geschoßbahn bei kleinem w/g beliebig nahe (vgl. § 14, § 18).

Viertes Kapitel

Potenzreihen. Grenzbahnen

§ 17. Normierte Größen

Die Differentialgleichungen der Geschoßbewegung lassen sich nach § 16 (46) in der Form schreiben:

$$\ddot{x}\,(t) = -\,w\,(v)\,\frac{\dot{x}}{v}\,, \qquad \ddot{z}\,(t) = -\,w\,(v)\,\frac{\dot{z}}{v} - g\,. \tag{1}$$

Die hier auftretenden Größen x, z, t, v, w, g können durch zwei Dimensionen: Länge und Zeit, ausgedrückt werden. Um die Gleichungen dimensionslos zu machen, kann man etwa durch w_0 dividieren (der Fall $v_0 = 0$ ist auszuschließen). Führt man dann noch die neuen dimensionslosen Veränderlichen ein:

$$\xi = \frac{w_0}{v_0^2}\cdot x\,, \qquad \zeta = \frac{w_0}{v_0^2}\cdot z\,, \qquad \tau = \frac{w_0}{v_0}\cdot t$$

und schreibt man zur Abkürzung

$$\frac{w}{w_0} = \tilde{\omega}\,, \qquad \frac{g}{w_0} = \gamma\,, \qquad \frac{v}{v_0} = \mathrm{v}\,,$$

so gehen die Gleichungen (1) über in die neuen normierten Differentialgleichungen

$$\ddot{\xi}\,(\tau) = -\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\xi}\,, \qquad \ddot{\zeta}\,(\tau) = -\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\zeta} - \gamma\,. \tag{2}$$

Die Anfangswerte sind

$$\xi_0 = 0\,, \quad \zeta_0 = 0\,, \quad \dot{\xi}_0 = \cos\omega_0\,, \quad \dot{\zeta}_0 = \sin\omega_0\,, \quad \mathrm{v}_0 = 1\,, \quad \tilde{\omega}_0 = 1\,.$$

Die Art des Vorkommens der dimensionslosen Größe ω_0 läßt sich in dieser Weise nicht voraussehen. Durch eine Achsendrehung um den Winkel ω_0 und eine Umklappung um die $\mathfrak{x}$-Achse:

$$\xi\cos\omega_0 + \zeta\sin\omega_0 = \mathfrak{x}\,, \qquad \xi\sin\omega_0 - \zeta\cos\omega_0 = \mathfrak{z}$$

wird man aber auf die Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathfrak{x}}\,(\tau) = -\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\mathfrak{x}} - \gamma\sin\omega_0\,, \qquad \ddot{\mathfrak{z}}\,(\tau) = -\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\mathfrak{z}} + \gamma\cos\omega_0 \tag{3}$$

geführt, mit den Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{x}_0 = 0\,, \quad \mathfrak{z}_0 = 0\,, \quad \dot{\mathfrak{x}}_0 = 1\,, \quad \dot{\mathfrak{z}}_0 = 0\,, \quad \mathrm{v}_0 = 1\,.$$

Da $\tilde{\omega}/\mathrm{v}$ bloße Funktion von $\mathrm{v}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 = \dot{\mathfrak{x}}^2 + \dot{\mathfrak{z}}^2$ ist, so kommt in den Gleichungen (3) ω_0 nur in den Verbindungen $\gamma\cos\omega_0$, $\gamma\sin\omega_0$ vor.

Die Bahn wird gerade, wenn $\gamma = 0$ ist (schwerefreier Schuß § 15) oder wenn $\cos\omega_0 = 0$ ist (senkrechter Schuß § 12). Es ist also $\mathfrak{z} = 0$, wenn $\gamma\cos\omega_0 = 0$ ist. Also können wir setzen

$$\mathfrak{x} = \varphi\,(\tau, \gamma\cos\omega_0, \gamma\sin\omega_0)\,, \qquad \mathfrak{z} = \gamma\cos\omega_0\cdot\psi\,(\tau, \gamma\cos\omega_0, \gamma\sin\omega_0)\,.$$

Die hier vorgenommene Normierung ist nicht die einzig mögliche. Für die Normierung stehen die drei Größen w_0, v_0, g zur Verfügung. Soll das Monom $g^a\cdot w_0^b\cdot v_0^c$ von der Dimension der Länge sein, so muß $a+b+c=1$, $2a+2b+c=0$, d. h. $a+b=-1$, $c=2$ sein; soll das Monom von der Dimension der Zeit sein, so muß $a+b+c=0$, $2a+2b+c=-1$, d. h. $a+b=-1$, $c=1$ sein. Man erhält daher für Länge und Zeit die Normierungsfaktoren

$$g^a\cdot w_0^{-1-a}\cdot v_0^2 \quad \text{bzw.} \quad g^a\cdot w_0^{-1-a}\cdot v_0^1\,.$$

Für $a = 0$ erhält man die oben angewandten. Die hier gefundenen allgemeineren unterscheiden sich von jenen speziellen nur durch eine Potenz von $\gamma = g/w_0$.

Die in (2) und (3) benutzten Normierungen sind am Platze, wenn es sich um Bahnen der zweiten Klasse (γ klein) handelt. Bei Bahnen der ersten Klasse (γ groß) dagegen empfiehlt es sich, statt ξ, ζ, τ die normierten Veränderlichen

$$\Xi = \gamma\,\xi = \frac{g}{v_0^2}\,x\,, \qquad \mathrm{Z} = \gamma\,\zeta = \frac{g}{v_0^2}\,z\,, \qquad \Theta = \gamma\,\tau = \frac{g}{v_0}\,t$$

zu wählen. Die zugehörigen Differentialgleichungen sind

$$\ddot{\Xi}\,(\Theta) = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\Xi}\,, \qquad \ddot{\mathrm{Z}}\,(\Theta) = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}}\,\dot{\mathrm{Z}} - 1\,. \tag{4}$$

Wir wollen das Vorkommen von γ in den Entwicklungen

$$\xi = \dot{\xi}_0\,\tau + \tfrac{1}{2}\,\ddot{\xi}_0\,\tau^2 + \tfrac{1}{6}\,\dddot{\xi}_0\,\tau^3 + \cdots$$
$$\zeta = \dot{\zeta}_0\,\tau + \tfrac{1}{2}\,\ddot{\zeta}_0\,\tau^2 + \tfrac{1}{6}\,\dddot{\zeta}_0\,\tau^3 + \cdots$$

näher untersuchen. Durch k-malige Differentiation von (2) erhält man, wenn noch $\dfrac{\tilde{\omega}\,(\mathrm{v})}{\mathrm{v}} = p\,(\mathrm{v})$ geschrieben wird,

$$\overset{k+2}{\xi}(\tau) = -\overset{k}{p}\,\dot{\xi} - \binom{k}{1}\overset{k-1}{p}\,\ddot{\xi} - \cdots - \binom{k}{k-1}\,\dot{p}\,\overset{k}{\xi} - p\,\overset{k+1}{\xi}\,,$$
$$\overset{k+2}{\zeta}(\tau) = -\overset{k}{p}\,\dot{\zeta} - \binom{k}{1}\overset{k-1}{p}\,\ddot{\zeta} - \cdots - \binom{k}{k-1}\,\dot{p}\,\overset{k}{\zeta} - p\,\overset{k+1}{\zeta}\,.$$

Es wird für $k > 0$ behauptet, daß die $(k+2)$-ten Ableitungen von ξ, ζ, genommen an der Stelle $\tau = 0$, also die Größen $\overset{k+2}{\xi}_0$, $\overset{k+2}{\zeta}_0$, ganze Funktionen von γ höchstens der Ordnung k sind. Für $k = 0$ gilt der Satz nicht mehr, vielmehr ist nach (2)

$$\ddot{\xi}_0 = -p_0\,\dot{\xi}_0\,, \qquad \ddot{\zeta}_0 = -p_0\,\dot{\zeta}_0 - \gamma\,.$$

Wir setzen den zu beweisenden Satz bis zu $\overset{n}{\xi}_0$, $\overset{n}{\zeta}_0$ voraus und beweisen ihn durch Schluß von n auf $n+1$ $(n>2)$. Nun ist $\mathrm{v}^2=\dot\xi^2+\dot\zeta^2$; die Formeln

$$\dot{\mathrm{v}}=\mathrm{v}^{-1}(\dot\xi\ddot\xi+\dot\zeta\ddot\zeta)\,,$$
$$\ddot{\mathrm{v}}=\mathrm{v}^{-1}(\dot\xi\dddot\xi+\dot\zeta\dddot\zeta+\ddot\xi^2+\ddot\zeta^2)-\mathrm{v}^{-3}(\dot\xi\ddot\xi+\dot\zeta\ddot\zeta)^2\quad\text{usw.}$$

lassen erkennen, daß $\overset{h}{\mathrm{v}}$ eine ganze Funktion von $\ddot\xi$, $\ddot\zeta$, ..., $\overset{h+1}{\xi}$, $\overset{h+1}{\zeta}$ ist, und zwar vom Grade h (gültig für $h\geqq 0$). Bei jedem in $\overset{h}{\mathrm{v}}_0$ vorkommenden Monom $(\ddot\xi_0)^{a_2}\cdot(\ddot\zeta_0)^{b_2}\cdot(\dddot\xi_0)^{a_3}\cdot(\dddot\zeta_0)^{b_3}\ldots$ ist stets $a_2+b_2+2\,a_3+2\,b_3+\cdots=h$, daher ist das Monom in γ ganz von der Ordnung

$$b_2+a_3+b_3+2\,a_4+2\,b_4\leqq h\,.$$

Das gilt dann auch für $\overset{h}{\mathrm{v}}_0$, falls $h\leqq k$ ist. Ferner ergeben die Formeln, wenn Ableitungen nach v mit Strichen bezeichnet werden,

$$\dot p=p'\,\dot{\mathrm{v}}\,,$$
$$\ddot p=p''\dot{\mathrm{v}}^2+p'\,\ddot{\mathrm{v}}\quad\text{usw.}\,,$$

daß $\overset{h}{p}$ eine ganze Funktion von $\dot{\mathrm{v}}$, $\ddot{\mathrm{v}}$, ..., $\overset{h}{\mathrm{v}}$ ist, die in jedem Summanden h Differentiationen nach τ enthält. Also ist auch $\overset{h}{p}$ eine ganze Funktion von γ höchstens der Ordnung h, für $h\leqq k$. Demnach werden $\overset{k+2}{\xi}_0$, $\overset{k+2}{\zeta}_0$ ganze Funktionen höchstens der Ordnung k in γ. Für $k=1$ aber ist der Satz sicher richtig, denn

$$\dddot\xi_0=-p_0\ddot\xi_0-\dot p_0\dot\xi_0\,,\qquad \dddot\zeta_0=-p_0\ddot\zeta_0-\dot p_0\dot\zeta_0$$

sind linear in γ. Also ist der Satz allgemein richtig.

Entwickeln wir also

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{z}\operatorname{tg}\omega_0=\xi\sec\omega_0\,,\qquad \mathfrak{z}\sec\omega_0=\xi\operatorname{tg}\omega_0-\zeta$$

nach Potenzen von τ, so werden die Koeffizienten von τ^{k+2} ganze Funktionen von $\gamma\cos\omega_0$, $\gamma\sin\omega_0$ von der Ordnung k, für $k>0$. Die Koeffizienten von τ sind $\dot\xi_0\sec\omega_0=1$, $\dot\xi_0\operatorname{tg}\omega_0-\dot\zeta_0=0$; die von $\frac{1}{2}\tau^2$ sind $\ddot\xi_0\sec\omega_0=-1$, $\ddot\xi_0\operatorname{tg}\omega_0-\ddot\zeta_0=\gamma_0$.

Nehmen wir jetzt erstens an, daß γ so klein ist, daß wir uns auf die Glieder niedrigster Ordnung beschränken können, so fallen die Größen $\gamma\sin\omega_0$, $\gamma\cos\omega_0$ fort und wir erhalten

$$\xi\sec\omega_0=\Phi(\tau)\,,\qquad \xi\operatorname{tg}\omega_0-\zeta=\gamma\,\Psi(\tau)\,,$$

oder, wenn wir zu den nichtnormierten Größen x, z, t zurückkehren:

$$x\sec\omega_0=\frac{v_0^2}{w_0}\,\Phi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\right),\qquad x\operatorname{tg}\omega_0-z=\frac{v_0^2\,g}{w_0^2}\,\Psi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\right). \tag{5}$$

Nehmen wir zweitens an, daß γ groß ist, so wollen wir die in (4) benutzten Veränderlichen Ξ, Z, Θ anwenden. Nun ist

$$\gamma\,\xi = \Xi\,, \quad \dot{\xi}(\tau) = \dot{\Xi}(\Theta)\,, \quad \ddot{\xi}(\tau) = \gamma\,\ddot{\Xi}(\Theta)\,, \;\cdots,\; \overset{k}{\xi}(\tau) = \gamma^{k-1}\,\overset{k}{\Xi}(\Theta)\,,$$

$$\gamma\,\zeta = Z\,, \quad \dot{\zeta}(\tau) = \dot{Z}(\Theta)\,, \quad \ddot{\zeta}(\tau) = \gamma\,\ddot{Z}(\Theta)\,, \;\cdots,\; \overset{k}{\zeta}(\tau) = \gamma^{k-1}\,\overset{k}{Z}(\Theta)\,.$$

In den Entwicklungen von $\Xi \sec \omega_0$ und $\Xi \operatorname{tg} \omega_0 - Z$ nach Potenzen von Θ werden jetzt die Koeffizienten von $\gamma^{k+1}\,\Theta^{k+2}$ ganze Funktionen von γ der Ordnung k. Setzt man also für große γ näherungsweise $1/\gamma = 0$, so fallen die Glieder von Θ^2 an bzw. von Θ^3 an fort und es bleiben als Näherungen übrig

$$\Xi \sec \omega_0 = \Theta\,, \qquad \Xi \operatorname{tg} \omega_0 - Z = \tfrac{1}{2}\,\Theta^2\,,$$

oder, wenn man zu den nichtnormierten Größen zurückkehrt,

$$x \sec \omega_0 = v_0\, t\,, \qquad x \operatorname{tg} \omega_0 - z = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2\,. \tag{6}$$

Während also für kleine g/w_0 die Geschoßbahn durch die Bahn (5) angenähert wird, erhält man für kleine w_0/g nur die Parabel (6) als Annäherung, wenn man die Glieder so weit vernachlässigt, daß die rechten Seiten von ω_0 nicht mehr abhängen. Die Gleichungen (6) sind aber als Sonderfall in (5) mit enthalten. *Bahnen dieser Art, in denen $x \sec \omega_0$ und $x \operatorname{tg} \omega_0 - z$ unabhängig von der Anfangserhöhung ω_0 sind und die sich als Funktionen der Zeit allein darstellen lassen, sollen „Grenzbahnen" heißen**).

§ 18. Grenzbahnen

Die im § 17 eingeführten Grenzbahnen lassen nach Gleichung (5) die Darstellung zu:

$$x = X(t) \cos \omega_0\,, \qquad z = X(t) \sin \omega_0 - Z(t)\,, \tag{7}$$

worin X und Z Funktionen von t sind, die aber ω_0 nicht enthalten. Für Bahnen dieser Art kann man weitere allgemeine Eigenschaften aufstellen. Wir betrachten wieder wie in § 16 die Schar dieser Flugbahnen, wenn ω_0 von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ wächst. Die Anfangsgeschwindigkeit werde festgehalten, den Ort der Simultanpunkte ($t = \text{const}$) erhält man durch Elimination von ω_0:

$$x^2 + (z + Z)^2 = X^2\,,$$

das ist ein Kreis mit dem Radius $X(t)$, dem Mittelpunkt $x = 0$, $z = -Z(t)$, (Abb. 19). Schießt man mit Zeitzündern, so ist dies der Ort der Sprengpunkte für Geschosse mit gleich „tempierten" Zündern. Spreng-

*) Es ist ein ziemlich weit verbreiteter Irrtum, zu glauben, daß die Geschoßbahn stets so darstellbar sei; vgl. z. B. Witting, Soldaten-Mathematik (Leipzig 1916), S. 21; Kritzinger, Schuß und Schall (Leipzig 1918), S. 15; Riebesell, Mathematik im Kriege (Leipzig 1916), S. 23.

punkte im Geschützniveau werden also durch Vergrößern von ω_0 nicht senkrecht zur Erdoberfläche gehoben, wie meistens angenommen wird, sondern senkrecht zur Anfangstangente.

Die Gleichung einer Bahn ist $z = x \operatorname{tg} \omega_0 - Z(t)$, wo $Z(t)$ durch Elimination von t vermittels der ersten Gleichung (7) eine Funktion von $x \sec \omega_0$ wird:

$$z = x \operatorname{tg} \omega_0 - Z_1(x \sec \omega_0)\,.$$

Für die Hüllkurve ergibt sich also durch Differentiation nach ω_0:

$$x \sec^2 \omega_0 - \frac{\dot Z}{\dot X}\, x \sin \omega_0 \sec^2 \omega_0 = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad \dot X - \dot Z \sin \omega_0 = 0\,.$$

In dem Punkt, in dem die Geschoßbahn die Hüllkurve berührt, wird also $OQ = X - Z \sin \omega$ ein Maximum. OQ ist die Projektion von OP auf die Anfangstangente (Abb. 19), es wird offenbar dann am größten, wenn QP Tangente der Bahn in P wird. Da dann andererseits OP die größte Schußweite in der Richtung OP ist (siehe § 16), so ergibt sich der Satz: Für die größte Schußweite sind Steig- und Fallwinkel (absolut genommen) komplementär, $\omega_0 + |\omega^0| = \pi/2$; und zwar gilt das auf horizontalem und auf geneigtem Boden. Insbesondere folgt also: Die Anfangserhöhung für die größte horizontale Schußweite ist kleiner als 45^0.

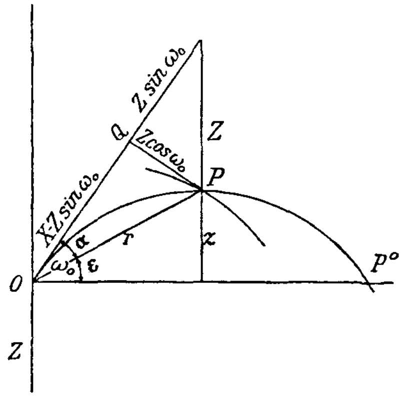

Abb. 19

Wir bezeichnen wieder den Geländewinkel mit ε, der „Visierwinkel" QOP sei α, so daß $\alpha + \varepsilon = \omega_0$ ist. Beim Schießen gegen Luftziele ist die Frage, ob bei gleichbleibender Entfernung r des Zieles der Visierwinkel mit dem Geländewinkel wächst oder abnimmt. Zur Beantwortung muß man die Ableitung von α nach ε berechnen. Nun ist $r \cos \varepsilon = x$, $r \sin \varepsilon = z$, also folgt aus (7)

$$X \cos(\alpha + \varepsilon) = r \cos \varepsilon\,, \qquad X \sin(\alpha + \varepsilon) - Z = r \sin \varepsilon\,. \tag{8}$$

Eliminiert man hieraus $X(t)$, so ergibt sich

$$r \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) \cos \varepsilon - r \sin \varepsilon = Z(t)\,,$$

oder

$$r \sin \alpha = Z \cos(\alpha + \varepsilon)\,,$$

wo jetzt Z als Funktion von α und ε aufzufassen ist. Durch Differentiation der letzten Gleichung nach α erhält man zunächst

$$r \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = - Z \sin(\alpha + \varepsilon)\left(\frac{d\alpha}{d\varepsilon} + 1\right) + \frac{dZ}{d\varepsilon} \cos(\alpha + \varepsilon)\,,$$

wo unter Benutzung der ersten Gleichung (8)

$$\frac{dZ}{d\varepsilon} = \frac{\dot{Z}}{\dot{X}} \frac{dX}{d\varepsilon} = \frac{\dot{Z}}{\dot{X}} r \sec(\alpha + \varepsilon)\left[-\sin\varepsilon + \cos\varepsilon \operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon)\left(\frac{d\alpha}{d\varepsilon} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{\dot{Z}}{\dot{X}} \sec(\alpha+\varepsilon)\left[Z + X\sin(\alpha+\varepsilon)\frac{d\alpha}{d\varepsilon}\right],$$

oder, wenn noch wegen (7)

$$\dot{X}\sin(\alpha+\varepsilon) - \dot{Z} = \dot{z}$$

gesetzt wird,

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon}(\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0) = -\frac{Z}{X}\dot{z}\,. \tag{9}$$

Für die Beurteilung des Verhaltens des Visierwinkels α kommt es demnach auf die Vorzeichen von $\dot{z}$ und von $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0$ an. Für den Gipfel einer Bahn ist $\dot{z} = 0$, also folgt zunächst: Bei wachsendem Geländewinkel ε wird die Grenze zwischen dem Gebiet mit wachsendem und dem mit abnehmendem Visierwinkel α durch die Kurve der Bahngipfel gebildet.

Weiter wächst auf dem Hauptbogen der Bahn (zwischen Abschuß und Hüllkurve) die Größe OQ, also ist dort $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0 > 0$; auf dem anschließenden Endbogen nimmt OQ ab, also ist dort $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0 < 0$. Allgemein folgt: Der Visierwinkel α wächst mit dem Geländewinkel ε, wenn $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0$ und $\dot{z}$ verschiedenes Vorzeichen haben, d. h. auf dem absteigenden Teil eines Hauptbogens (zwischen Gipfel und Berührung mit der Hüllkurve). Der andere Fall $\dot{z} > 0$ (aufsteigender Ast) und $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0 < 0$ (Endbogen) ist nicht realisierbar. Der Visierwinkel α nimmt ab mit wachsendem Geländewinkel ε, wenn $\dot{X} - \dot{Z}\sin\omega_0$ und $\dot{z}$ gleiches Vorzeichen haben, d. h. auf dem aufsteigenden Teil des Hauptbogens oder dem absteigenden Teil eines Endbogens.

Schneidet der Kreis mit dem Radius r (Ort der Punkte gleichen Abstandes von O) die Gipfelkurve einmal, so wird der Visierwinkel α auf ihm erst wachsen, dann nur noch abnehmen; schneidet er zweimal, so wird α vom zweiten Schnitt ab wieder wachsen; schneidet er keinmal, so wird α auf ihm nur wachsen. Diese Sätze gelten, wenn das Ziel im Hauptbogen liegt, also bei Flachschuß. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung bestätigt folgender Auszug aus einer Schußtafel für den Visierwinkel in ganzen Graden und Sechzehnteln.

r	$\varepsilon = 0^0$	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0
7000	$\alpha = 14$	14^8	14^8	14^7	14^5	14^2	13^{11}	13^4
7600	16	16^{12}	16^{14}	17^2	17^2	17^2	16^{10}	16^{11}
7800	16^{11}	17^9	17^{13}	18^2	18^2	18^3	18^1	18^9
8000	17^7	18^6	18^{14}	19^2	19^2	19^7	20^2	

§ 19. Potenzreihen

Benutzen wir die in § 17 eingeführten normierten Größen ξ, ζ, τ, so lauten die Differentialgleichungen, wenn in (2) wieder $\frac{\tilde{\omega}(\mathrm{v})}{\mathrm{v}} = p(\mathrm{v})$ gesetzt wird,

$$\ddot{\xi}(\tau) = -p(\mathrm{v})\,\dot{\xi}\,, \qquad \ddot{\zeta}(\tau) = -p(\mathrm{v})\,\dot{\zeta} - \gamma\,. \tag{10}$$

Integrieren wir durch Reihen nach Potenzen von τ, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \xi \sec\omega_0 &= a_1\tau + \tfrac{1}{2}a_2\tau^2 + \tfrac{1}{6}a_3\tau^3 + \tfrac{1}{24}a_4\tau^4 + \cdots\,,\\ \xi\,\mathrm{tg}\,\omega_0 - \zeta &= b_1\tau + \tfrac{1}{2}b_2\tau^2 + \tfrac{1}{6}b_3\tau^3 + \tfrac{1}{24}b_4\tau^4 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Fassen wir in (10) v als Funktion von τ auf, so wird

$$\dddot{\xi} = -\dot{p}\,\dot{\xi} - p\,\ddot{\xi}\,,$$
$$\ddddot{\xi} = -\ddot{p}\,\dot{\xi} - 2\dot{p}\,\ddot{\xi} - p\,\dddot{\xi} \quad \text{usw.}$$

und entsprechende Gleichungen für ζ. Werden Differentiationen nach v mit Strichen bezeichnet, so wird

$$\dot{p} = p'\,\dot{\mathrm{v}}\,, \qquad \ddot{p} = p'\,\ddot{\mathrm{v}} + p''\,\dot{\mathrm{v}}^2 \quad \text{usw.}$$

Aus $\mathrm{v}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2$ folgt

$$\mathrm{v}\,\dot{\mathrm{v}} = \dot{\xi}\,\ddot{\xi} + \dot{\zeta}\,\ddot{\zeta} = -p\,\mathrm{v}^2 - \gamma\,\dot{\zeta}\,,$$
$$\mathrm{v}\,\ddot{\mathrm{v}} = -\dot{\mathrm{v}}^2 - \dot{p}\,\mathrm{v}^2 - 2p\,\mathrm{v}\,\dot{\mathrm{v}} - \gamma\,\ddot{\zeta} \quad \text{usw.}$$

Die Anfangsbedingungen sind nach § 17

$$\dot{\xi}_0 = \cos\omega_0\,, \qquad \dot{\zeta}_0 = \sin\omega_0\,, \qquad p_0 = 1\,, \qquad \mathrm{v}_0 = 1\,,$$

also

$$\dot{\mathrm{v}}_0 = -(1 + \gamma\sin\omega_0)\,,$$
$$\dot{p}_0 = -p_0'(1 + \gamma\sin\omega_0)\,,$$
$$\ddot{\mathrm{v}}_0 = (1 + p_0')(1 + \gamma\sin\omega_0) + \gamma^2\cos^2\omega_0\,,$$
$$\ddot{p}_0 = p_0'' + p_0' + p_0'^2 + (2p_0'' + p_0' + p_0'^2)\,\gamma\sin\omega_0 + p_0''\,\gamma^2\sin^2\omega_0 + p_0'\,\gamma^2\cos^2\omega_0\,.$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten in (11) zu

$$a_1 = 1\,, \qquad a_2 = -1\,, \qquad a_3 = 1 + p_0' + p_0'\,\gamma\sin\omega_0\,,$$
$$a_4 = -(1 + 4p_0' + p_0'^2 + p_0'') - (4p_0' + p_0'^2 + 2p_0'')\,\gamma\sin\omega_0 - p_0''\,\gamma^2\sin^2\omega_0 - p_0'\,\gamma^2\cos^2\omega_0\,,$$
$$b_1 = 0\,, \qquad b_2 = \gamma\,, \qquad b_3 = -\gamma\,,$$
$$b_4 = \gamma(1 + 2p_0' + 2p_0'\,\gamma\sin\omega_0) \quad \text{usw.}$$

Ersetzen wir jetzt wieder p durch $\tilde{\omega}$, so wird

$$p_0' = \tilde{\omega}_0' - 1\,, \qquad p_0'' = \tilde{\omega}_0'' - 2\tilde{\omega}_0' + 2$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = 1\,, \quad a_2 = -1\,, \quad a_3 = \tilde{\omega}_0' - (1-\tilde{\omega}_0')\,\gamma\sin\omega_0\,,\\
&a_4 = -(\tilde{\omega}_0'^{\,2} + \tilde{\omega}_0'') - [(1-\tilde{\omega}_0')^2 + 2\,\tilde{\omega}_0'']\,\gamma\sin\omega_0\\
&\qquad -(2 - 2\,\tilde{\omega}_0' + \tilde{\omega}_0'')\,\gamma^2\sin^2\omega_0 + (1-\tilde{\omega}_0')\,\gamma^2\cos^2\omega_0\,,\\
&b_1 = 0\,, \quad b_2 = \gamma\,, \quad b_3 = -\gamma\,,\\
&b_4 = \gamma\,[(2\,\tilde{\omega}_0' - 1) - (2 - 2\,\tilde{\omega}_0')\,\gamma\sin\omega_0]\,.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

In den Koeffizienten a_ν, $\frac{1}{\gamma} b_\nu$ kommen nur die Größen $\gamma\cos\omega_0$, $\gamma\sin\omega_0$, $\tilde{\omega}_0'$, $\tilde{\omega}_0''$, $\tilde{\omega}_0'''$, ... vor. Die Potenzreihen sind also aufstellbar, wenn $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$, ... bekannt sind. Man kann sie aus der Widerstandstabelle berechnen (vgl. § 23). Die Differentialgleichungen (10) sind als solche erster Ordnung in $\dot{\xi}$ und $\dot{\zeta}$ anzusehen, also nach dem Cauchyschen Existenzsatze durch Potenzreihen integrierbar, konvergent in einem Gebiet, in welchem p (v) eine konvergente Potenzreihe von v bzw. $\dot{\xi}$ und $\dot{\zeta}$ ist. Die Reihenentwicklung für p (v) an der Stelle $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 = 1$ ergibt:

$$p(\mathrm{v}) = 1 + p_0'(\mathrm{v}-1) + \tfrac{1}{2}\,p_0''(\mathrm{v}-1)^2 + \tfrac{1}{6}\,p_0'''(\mathrm{v}-1)^3 + \cdots\,.$$

Aber p (v) ist nur durch eine Tabelle, etwa für die äquidistanten Werte $v = \mathrm{v}\,v_0 = 1, 2, \ldots, 1200$ m/sec gegeben, also ist p (v) durch eine ganze rationale Funktion von v vom Grade $\mathsf{N} \leqq 1200$ genau ausdrückbar. Also sind die Reihen (11) konvergent.

Durch Umkehrung der Reihe (11) für $\xi\sec\omega_0$ erhält man

$$\tau = c_1\,\xi\sec\omega_0 + \tfrac{1}{2}\,c_2\,\xi^2\sec^2\omega_0 + \tfrac{1}{6}\,c_3\,\xi^3\sec^3\omega_0 + \cdots\,, \qquad (13)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 = 1\,,\\
&c_2 = 1\,,\\
&c_3 = 3 - \tilde{\omega}_0' + (1-\tilde{\omega}_0')\,\gamma\sin\omega_0\,,\\
&c_4 = (15 - 10\,\tilde{\omega}_0' + \tilde{\omega}_0'^{\,2} + \tilde{\omega}_0'') + (11 - 12\,\tilde{\omega}_0' + \tilde{\omega}_0'^{\,2} + 2\,\tilde{\omega}_0'')\,\gamma\sin\omega_0\\
&\quad + (2 - 2\,\tilde{\omega}_0' + \tilde{\omega}_0'')\,\gamma^2\sin^2\omega_0 - (1-\tilde{\omega}_0')\,\gamma^2\cos^2\omega_0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Für die Bahn erhält man die Gleichung, indem man in der zweiten Reihe (11) τ durch (13) ersetzt. Das gibt

$$\xi\,\mathrm{tg}\,\omega_0 - \zeta = e_1\,\xi\sec\omega_0 + \tfrac{1}{2}\,e_2\,\xi^2\sec^2\omega_0 + \tfrac{1}{6}\,e_3\,\xi^3\sec^3\omega_0 + \cdots\,, \qquad (15)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
&e_1 = 0\,,\\
&e_2 = \gamma\,,\\
&e_3 = 2\,\gamma\,,\\
&e_4 = 2\,\gamma\,[4 - \tilde{\omega}_0' + (1-\tilde{\omega}_0')\,\gamma\sin\omega_0]\,.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Differenziert man die erste Reihe (11) nach τ, so erhält man für die Horizontalgeschwindigkeit

$$\dot{\xi}\sec\omega_0 = a_1 + a_2\,\tau + \tfrac{1}{2}\,a_3\,\tau^2 + \tfrac{1}{6}\,a_4\,\tau^3 + \cdots\,,$$

oder, wenn τ durch $\xi \sec \omega_0$ nach (13) ersetzt wird,

$$\dot{\xi} \sec \omega_0 = h_0 + h_1 \xi \sec \omega_0 + \tfrac{1}{2} h_2 \xi^2 \sec^2 \omega_0 + \tfrac{1}{6} h_3 \xi^3 \sec^3 \omega_0 + \cdots, \qquad (17)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= -1, \\ h_2 &= -(1-\tilde{\omega}_0')(1+\gamma \sin \omega_0), \\ h_3 &= -3 + 4\tilde{\omega}_0' - \tilde{\omega}_0'^2 - \tilde{\omega}_0'' + (3 - 2\tilde{\omega}_0' - \tilde{\omega}_0'^2 - 2\tilde{\omega}_0'')\gamma \sin \omega_0 \\ &\quad - (2 - 2\tilde{\omega}_0' + \tilde{\omega}_0'')\gamma^2 \sin^2 \omega_0 + (1-\tilde{\omega}_0')\gamma^2 \cos^2 \omega_0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Um die Schußweite ξ^0 zu erhalten, kann man so vorgehen: Setzt man in (15) $\zeta^0 = 0$ und dividiert durch $\xi^0 \sec \omega_0$, so entsteht die neue Reihe

$$\sin \omega_0 = \tfrac{1}{2} e_2 \xi^0 \sec \omega_0 + \tfrac{1}{6} e_3 \xi^{0^2} \sec^2 \omega_0 + \cdots.$$

Durch Reihenumkehrung wird daraus

$$\xi^0 \sec \omega_0 = k_1 \sin \omega_0 + \tfrac{1}{2} k_2 \sin^2 \omega_0 + \tfrac{1}{6} k_3 \sin^3 \omega_0 + \cdots, \qquad (19)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{2}{\gamma}, \\ k_2 &= -\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\gamma^2}, \\ k_3 &= \left\{\frac{32}{3} - [4 - \tilde{\omega}_0' + (1-\tilde{\omega}_0')\gamma \sin \omega_0]\right\} \frac{1}{\gamma^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Da, wie wir sahen, zonenweise das Bernoullische Gesetz $w(v) = a v^n$ gilt, also $p(\mathrm{v}) = \mathrm{v}^{n-1}$ gesetzt werden kann, so ist zonenweise

$$p'(\mathrm{v}) = (n-1)\mathrm{v}^{n-2}, \quad p''(\mathrm{v}) = (n-1)(n-2)\mathrm{v}^{n-3}, \quad \ldots$$

und man sieht, daß die Reihen jedenfalls bei großem γ nur langsam konvergieren werden, also zur Berechnung wenig brauchbar sind. Beschränken wir also ihre Anwendung auf die am Schluß von § 17 eingeführten Grenzbahnen mit kleinem γ.

Kehren wir jetzt wieder zu den ursprünglichen Veränderlichen x, z, t zurück, so soll $\dfrac{v\,w'(v)}{w(v)} = n_1(v)$, $\dfrac{v^2 w''(v)}{w(v)} = n_2(v)$, ... geschrieben werden. Dann läßt sich zeigen, daß die Widerstandsfunktion in die Reihenentwicklung nur durch Vermittlung dieser Größen eingeht. Die Koeffizienten (12) waren nämlich ganze Funktionen von $\tilde{\omega}_0'$, $\tilde{\omega}_0''$, ... und da $\tilde{\omega}'(\mathrm{v}) = v_0 w'(v)/w_0$, $\tilde{\omega}''(\mathrm{v}) = v_0^2 w''(v)/w_0$, ... ist, so ist $\tilde{\omega}_0' = n_1(v_0)$, $\tilde{\omega}_0'' = n_2(v_0)$, ..., also sind die a_ν, b_ν in (11) ganze Funktionen von $n_1 = n_1(v_0)$, $n_2 = n_2(v_0)$ usw. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
x \sec \omega_0 &= A_1\, t + \tfrac{1}{2} A_2\, t^2 + \tfrac{1}{6} A_3\, t^3 + \cdots ,\\
x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \tfrac{1}{2} B_2\, t^2 + \tfrac{1}{6} B_3\, t^3 + \cdots ,\\
t &= C_1 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right) + \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2 + \frac{1}{6} C_3 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^3 + \cdots ,\\
x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \frac{1}{2} E_2 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2 + \frac{1}{6} E_3 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^3 + \cdots ,\\
\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} &= H_0 + H_1 \frac{x}{\dot{x}_0} + \frac{1}{2} H_2 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2 + \frac{1}{6} H_3 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^3 + \cdots ,\\
\frac{g}{v_0^2 \sin 2\,\omega_0} \cdot x^0 &= K_1 + \frac{1}{2} K_2 \sin \omega_0 + \frac{1}{6} K_3 \sin^2 \omega_0 + \cdots ,
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = v_0\,, \qquad A_2 = -\,w_0\,,\\
&A_3 = \frac{w_0}{v_0}\,[w_0\, n_1 - (1 - n_1)\, g \sin \omega_0]\,,\\
&A_4 = -\,\frac{w_0}{v_0^2}\,\{w_0^2\,(n_1^2 + n_2) + [(1 - n_1)^2 + 2\,n_2]\, w_0\, g \sin \omega_0\\
&\qquad\qquad - (1 - n_1)\, g^2 + (3 - 3\,n_1 + n_2)\, g^2 \sin^2 \omega_0\}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_2 = g\,, \qquad B_3 = -\,\frac{w_0}{v_0}\, g\,,\\
&B_4 = -\,\frac{w_0}{v_0^2}\, g\,[w_0\,(1 - 2\,n_1) + 2\,(1 - n_1)\, g \sin \omega_0]\,.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = 1\,, \qquad C_2 = \frac{w_0}{v_0}\,,\\
&C_3 = \frac{w_0}{v_0^2}\,[w_0\,(3 - n_1) + (1 - n_1)\, g \sin \omega_0]\,,\\
&C_4 = \frac{w_0}{v_0^3}\,[w_0^2\,(15 - 10\,n_1 + n_1^2 + n_2) + (11 - 12\,n_1 + n_1^2 + 2\,n_2)\, w_0\, g \sin \omega_0\\
&\qquad\qquad + (3 - 3\,n_1 + n_2)\, g^2 \sin^2 \omega_0 - (1 - n_1)\, g^2]\,.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned}
&E_2 = g\,, \qquad E_3 = 2\,\frac{w_0}{v_0}\, g\,,\\
&E_4 = 2\,\frac{w_0}{v_0^2}\, g\,[w_0\,(4 - n_1) + (1 - n_1)\, g \sin \omega_0]\,.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned}
&H_0 = 1\,, \qquad H_1 = -\,\frac{w_0}{v_0}\,,\\
&H_2 = -\,\frac{w_0}{v_0^2}\,(1 - n_1)\,(w_0 + g \sin \omega_0)\,,\\
&H_3 = -\,\frac{w_0}{v_0^3}\,\{w_0^2\,(3 - 4\,n_1 + n_1^2 + n_2) - [4\,(1 - n_1) - (1 - n_1)^2\\
&\qquad - 2\,n_2]\, w_0\, g \sin \omega_0 - (1 - n_1)\, g^2 + (3 - 3\,n_1 + n_2)\, g^2 \sin^2 \omega_0\}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = 1\,, \qquad K_2 = -8\,\frac{w_0}{g}\,, \\ &K_3 = \frac{1}{2}\,\frac{w_0}{g^2}\left\{\frac{32}{3}\,w_0 - [w_0\,(4-n_1) + (1-n_1)\,g\sin\omega_0]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Bricht man in der Darstellung von z als Potenzreihe nach x [vierte Gleichung von (21)] nach dem Gliede dritter Ordnung ab und ersetzt den letzten Koeffizienten durch einen empirisch zu bestimmenden Mittelwert, so erhält man die sogenannte Formel von Gâvres:

$$z = x \operatorname{tg}\omega_0 - \frac{1}{2}\,\frac{g\,x^2}{\dot{x}_0^2}\,(1 + \varkappa\, v_0^2\, x)\,,$$

die bei der Berechnung der Schußtafeln Anwendung findet.

§ 20. Näherungsbahnen

Die in § 19 abgeleiteten Potenzreihen (11) lassen sich näherungsweise durch geschlossene Ausdrücke darstellen. Zu diesem Zwecke sollen die beiden Reihen (11) mit den Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{\mathsf{M}}{\nu}\left[\left(1+\frac{\tau}{\mathsf{M}}\right)^{\nu} - 1\right] = \alpha_1\tau + \frac{1}{2}\,\alpha_2\tau^2 + \frac{1}{6}\,\alpha_3\tau^3 + \cdots, \\ f_2(\tau) &= \frac{\mathsf{M}^2}{2-\nu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\tau}{\mathsf{M}}\right)^2 - 1\right] - \frac{1}{\nu}\left[\left(1+\frac{\tau}{\mathsf{M}}\right)^{\nu} - 1\right]\right\} \\ &= \beta_1\tau + \frac{1}{2}\,\beta_2\tau^2 + \frac{1}{6}\,\beta_3\tau^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

durch geeignete Wahl von M und ν möglichst weit in Übereinstimmung gebracht werden. Es ist

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{\mathsf{M}}(\nu-1),\ \alpha_3 = \frac{1}{\mathsf{M}^2}(\nu-1)(\nu-2),\ \alpha_4 = \frac{1}{\mathsf{M}^3}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3),\ \cdots,$$

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1, \qquad \beta_3 = \frac{1}{\mathsf{M}}(\nu-1)\,, \qquad \beta_4 = \frac{1}{\mathsf{M}^2}(\nu-1)(\nu-3),\ \cdots.$$

Es läßt sich erreichen, daß man

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = a_1\,, \qquad \alpha_2 = a_2\,, \qquad \alpha_3 = a_3\,, \\ &\gamma\beta_1 = b_1\,, \qquad \gamma\beta_2 = b_2\,, \qquad \gamma\beta_3 = b_3\,, \qquad \gamma\beta_4 = b_4 \end{aligned}$$

erhält, wenn nämlich

$$\frac{\nu-1}{\mathsf{M}} = -1\,, \qquad \frac{1}{\mathsf{M}} = \frac{1}{1-\nu} = (\tilde{\omega}_0' - 1)\,(1 + \gamma\sin\omega_0)$$

gewählt wird. Dann wird also die Bahn dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned} \xi\sec\omega_0 &= f_1(\tau)\,, \\ \xi\operatorname{tg}\omega_0 - \zeta &= \gamma f_2(\tau)\,, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

und zwar in $\xi \sec \omega_0$ einschließlich der Glieder dritter Ordnung in τ, in $\xi \operatorname{tg} \omega_0 - \zeta$ sogar bis zu den Gliedern vierter Ordnung. Die Gleichung für $\xi \sec \omega_0$ gibt differenziert:

$$\dot{\xi} \sec \omega_0 = \left(1 + \frac{\tau}{\mathsf{M}}\right)^{\nu - 1}, \qquad \ddot{\xi} \sec \omega_0 = -\left(1 + \frac{\tau}{\mathsf{M}}\right)^{\nu - 2},$$

also

$$\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\xi}_0} = \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_0}\right)^{\frac{\nu - 2}{\nu - 1}},$$

d. h. der Ansatz (29) ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß zwischen den Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit und der Verzögerung ein Bernoullisches Gesetz besteht.

Kehren wir zu nichtnormierten Größen zurück und setzen wir noch $\mathsf{M} = M \frac{w_0}{v_0}$, so gehen die Gleichungen (29) über in

$$\left.\begin{aligned} & x \sec \omega_0 = F_1(t), \qquad x \operatorname{tg} \omega_0 - z = g F_2(t), \\ & F_1(t) = \frac{M v_0}{\nu}\left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^{\nu} - 1\right], \\ & F_2(t) = \frac{M^2}{2 - \nu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^2 - 1\right] - \frac{1}{\nu}\left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^{\nu} - 1\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

M und ν sind aus

$$\frac{1}{M} \frac{v_0}{w_0} = \frac{1}{1 - \nu} = (n_1 - 1)\left(1 + \frac{g}{w_0} \sin \omega_0\right)$$

zu berechnen. Den Formeln (30) entspricht das Bernoullische Gesetz

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0} = \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{\nu - 2}{\nu - 1}}. \tag{31}$$

Kehrt man die erste Gleichung (30) um und ersetzt dann in der zweiten Gleichung (30) t durch x, so entstehen die Formeln

$$\left.\begin{aligned} & t = \frac{x}{\dot{x}_0} \cdot D(x), \qquad x \operatorname{tg} \omega_0 - z = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2 \cdot B(x), \\ & \frac{1}{2} y D = \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{\frac{m}{2}} - 1, \qquad \frac{m - 1}{2m} y^2 \cdot B = \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m - 1 - y. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Diese stellen also ebenfalls bis zu den Gliedern dritter Ordnung (jetzt in x) die Bahn dar. y und m sind zur Abkürzung gesetzt für

$$y = \frac{2}{M} \cdot \frac{x}{\dot{x}_0} = \frac{w_0}{v_0} \cdot \frac{x}{\dot{x}_0} \cdot (2 n_1 - 2)\left(1 + \frac{g}{w_0} \sin \omega_0\right), \quad m = \frac{2}{\nu}. \tag{33}$$

Näherungsformeln von demselben Aussehen wie (32) sind von Didion und anderen aufgestellt worden, sie werden in der Literatur als Didion-Bernoullische Formeln bezeichnet*). Nur bedeutet dort

$$y = \frac{w_0}{v_0} \cdot \frac{x}{\dot{x}_0} \cdot (2n - 2)(\alpha \cos \omega_0)^{n-1}, \qquad m = \frac{2n-2}{n-2}. \tag{34}$$

n ist der Exponent des zugrunde gelegten Bernoullischen Gesetzes, α ein geeignet zu wählender Mittelwert von $\sec \omega$. Die Hypothesen zur Festlegung von α sollen hier übergangen werden. Wir wollen vielmehr nur untersuchen, wie α zu wählen ist, damit die Didion-Bernoullischen Formeln eine möglichst gute Annäherung liefern. Setzt man voraus, daß im ganzen betrachteten Bahnbogen dasselbe n gilt, so ist $n_1(v_0) = \frac{v_0 w_0'}{w_0} = n$. Der Vergleich von (33) und (34) ergibt also, daß α aus der Gleichung

$$(\alpha \cos \omega_0)^{n-1} = 1 + \frac{g}{w_0} \sin \omega_0$$

zu bestimmen ist.

Da in (30) die Größen ν und $\nu - 2$ im Nenner vorkommen, müssen die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = 2$, außerdem $\nu = \infty$ besonders betrachtet werden. Für $\nu = 0$ nimmt der Exponent in (31) den Wert $\frac{\nu-2}{\nu-1} = 2$ an (quadratisches Luftwiderstandsgesetz), und die Gleichungen der Näherungsbahnen werden

$$\left.\begin{aligned} x \sec \omega_0 &= M v_0 \lg\left(1 + \frac{t}{M}\right), \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \frac{1}{2} M^2 g \left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^2 - 1\right] - \lg\left(1 + \frac{t}{M}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Der Fall $\nu = 2$ gibt $\ddot{x} = \text{const}$ und

$$\left.\begin{aligned} x \sec \omega_0 &= \frac{1}{2} M v_0 \left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^2 - 1\right], \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \frac{1}{2} M^2 g \left\{\left(1 + \frac{t}{M}\right)^2 \lg\left(1 + \frac{t}{M}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{t}{M}\right)^2 - 1\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Der Fall $\nu = \infty$ gibt den Exponenten in (31) zu $\frac{\nu-2}{\nu-1} = 1$. In diesem Fall ist auch $\frac{w}{w_0} = \frac{v}{v_0}$ (lineares Luftwiderstandsgesetz). Die Bahn-

---

*) Siehe z. B. Cranz, Ballistik I (1925), S. 162. Die Formeln (32) finden sich nicht bei Bernoulli. Dieser gab vielmehr die strenge Lösung für den Fall des Gesetzes $w(v) = a v^n$.

gleichungen werden, wenn man $-M \cdot (\nu - 1)$ für M einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} x \sec \omega_0 &= M\, v_0 \left(e^{-\frac{t}{M}} - 1\right), \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= M^2 g \left(e^{-\frac{t}{M}} - 1 + \frac{t}{M}\right). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ist schließlich auch der Luftwiderstand Null, so wird $M = \infty$ und

$$\left.\begin{aligned} x \sec \omega_0 &= v_0\, t, \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \tfrac{1}{2} g\, t^2. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Das ist nach § 14 die strenge Lösung.

§ 21. Andere Potenzreihen

Aus der Differentialgleichung § 13 (29) ergeben sich Entwicklungen nach Potenzen von $\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_0$ und von $\dot{x} - \dot{x}_0$, von denen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen die ersten Glieder hinschreiben.

Zunächst ergibt die Hauptgleichung

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = -\frac{\dot{x}_0\, \ddot{x}_0}{g} (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_0) + \cdots, \tag{39}$$

also auch

$$\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_0 = -\frac{g}{\dot{x}_0\, \ddot{x}_0} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \cdots. \tag{40}$$

Setzt man den aus (39) folgenden Wert für $\dot{x}$ in die Gleichungen § 13 (30) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} g\, t &= \dot{x}_0 \cdot (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega) + \frac{\dot{x}_0\, \ddot{x}_0}{2 g} (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)^2 + \cdots \\ g\, x &= \dot{x}_0^2 \cdot (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega) - \frac{\dot{x}_0^2\, \ddot{x}_0}{g} (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)^2 + \cdots \\ g\, (x \operatorname{tg} \omega_0 - z) &= \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)^2 + \frac{2 \dot{x}_0^2\, \ddot{x}_0}{3 g} (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega)^3 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Aus (40) und (41) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\ddot{x}_0} (\dot{x}_0 - \dot{x}) + \cdots \\ x &= -\frac{\dot{x}_0}{\ddot{x}_0} (\dot{x}_0 - \dot{x}) + \cdots \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= \frac{g}{2 \cdot \ddot{x}_0^2} \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x})^2 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Fünftes Kapitel

Praktische Lösungsmethoden

§ 22. Vorbemerkung

Im V. bis VIII. Kapitel werden Methoden zur Lösung des in § 10 formulierten ballistischen Problems entwickelt. Es geht also darum, den Bewegungsablauf, gekennzeichnet durch Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$, als Funktion der Zeit t darzustellen. Als Parameter gehen ein die Vektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{v}_0$, also Lage und Geschwindigkeit beim Beginn der Geschoßbewegung. Selbst wenn man annimmt, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit statthaft ist, daß $\mathfrak{r}_0 = 0$ ist, und wenn man weiter bedenkt, daß die Bahnen in Vertikalebenen liegen, so bleibt noch immer eine zweiparametrige Kurvenschar zu bestimmen übrig. Nicht immer interessiert die Bahn in ihrem ganzen Verlauf, vielmehr genügt es oft, etwa die Anfangserhöhung ω_0 bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 als Funktion der Schußweite x^0 zu bestimmen. Es wird daher nicht zweckmäßig sein, sich auf eine einzige Lösungsmethode festzulegen, sondern man wird eine ganze Anzahl verschiedenartiger Methoden bereitstellen müssen, die je nach der Art der Fragestellungen Verwendung finden.

Die theoretischen Gesichtspunkte für den Lösungsansatz sind in § 13 dargelegt worden. Im VI. bis VIII. Kapitel werden im Anschluß daran analytische Methoden entwickelt werden. Es bleiben aber noch Fragen der praktischen Durchführung offen. Die Widerstandsfunktion $w(v)$ ist in Gestalt einer Tafel (etwa für äquidistante Werte von v) gegeben. An verschiedenen Stellen der Theorie werden aber die Ableitungen $w'(v)$, $w''(v)$, ... gebraucht. Ist die Hauptgleichung gelöst, so sind Funktionen zu berechnen, die durch Quadraturen definiert sind [z. B. (17) und (22) in § 11]. Hier geht $w(v)$ in den Integranden ein. Es sollen daher die Methoden zur Differentiation und Integration tafelmäßig gegebener Funktionen zusammengestellt werden, soweit sie für die Ballistik wichtig sind (§ 23).

Das Kernproblem der theoretischen Entwicklungen ist die Lösung der Hauptgleichung. Wenn auch in den folgenden Kapiteln analytische Methoden entwickelt werden, die diese Auflösung leisten oder umgehen, so sind doch diese Methoden nicht immer bequem genug. Entsprechend den Lösungsansätzen des § 13 knüpfen die analytischen Methoden an die Grenzfälle $g/w = 0$ bzw. $w/g = 0$ an. Sobald aber g/w nahe bei 1 liegt, konvergieren die Entwicklungen nicht oder nicht schnell genug. Dann braucht man Methoden, die auch für $g/w \doteq 1$ praktisch verwendbar sind (§ 24).

Die Methoden, die an die Hauptgleichung anknüpfen, haben einen schwerwiegenden Nachteil. Wie in § 11 gezeigt wurde, entstand die Hauptgleichung durch Elimination der Zeit. Die Quadraturen enthalten daher nicht die Zeit t, sondern eine andere Größe, z. B. ω, $\operatorname{tg} \omega$, v, x als Veränderliche. Dadurch büßt die Lösung viel an Übersichtlichkeit ein. Es besteht daher das Bedürfnis nach weiteren Methoden, in denen an Stelle der Hauptgleichung die erste der Bewegungsgleichungen (1) in § 10 tritt. Ist diese Gleichung gelöst, kennt man also $\mathfrak{v}$ als Funktion von t, so bestimmt sich die Geschoßbahn durch Quadraturen. Der erste Schritt ist also auch hier die Bestimmung des Hodographen, aber der Geschwindigkeitsriß ist jetzt beziffert (tempiert), jedem seiner Punkte ist ein t-Wert zugeordnet. Methoden dieser Art werden im § 25 besprochen werden. Es wird also bewußt auf die Möglichkeit verzichtet, mit einer einzigen skalaren Differentialgleichung 1. Ordnung auszukommen, sondern man bleibt bei einer vektoriellen Differentialgleichung 1. Ordnung stehen, d. h. in dem hier vorliegenden Fall wird ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung gelöst.

Besonders anschaulich werden die Methoden des V. Kapitels, wenn man die Rechenoperationen durch geometrische Konstruktionen ersetzt. Dann schließen sich die beiden gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung wieder in eine einzige, jetzt aber vektorielle Differentialgleichung zusammen. Der Streit, ob den numerischen oder den graphischen Methoden der Vorzug gebührt, ist müßig. Denn jeder geometrischen Konstruktion entspricht eine numerische Operation, man kann also jedes graphische Verfahren in ein numerisches verwandeln. Ob numerisch oder graphisch zu rechnen ist, das hängt außer vom persönlichen Geschmack oder den Fähigkeiten der verfügbaren Hilfskräfte in erster Linie davon ab, von wieviel Veränderlichen die zu berechnende Tafel abhängt. Funktionen einer einzigen Veränderlichen kann man numerisch oder graphisch darstellen, bei großem Genauigkeitsanspruch wird man aber die numerische Tafel wählen müssen. Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen wird man im allgemeinen nicht in numerische Form bringen, denn die Bestimmung von Zwischenwerten wird dann sehr mühsam. Vor allem wächst der Umfang einer solchen Tabelle bald sehr stark an. Zur graphischen Darstellung einer Funktion von zwei und mehr Veränderlichen besitzen wir in der Nomographie*) ein sehr wirksames und verhältnismäßig leicht zu handhabendes Hilfsmittel. Alle praktischen Methoden sind also möglichst so anzulegen, daß die Hauptglieder, die in vielstelligen Tafeln niedergelegt werden müssen, nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen. Es muß erreicht werden, daß die dann verbleibenden Reste so klein sind, daß sie durch Nomogramme in ein, zwei oder mehr Veränderlichen erfaßt werden können.

Schließlich kann man die beiden Differentialgleichungen § 10 (1) in eine einzige von der 2. Ordnung zusammenfassen und die Geschoßbahn direkt, ohne Vermittlung des Hodographen bestimmen (§ 26).

---

*) Siehe z. B. H. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie. Berlin 1924.

Die Methoden des V. Kapitels haben alle ein Merkmal gemeinsam: Die Geschoßbahn wird, vom Anfangszustand aus, in mehreren Schritten erarbeitet. Die Geschoßbahn bzw. der Geschwindigkeitsriß wird also durch eine Anzahl aufeinanderfolgender Punkte approximiert. Dem stehen gewisse Methoden der folgenden Kapitel gegenüber, bei denen die Differentialgleichungen dadurch lösbar gemacht werden, daß man die Widerstandsfunktion in geeigneter Weise durch eine analytische Funktion approximiert. In diesem Fall kann also jeder Endzustand berechnet werden, ohne daß es nötig wäre, die Zwischenstufen jedesmal auszurechnen. Eulers Lösung der ballistischen Hauptaufgabe durch Quadraturen*) für die Newtonsche Annahme, daß der Luftwiderstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, wurde der Ausgangspunkt einer Reihe weiterer Lösungen durch Quadraturen für geeignete Luftwiderstandsgesetze. Dieser Abschnitt der Ballistik hat durch J. Drach, der alle solchen Gesetze ermittelte, seinen Abschluß gefunden. Von den Gesetzen, die eine Lösung durch Quadraturen ermöglichen, haben praktische Bedeutung nur das von Bernoulli, $w(v)$ proportional v^n und das allgemeinere von d'Alembert, w proportional $(v^n - a)$, in dem als Sonderfall das von Chapel, w proportional $(v - a)$ und als Grenzfall w proportional $\lg v - a$ enthalten ist. Aber die dabei auftretenden Quadraturen sind binomische Integrale, die von mehreren Veränderlichen abhängen und deshalb eine tafelmäßige Darstellung mit genügend engen Zwischenräumen, wie sie der Praktiker braucht, nicht zulassen. Man muß sich auch darüber klar sein, daß sich eine noch so kleine, aber systematische Verfälschung der Widerstandsfunktion in der Bahn stark bemerkbar machen kann, weil sich im Integrationsprozeß die Fehler unter Umständen aufsummieren.

§ 23. Funktionen des Luftwiderstandes

Hat man bei einer Geschoßbahn auf $n+1$ Zwischenscheiben in den Entfernungen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Höhen $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ gemessen, so läßt sich die Geschoßbahn $z(x)$ durch ein Polynom n-ten Grades in x approximieren. Diese Entwicklung leistet z. B. die Lagrangesche Interpolationsformel

$$z(x) = z_0\, q_0(x) + z_1\, q_1(x) + \cdots + z_n\, q_n(x) + R_n(x)\,. \tag{1}$$

Hierin sind

$$q_\nu(x) = \prod_\iota \frac{x - x_\iota}{x_\nu - x_\iota} \qquad (\iota = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad \text{aber} \quad \iota \neq \nu)$$

Polynome n-ten Grades. Das Restglied hat die Form

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_\iota (x - x_\iota)\, z^{(n+1)}(\bar{x}) \quad (\iota = 0, 1, 2, \ldots, n)\,,$$

*) Berichte der Berliner Akademie 1753, S. 34—38.

wo $\bar{x}$ ein (allerdings unbekannter) Wert zwischen dem größten und dem kleinsten der Werte x, x_0, x_1, ..., x_n ist. Die Differentiation von (1) ergibt

$$\left.\begin{aligned} z'(x) &= z_0 q_0'(x) + z_1 q_1'(x) + \cdots + z_n q_n'(x) + R_n'(x)\,, \\ z''(x) &= z_0 q_0''(x) + z_1 q_1''(x) + \cdots + z_n q_n''(x) + R_n''(x)\,, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo

$$q_\nu'(x) = q_\nu(x) \sum \frac{1}{x - x_\iota}\,,$$

$$q_\nu''(x) = q_\nu'(x) \sum \frac{1}{x - x_\iota} - q_\nu(x) \sum \frac{1}{(x - x_\iota)^2} \quad \text{usw.}$$

Vernachlässigt man die Restglieder R_n', R_n'', ..., so lassen sich also z', z'', ... durch die beobachteten Größen ausdrücken. Anderseits folgt wegen [vgl. § 16 (46), § 10 (9) (10)]

$$\dot{x} = -w \cos\omega\,, \qquad v\dot{\omega} = -g\cos\omega\,, \qquad \dot{v} = -g\sin\omega - w\,,$$

für die Ableitungen z', z'', ...

$$\left.\begin{aligned} z'(x) &= \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \operatorname{tg}\omega\,, \\ z''(x) &= \sec^2\omega \cdot \frac{\dot{\omega}}{\dot{x}} = -\frac{g}{\dot{x}^2}\,, \\ z'''(x) &= \frac{2g}{\dot{x}^3} \cdot \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\frac{2g}{\dot{x}^3} \cdot \frac{w}{v}\,, \\ z''''(x) &= -\frac{6g}{\dot{x}^4} \cdot \frac{w^2}{v^2}\left[1 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{v\,w'}{w}\right)\left(1 + \frac{g}{w}\sin\omega\right)\right] \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Vergleicht man (2) mit (3), so erhält man an der Stelle $x = x_0$, der Reihe nach, ω_0 aus z_0', dann $\dot{x}_0$ aus z_0'', dann v_0 aus $v_0 = \dot{x}_0 \sec\omega_0$, dann w_0 aus z_0''', $\dfrac{v_0 w_0'}{w_0} = n_1(v_0)$ aus z_0'''' usw. Die folgenden Glieder liefern w_0'', w_0''', $\cdots$ in der Form $n_2(v_0) = \dfrac{v_0^2 w_0''}{w_0}$, $n_3(v_0) = \dfrac{v_0^3 w_0'''}{w_0}$, $\cdots$. Kann man $w(v) = c \cdot f(v)$ setzen, wo $f(v)$ als bekannt vorausgesetzt wird, so genügt die Kenntnis von z_0', z_0'', z_0''', denn aus w_0 folgt der Geschoßfaktor c. Hierzu braucht man mindestens vier Zwischenscheiben. Macht man keine Voraussetzungen über $w(v)$, so liefern $n+1$ Geschoßbahnpunkte die Werte w_0, w_0', ..., $w_0^{(n-2)}$, also interpolatorisch:

$$w(v) = w_0 + \frac{1}{1!} w_0' \cdot (v - v_0) + \frac{1}{2!} w_0'' \cdot (v - v_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(n-2)!} w_0^{(n-2)} \cdot (v - v_0)^{n-2}\,.$$

Will man umgekehrt zu einer vorhandenen Widerstandstabelle $w(v)$ die Ableitungen $w'(v)$, $w''(v)$, ... berechnen, so kann man $w(v)$ durch eine Lagrangesche Interpolationsformel darstellen:

$$w(v) = w_0\, q_0(v) + w_1\, q_1(v) + \cdots + w_n\, q_n(v) + R_n(v)\,, \tag{4}$$

wo $q_\nu(v)$ die in (1) benutzten Polynome, aber mit v statt x als Veränderliche, sind. Differentiation von (4) ergibt dann Formeln für $w', w'', \ldots$, die aus (2) hervorgehen, wenn man dort z durch w und x durch v ersetzt. Das Rechnen mit der Lagrangeschen Formel ist recht mühsam. Da die Tafelargumente fast immer äquidistant aufeinanderfolgen, ist es zweckmäßiger, vom Differenzenschema der Tafel auszugehen:

$$\begin{array}{cccccc}
v_0 & w_0 & & & & \\
 & & \Delta_1 w_{0.5} & & & \\
v_1 & w_1 & & \Delta_2 w_1 & & \\
 & & \Delta_1 w_{1.5} & & \Delta_3 w_{1.5} & \\
v_2 & w_2 & & \Delta_2 w_2 & & \cdot\ \cdot \\
 & & \Delta_1 w_{2.5} & & \Delta_3 w_{2.5} & \\
v_3 & w_3 & & \Delta_2 w_3 & & \cdot\ \cdot \\
 & & \Delta_1 w_{3.5} & & \Delta_3 w_{3.5} & \\
\cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\
 & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \\
\cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Hier bedeuten

$$\Delta_1 w_{\nu+0.5} = w_{\nu+1} - w_\nu\,, \qquad \Delta_2 w_{\nu+1} = \Delta_1 w_{\nu+1.5} - \Delta_1 w_{\nu+0.5}\,, \qquad \cdots$$

die ersten, zweiten und höheren Tafeldifferenzen. $v_{\nu+1} - v_\nu = \Delta v$ ist das Tafelintervall. Arithmetische Mittel zweier in derselben Spalte folgenden Differenzen werden als Zwischenwerte bezeichnet, also

$$\Delta_1 w_\nu = \tfrac{1}{2}(\Delta_1 w_{\nu-0.5} + \Delta_1 w_{\nu+0.5}),\quad \Delta_2 w_{\nu+0.5} = \tfrac{1}{2}(\Delta_2 w_\nu + \Delta_2 w_{\nu+1}),\ \cdots.$$

Dann kann man $w(v)$ durch eine der folgenden Interpolationsformeln darstellen, die durch Spezialisierung der Lagrangeschen Formel entstehen,

$$w(v_\nu \pm k\,\Delta v) = w_\nu \pm N_1\,\Delta_1 w_{\nu\pm 0.5} + N_2\,\Delta_2 w_{\nu\pm 1} \pm \cdots, \tag{N}$$

$$w(v_\nu \pm k\,\Delta v) = w_\nu \pm S_1\,\Delta_1 w_\nu + S_2\,\Delta_2 w_\nu \pm \cdots, \tag{S}$$

$$w(v_\nu \pm k\,\Delta v) = w_\nu \pm B_1\,\Delta_1 w_{\nu\pm 0.5} + B_2\,\Delta_2 w_{\nu\pm 0.5} \pm \cdots. \tag{B}$$

Man nennt (N) die Newtonschen, (S) die Stirlingschen, (B) die Besselschen Formeln. Um die Koeffizienten N_ν, S_ν, B_ν möglichst klein zu erhalten, ist v_ν so zu wählen, daß $|k| < 1$ wird. Am Anfang bzw. am Ende einer Tafel muß die eine der beiden Formeln (N) verwendet werden, im Innern einer Tafel sind (S) und (B) genauer. Die ersten Koeffizienten sind

$$N_1 = S_1 = B_1 = k\,,$$

$$N_2 = B_2 = \frac{1}{2!}\,k\,(k-1)\,, \qquad S_2 = \frac{1}{2!}\,k^2\,,$$

$$N_3 = \frac{1}{3!}\,k\,(k-1)\,(k-2)\,, \qquad S_3 = \frac{1}{3!}\,(k+1)\,k\,(k-1)\,,$$

$$B_3 = \frac{1}{3!}\,k\,(k-1)\left(k - \frac{1}{2}\right) \text{ usw.}$$

Differentiation der Newtonschen Formel gibt für die Argumente der Tafel

$$\left.\begin{aligned} w'(v_\nu) &= \frac{1}{\Delta v}\left[\Delta_1 w_{\nu+0.5} - \frac{1}{2}\Delta_2 w_{\nu+1} + \frac{1}{3}\Delta_3 w_{\nu+1.5} - + \cdots\right], \\ w''(v_\nu) &= \frac{1}{(\Delta v)^2}\left[\Delta_2 w_{\nu+1} - \Delta_3 w_{\nu+1.5} + \frac{11}{12}\Delta_4 w_{\nu+2} - + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \text{(N*)}$$

Rascher klingen die Koeffizienten ab, wenn die Stirlingsche Formel differenziert wird:

$$\left.\begin{aligned} w'(v_\nu) &= \frac{1}{\Delta v}\left[\Delta_1 w_\nu - \frac{1}{6}\Delta_3 w_\nu + \frac{1}{30}\Delta_5 w_\nu - + \cdots\right], \\ w''(v_\nu) &= \frac{1}{(\Delta v)^2}\left[\Delta_2 w_\nu - \frac{1}{12}\Delta_4 w_\nu + - \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \text{(S*)}$$

Bei den höheren Ableitungen machen sich sehr stark die Abrundungsfehler der Tafel bemerkbar. Nimmt man speziell $\Delta v = 1$, wie es z. B. bei der Tafel des Siaccischen Widerstandsgesetzes geschehen ist*), so wird der $\varkappa$-te Differentialquotient in erster Näherung durch die $\varkappa$-te Differenz derselben Zeile dargestellt (bei ungeradem $\varkappa$ ist der Zwischenwert zu nehmen). Bei der Siaccischen Tafel ist die dritte Differenz nirgends bestimmbar. Daher sind die dritten und höheren Ableitungen im Rahmen der Tafelgenauigkeit gleich Null zu wählen.

Fast in allen ballistischen Methoden zur Bestimmung der Geschoßbahn treten Funktionen auf, die durch Integrale erklärt sind. Z. B. wurden beim schwerefreien Schuß (§ 15) die Funktionen

$$T(v) = \int\limits_v \frac{dv}{w(v)} \qquad \text{und} \qquad D(v) = \int\limits_v \frac{v\,dv}{w(v)}$$

eingeführt. Da $w(v)$ als Tafel gegeben ist, wird man auch $T(v)$ und $D(v)$ wieder als Tafel berechnen. Es handelt sich also allgemein darum, eine Funktion $\Phi(v)$ zu tabellieren, wenn in

$$\Phi(v) = \int\limits_{v_0}^{v} \varphi(v)\,dv$$

der Integrand $\varphi(v)$ als Tafel vorliegt. Die Argumente seien $v_0, v_1, v_2, \cdots$. Es gibt also wieder ein Differenzenschema, das wir aber noch durch eine Spalte vor der Funktionsspalte ergänzen wollen. Wir bezeichnen diese Differenzenwerte mit $\Delta_{-1}\varphi$, also

$$\begin{array}{ccccc}
 & \Delta_{-1}\varphi_{-0.5} & & & \\
v_0 & & \varphi_0 & & \\
 & \Delta_{-1}\varphi_{0.5} & & \Delta_1\varphi_{0.5} & \\
v_1 & & \varphi_1 & & \Delta_2\varphi_1 \quad . \\
 & \Delta_{-1}\varphi_{1.5} & & \Delta_1\varphi_{1.5} & \\
v_2 & & \varphi_2 & & \Delta_2\varphi_2 \quad . \\
 & \Delta_{-1}\varphi_{2.5} & & . \quad . & \\
. & & . & & . \quad . \\
 & . & & . \quad . & \quad .
\end{array}$$

*) Cranz, Ballistik I (1925), S. 572ff.

Da diese „Summenspalte" erst eindeutig bestimmt ist, wenn einer ihrer Werte festgelegt wird, wählen wir

$$\Delta_{-1}\,\varphi_{-0.5} = -\tfrac{1}{2}\,\varphi_0 + \tfrac{1}{12}\,\Delta_1\,\varphi_0 - \tfrac{11}{720}\,\Delta_3\,\varphi_0 + \tfrac{191}{60480}\,\Delta_5\,\varphi_0 - + \cdots .$$

Damit wird dann $\Delta_{-1}\,\varphi_{\nu+0.5} - \Delta_{-1}\,\varphi_{\nu-0.5} = \varphi_\nu$ für alle ν. Durch Integration der Besselschen Interpolationsformel erhält man

$$\Phi\,(v_\nu) = \Delta\,v\,[\Delta_{-1}\,\varphi_\nu - \tfrac{1}{12}\,\Delta_1\,\varphi_\nu + \tfrac{11}{720}\,\Delta_3\,\varphi_\nu - + \cdots]. \tag{*B}$$

Wählt man wieder $\Delta\,v = 1$, so ist in erster Näherung $\Phi\,(v_\nu)$ gleich dem zu derselben Zeile gehörigen Zwischenwert der ersten Summenspalte. Im allgemeinen wird es aber nötig sein, wenigstens die ersten Differenzen $\Delta_1\,\varphi_\nu$ noch zu berücksichtigen*).

§ 24. Integration der Hauptgleichung

1. Integration durch Extrapolation. Die am Schluß von § 23 angegebene Besselsche Formel (*B) kann auch zur Lösung der Hauptgleichung herangezogen werden. Die Hauptgleichung sei in einer der im III. Kapitel abgeleiteten Formen gegeben [§ 11 (16), (18), (23), (24), § 13 (29), (32)]. Vor allem die integrierten Formen zeigen deutlich den Zusammenhang mit der im § 23 behandelten Quadraturaufgabe. Schreiben wir etwa Gleichung (16) in § 11 in der Form

$$v = v_0 + \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \left(\operatorname{tg}\omega + \frac{w\,(v)}{g\cos\omega}\right) v\,d\omega = v_0 + \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \varphi\,(v,\omega)\,d\omega\,, \tag{5}$$

so liegt eine Quadraturaufgabe vor, sobald v als Funktion von ω bereits bekannt ist. Kennt man näherungsweise den Verlauf der Funktion $v\,(\omega)$, so kann man durch wiederholte Quadratur die Hauptgleichung lösen. Angenommen $v^{(\varkappa)}\,(\omega)$ sei die $\varkappa$-te Näherung von $v\,(\omega)$, so ergibt sich die $(\varkappa+1)$-te Näherung in der Form

$$v^{(\varkappa+1)} = v_0 + \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \varphi\,(v^{(\varkappa)},\omega)\,d\omega\,. \tag{6}$$

Ist die Integration erst einmal in Gang gebracht, etwa bis v_ν, so erhält man durch Extrapolation des Differenzenschemas im allgemeinen einen brauchbaren Näherungswert für $v_{\nu+1}$, so daß bereits nach einmaliger Wiederholung der Rechnung der nächste Tafelwert praktisch genau ermittelt ist. Ist aus dem Differenzenschema zu vermuten, daß etwa die λ-te Differenz über mehrere Zeilen praktisch konstant bleibt, so wird man diesen Wert auch für die nächsten Zeilen als gültig ansehen und so das Differenzenschema nach vorn bis zur ersten Summenspalte ergänzen. Gegen-

*) Fehlerabschätzung siehe z. B. G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Sammlung Göschen 1110.

über der Besselschen Formel (*B) hat die Adamssche Formel (*A) einige Vorzüge:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\omega_\nu}^{\omega_\nu+1} \varphi\,(v^{(\varkappa)}, \omega)\, d\omega = \Delta\,\omega\,[\varphi_{\nu+1} - \tfrac{1}{2}\,\Delta_1\,\varphi_{\nu+0.5} - \tfrac{1}{12}\,\Delta_2\,\varphi_\nu \\ - \tfrac{1}{24}\,\Delta_3\,\varphi_{\nu-0.5} - \tfrac{11}{720}\,\Delta_4\,\varphi_{\nu-1} - \cdots].\end{aligned}\right\} \quad (*A)$$

In (*B) werden nämlich die Differenzen der ν-ten Zeile herangezogen, während in (*A) die Differenzen von Spalte zu Spalte um eine halbe Zeile aufsteigen, ganz wie bei der Newtonschen Interpolationsformel (N) (unteres Vorzeichen). Bei Anwendung der Formel (*B) müssen bei Berücksichtigung erster Differenzen zwei, bei Berücksichtigung dritter Differenzen drei Werte der betreffenden Spalte extrapoliert werden, bei der Formel (*A) wird immer nur ein Wert extrapoliert. Dieser Vorteil wird freilich größtenteils wieder aufgehoben, denn bei (*A) klingen die Koeffizienten viel langsamer ab als bei (*B).

2. Methode von Runge-Kutta. Denkt man sich die Lösung der Hauptgleichung in eine Reihe nach Potenzen von $\omega - \omega_\nu$ entwickelt, so kann man fordern, daß die Näherungslösung bis zur λ-ten Ordnung mit der Reihenentwicklung übereinstimmt. Nach einem Gedanken von Gauß, der von Runge und Kutta*) auf Differentialgleichungen übertragen wurde, kann man $v_{\nu+1} - v_\nu$ durch ein geeignet ausgewogenes Mittel von λ-Werten des Integranden $\varphi\,(v, \omega)$ annähern. Setzt man $\lambda = 1$ voraus, so ergibt sich

$$v_{\nu+1} = v_\nu + \Delta\,\omega\,\varphi\,(v_\nu, \omega_\nu)\,. \qquad (R_1)$$

Für $\lambda = 2$ ergibt sich z. B.

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1} &= v_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega\,(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)})\,, \\ \varphi^{(1)} &= \varphi\,(v_\nu, \omega_\nu)\,, \\ \varphi^{(2)} &= \varphi\,(v_\nu + \Delta\,\omega\,\varphi^{(1)}, \omega_\nu + \Delta\,\omega)\,. \end{aligned}\right\} \quad (R_2)$$

Für $\lambda = 3$ ergibt sich z. B.

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1} &= v_\nu + \tfrac{1}{6}\,\Delta\,\omega\,(\varphi^{(1)} + 4\,\varphi^{(2)} + \varphi^{(3)})\,, \\ \varphi^{(1)} &= \varphi\,(v_\nu, \omega_\nu)\,, \\ \varphi^{(2)} &= \varphi\,(v_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega\,\varphi^{(1)}, \omega_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega)\,, \\ \varphi^{(3)} &= \varphi\,(v_\nu + \Delta\,\omega\,[2\,\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}], \omega_\nu + \Delta\,\omega)\,. \end{aligned}\right\} \quad (R_3)$$

Für $\lambda = 4$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1} &= v_\nu + \tfrac{1}{6}\,\Delta\,\omega\,(\varphi^{(1)} + 2\,\varphi^{(2)} + 2\,\varphi^{(3)} + \varphi^{(4)})\,, \\ \varphi^{(1)} &= \varphi\,(v_\nu, \omega_\nu)\,, \\ \varphi^{(2)} &= \varphi\,(v_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega\,\varphi^{(1)}, \omega_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega)\,, \\ \varphi^{(3)} &= \varphi\,(v_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega\,\varphi^{(2)}, \omega_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\omega)\,, \\ \varphi^{(4)} &= \varphi\,(v_\nu + \Delta\,\omega\,\varphi^{(3)}, \omega_\nu + \Delta\,\omega)\,. \end{aligned}\right\} \quad (R_4)$$

*) Ausführlich dargestellt in C. Runge und H. König, Numerisches Rechnen (1924), S. 286ff.

Zum Unterschied von der vorher besprochenen Extrapolationsmethode werden nur Werte des Integranden benutzt, die innerhalb des zu überbrückenden Teilintervalls liegen. Ein weiterer Vorzug ist, daß die Größe der Teilintervalle auf die Veränderlichkeit des Integranden abgestimmt werden kann, während bei der Extrapolationsmethode im allgemeinen die Größe des Intervalls in allen Teilen der Bahn konstant zu wählen ist. Der Arbeitsaufwand ist bei der Runge-Kuttaschen Methode beträchtlich größer als bei der Extrapolationsmethode, die Kontrollmöglichkeiten sind geringer. Auf ballistische Probleme ist die Methode zuerst von Veithen*) angewandt worden, allerdings nicht auf die Hauptgleichung, sondern auf die ursprünglichen Bewegungsgleichungen § 10 (1). Man hat also dann ein System von vier Differentialgleichungen gleichzeitig zu behandeln. Das ist nicht vorteilhaft, denn es besteht die Gefahr, daß sich die Fehler der Näherungslösungen stärker häufen. Tatsächlich hat auch Neuendorff*) an einem Beispiel gezeigt, daß die errechneten Bahnen mit den erschossenen nicht genügend übereinstimmen.

3. Isoklinenmethode. Diese von C. Runge**) für Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelte Methode geht z. B. von der Hauptgleichung § 11 (16)

$$\frac{dv}{d\omega} = \varphi(\omega, v) \tag{7}$$

aus. In einem kartesischen (ω, v)-Koordinatensystem gibt dann $\varphi(\omega, v)$ die Steigung der durch den Punkt ω, v gehenden Integralkurve $v(\omega)$. Die Kurven $\varphi(\omega, v) = \text{const}$ sind also die Linien gleicher Neigung (Isoklinen). Geht man von einem beliebigen Anfangszustand ω_0, v_0 aus, so kann man die hierzu gehörige Integralkurve $v(\omega)$ annähern durch ein Streckenpolygon, das aus den Linienelementen des Feldes allmählich aufgebaut wird. Man hat also die Schar der Isoklinen in dem Gebiet zu zeichnen, in dem der gesuchte Geschwindigkeitsriß liegt und jeder Isokline die zugehörige Richtung zuzuordnen. Je dichter die Isoklinenschar, um so genauer stellt das Streckenpolygon den Geschwindigkeitsriß dar. Ist die Näherungslösung $v^{(1)}(\omega)$ gefunden, so kann man durch wiederholte Quadraturen nach Formel (6) immer näher an die strenge Lösung herankommen. Für die numerische Quadratur wird man die Formel § 23 (*B) verwenden, wenn man es nicht vorzieht, graphisch zu integrieren**).

Das Verfahren ist nicht an die in (7) gebrauchten Variablen gebunden. C. Cranz und R. Rothe***), die die Isoklinenmethode auf die Ballistik übertragen haben, benutzen als Veränderliche $\zeta = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)$ und $\lg v$, ihre Hauptgleichung hat daher die Form § 11 (24)

---

*) Artillerist. Monatshefte 1919, S. 98.

**) C. Runge, Graphische Methoden (1919), S. 105ff.

***) Artillerist. Monatshefte 1917, S. 197.

$$\frac{d \lg v}{d\zeta} = \operatorname{tg}\operatorname{hyp}\zeta + F(\lg v)\,, \quad \text{wo} \quad F(\lg v) = \frac{w(v)}{g}\,. \tag{8}$$

Das bringt für die Berechnung der Isoklinen einige Vorteile mit sich. Ganz allgemein wird man die Veränderlichen so wählen, daß die Isoklinen möglichst einfach zu berechnen sind.

Die Isoklinen der $\mathfrak{v}$-Ebene erhält man, wenn man die Hauptgleichung in der Form § 16 (47) benutzt:

$$\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} = \frac{a(v)\,\dot{z} + g}{a(v)\,\dot{x}}\,, \quad \text{wo} \quad a(v) = \frac{w(v)}{v}\,, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2\,. \tag{9}$$

Bei linearem Widerstandsgesetz, $a(v) = \text{const}$, sind die Isoklinen Gerade durch den Punkt $\dot{x} = 0$, $\dot{z} = -g/a$. Die durch $\dot{x}_0, \dot{z}_0$ gehende Isokline ist zugleich Hodograph, denn das Richtungselement des Hodographen fällt hier mit der Isokline zusammen.

4. Orthodromenmethode.*) In gewissem Sinne eine Umkehrung der Isoklinenmethode ist die folgende Methode, in der die orthogonalen Trajektorien (Orthodromen) der Hodographenschar benutzt werden. In der Hauptgleichung (9) ist $\frac{d\dot{z}}{d\dot{x}} = \operatorname{tg}\alpha$, wenn α den Winkel der Tangente an den Hodographen gegen die $\dot{x}$-Richtung bedeutet. Die Normale an den Hodographen habe den Richtungswinkel β. Dann ist $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -1$. Mithin ist die Differentialgleichung der Orthodromen

$$\frac{d\dot{x}}{d\dot{z}} = -\frac{\frac{w}{v}\,\dot{z} + g}{\frac{w}{v}\,\dot{x}}\,. \tag{10}$$

Diese Differentialgleichung nun kann für jedes Widerstandsgesetz auf Quadraturen zurückgeführt werden. Wegen $\dot{x}\,d\dot{x} + \dot{z}\,d\dot{z} = v\,dv$ ergibt sich nämlich aus (10) als Gleichung der Orthodromen

$$\frac{1}{g}\int_0^v w(v)\,dv + \dot{z} = C\,. \tag{11}$$

Da man das hier auftretende Integral an Hand der Widerstandstafel vorweg berechnen kann, sind die Orthodromen schnell zu zeichnen. Für $w = a\,v$ z. B. wird die Orthodromenschar eine Kreisschar

$$\dot{x}^2 + \left(\dot{z} + \frac{g}{a}\right)^2 = \text{const}\,, \tag{12}$$

für $w = a\,v^n$ eine Schar zyklischer Kurven.

Man zieht das Tangentenvielseit so, daß die Seiten die zu $C = C_1$, $C_2, \ldots$ gehörigen Orthodromen rechtwinklig schneiden und die Schnitt-

*) S. Vahlen im Becker-Gedenkband, S. 17.

punkte aufeinanderfolgender Tangenten etwa in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Orthodromen liegen, weil die beiden von einem Punkt aus an denselben Kreis gezeichneten Tangenten gleich lang sind, ein kleiner Bogen des Hodographen aber durch den Krümmungskreis ersetzt werden kann.

Man kann auch auf die Zeichnung der Orthodromen verzichten. In jedem gehörig kleinen Gebiet $(v, v + \Delta v)$ läßt sich w durch ein homogenes lineares Gesetz approximieren. Einer Folge $v_0, v_1, v_2, \ldots$ entspricht also eine Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des Widerstandsgesetzes $w(v) = a\,v$, entspricht also nach (12) eine Folge von Mittelpunkten $\left(0, -\frac{g}{a_0}\right), \left(0, -\frac{g}{a_1}\right), \ldots$ der kreisförmigen Orthodromen. Auf diese Mittelpunkte weist aber die Tangente an den Hodographen. An Stelle der Orthodromenschar kann also auch eine Folge von Punkten auf der negativen $\dot{z}$-Achse treten, $\dot{z} = -\frac{g}{a_0}, -\frac{g}{a_1}, \ldots,$ wo $a_\nu = \frac{w(v_\nu)}{v_\nu}$ ist. Diese Punktfolge Q_ν wird man mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ beziffern. Kennt man also den Punkt $P_0(v_0)$ des Hodographen, so findet man den Punkt $P_1(v_1)$ aus den beiden Forderungen, daß er von O die Entfernung v_1 hat und daß die beiden Berührungspunkte P_0, P_1 vom Schnittpunkt ihrer Tangenten gleiche Entfernung haben. Ein ähnliches Verfahren ist von Josseline de Jong*) vorgeschlagen worden. Gegen die Anwendung in allen Teilen des Hodographen spricht die Tatsache, daß die Tangente an den Hodographen nahezu parallel der $\dot{z}$-Achse werden kann. Der Krümmungsmittelpunkt der Orthodrome rückt also dann sehr weit vom Nullpunkt der $\mathfrak{v}$-Ebene weg. In diesen Fällen wird man also nicht umhin können, die Orthodromen nach (11) zu konstruieren.

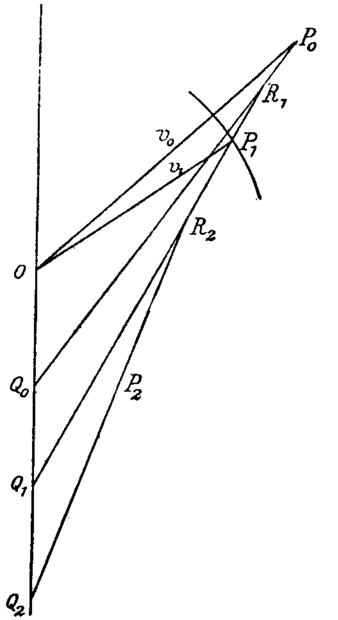

Abb. 20

Der Isoklinenmethode ist die Orthodromenmethode fast immer überlegen, weil der Hodograph die Orthodromen stets unter rechtem Winkel schneidet, was für die Isoklinen nur in Ausnahmefällen gilt. Die Isoklinenmethode wird ganz unsicher, wenn das Richtungselement des Hodographen nahezu mit der Tangente an die Isokline zusammenfällt.

*) J. de Jong, Militaire Spectator 1924. Aber J. de Jong bestimmt den zweiten Hodographenpunkt als Schnitt des mit v_1 um 0 geschlagenen Kreises und der ersten Tangente $P_0 Q_0$. Hierdurch entstehen einseitige Fehler.

5. Mechanische Lösung der Hauptgleichung. Man kann die Integration der Hauptgleichung auch durch folgenden Mechanismus ausführen. $O'\,O''$ liege in der Zeichenebene fest, $O'\,O''\,A'\,A''$ und $A'\,A''\,P'\,P''$ seien zwei Gelenkparallelogramme, durch die $P'\,P''$ in erforderlichem Umfange an jede Stelle der Ebene zu bringen ist (Abb. 21). Mit $O'\,A'$ starr verbunden ist eine ebene Kurve, die $O'\,P'$ immer so in einem Punkte T schneidet, daß $O'\,T = v - w$ und $T\,P' = w$ ist, wenn $O'\,P' = v$ ist. Macht man dann $O\,O' = P\,P' = g$ und zieht den Punkt P vermittelst eines in P befestigten Fadens in Richtung über T, so beschreibt ein in P angebrachter Zeichenstift die gesuchte Kurve. Die Anfangslage P_0 von P ist dadurch bestimmt, daß $O\,P_0 = v_0$ und $O''\,O\,P_0 = \frac{\pi}{2} - \omega_0$ sein muß. Der Beweis folgt sofort daraus, daß die Tangentenrichtung $P\,T$ der Kurve die Resultierende ist aus $g = P\,P'$ und $w = P'\,T$. Der Maßstab für g und w ist beliebig, aber bei beiden derselbe. Die Konstruktion der T-Kurve erfolgt so: Für jede Gestalt des Dreiecks $O'\,A'\,P'$ trage man auf $O'\,P' = v$ den Wert $v - w = O'\,T$ ab (Abb. 22). Kann $w\,(v) = c\,f\,(v)$ gesetzt werden, so gilt für jedes c dieselbe T-Kurve. Für ein Geschoß mit größerem (kleinerem) c verkleinert (vergrößert) man $P\,P' = O\,O'$ im entsprechenden Verhältnis.

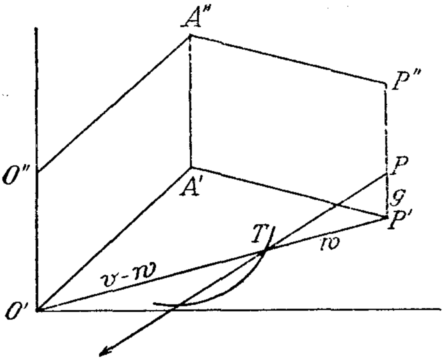

Abb. 21

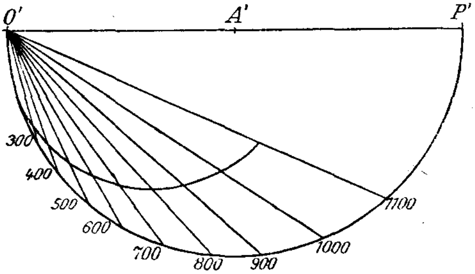

Abb. 22

§ 25. Der tempierte Hodograph

Im Jahre 1915 an der Champagnefront mußte ich einen Zug meiner leichten Feldhaubitzen behelfsmäßig als Flakzug einrichten. Es war nötig, daß ich mir genauere Kenntnis verschaffte von den Geschoßbahnen bei den großen Anfangserhöhungen ω_0, die beim Flakschießen zur Anwendung kommen. Ich fand damals ein einfaches und schnelles Verfahren*) durch folgende Überlegung. Im widerstandsfreien Raum

*) Artillerist. Monatshefte 1918, S. 145—147.

$[w(v) = 0]$ ist die Geschoßbahn parabolisch; es gelten wegen § 10 (1) die Formeln

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}\,\Delta t\,, \qquad \mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \mathfrak{v}_\nu\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}\,\Delta t^2\,.$$

Deshalb erhält man zum Bahnelement $(\mathfrak{r}_\nu, \mathfrak{v}_\nu)$ nach $\Delta t = 1^{\text{sec}}$ das neue Bahnelement $(\mathfrak{r}_{\nu+1}, \mathfrak{v}_{\nu+1})$ durch

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}\,, \qquad \mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_\nu + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{v}_{\nu+1})\,. \quad \text{(P)}$$

Dem entspricht die Konstruktion der Abb. 23. Kommt der Luftwiderstand mit der Verzögerung $|\mathfrak{w}|$ hinzu, so wird

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}\,\Delta t + \int_{t_\nu}^{t_\nu+\Delta t} \mathfrak{w}\,dt\,, \qquad \mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \mathfrak{v}_\nu\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}\cdot\Delta t^2 + \iint_{t_\nu}^{t_\nu+\Delta t} \mathfrak{w}\,dt^2\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Vektorrechnung*) läßt sich schreiben

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{w}\,dt = \overline{\mathfrak{w}}\,\Delta t\,.$$

Hier ist $\overline{\mathfrak{w}}$ ein Vektor im kleinsten konvexen Bereich der $\mathfrak{w}$-Ebene, der das Kurvenstück $\mathfrak{w}(t)$ umschließt ($\overline{\mathfrak{w}}$ hängt von t und Δt ab). Also kann wie bei der Parabel der Geschwindigkeitsvektor in der Form

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + (\mathfrak{g} + \overline{\mathfrak{w}}_\nu)\,\Delta t$$

dargestellt werden. Nur ist jetzt $\mathfrak{g}$ durch den Vektor $\mathfrak{g} + \overline{\mathfrak{w}}_\nu$ zu ersetzen, wo $\overline{\mathfrak{w}}_\nu$ noch von ν abhängt. Die Bahn $\mathfrak{r}(t)$ läßt sich nicht in derselben einfachen Weise mit der parabolischen Bahn in formale Übereinstimmung bringen. Das ist aber nicht so wichtig, weil $\mathfrak{r}(t)$ durch Quadratur bestimmbar ist, sobald $\mathfrak{v}$ als Funktion von t bekannt ist. Es soll also zunächst nur der Geschwindigkeitsriß mit der Zeit t als Parameter näherungsweise bestimmt werden.

Für kleine Zwischenzeiten Δt kann man etwa $\overline{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}^{(1)} = \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu)$ setzen. Mit $\Delta t = 1^{\text{sec}}$ ergibt sich dann

$$\mathfrak{v}^{(1)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu) + \mathfrak{g}\,, \qquad (\mathrm{V}_1)$$

d. h. die bei der Parabel gültige Konstruktion (P) ändert sich in der Weise ab, daß man $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu)$ zu ersetzen hat. Die Formel (V_1) läßt sich auch so auffassen: Zuerst unterliegt die Geschwindigkeit dem Luftwiderstand, dadurch geht $\mathfrak{v}_\nu$ über in $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu)$, danach wirkt die Schwere, $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu)$ geht also über in $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu) + \mathfrak{g}$.

Kehrt man die Reihenfolge um, so geht $\mathfrak{v}_\nu$ zuerst über in $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}$ und danach diese Geschwindigkeit unter dem Luftwiderstand $\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g})$ in $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g})$. Das ist nicht dasselbe wie $\mathfrak{v}^{(1)}_{\nu+1}$, dann $\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}$ unter-

*) A. Klose, Deutsche Mathematik Bd. 2 (1937), S. 473—479.

scheidet sich nach Größe und Richtung von $\mathfrak{v}_\nu$. Es gilt also jetzt

$$\mathfrak{v}^{(2)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g})\,. \qquad (V_2)$$

In (V_2) ist also $\bar{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g})$ gesetzt.

Man kann sich fragen, wie man durch Abwandlung der Methode den Mittelwert $\bar{\mathfrak{w}}$ genauer erfassen könnte. Denkt man sich in dem Integrations-

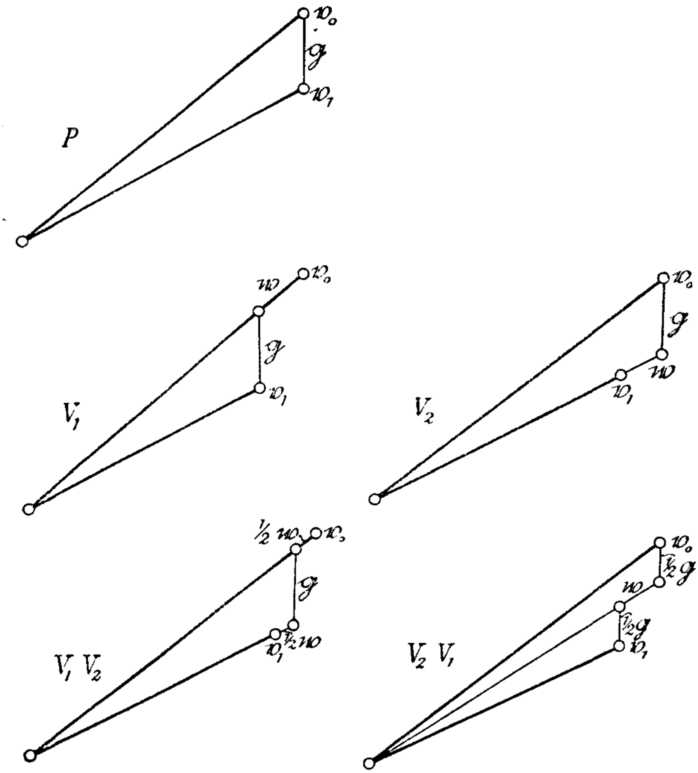

Abb. 23

intervall die Lösung nach Potenzen der Zwischenzeit Δt entwickelt, so kann man etwa fordern, daß $\mathfrak{v}_{\nu+1}$ bis auf die Glieder zweiter Ordnung genau dargestellt wird. Man setzt dann wie bei der Methode von Runge und Kutta (vgl. § 24, 2)

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + (K_1\,\dot{\mathfrak{v}}^{(1)} + K_2\,\dot{\mathfrak{v}}^{(2)})\,\Delta t$$

an, wo $\dot{\mathfrak{v}}^{(1)} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu)$ und $\dot{\mathfrak{v}}^{(2)} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \alpha\,\Delta t\,\dot{\mathfrak{v}}^{(1)})$ gesetzt wird. Die Gewichte K_1, K_2 und der Faktor α stehen dann zur Verfügung, um mit der Darstellung durch eine Potenzreihe bis zu den Gliedern zweiter Ordnung in Einklang zu kommen:

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g}\,\Delta t + \mathfrak{w}_\nu\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,\dot{\mathfrak{w}}_\nu\,\Delta t^2 + \cdots.$$

Zunächst muß $K_1 + K_2 = 1$ sein. Entwickelt man $\dot{\mathfrak{v}}^{(2)}$ nach Potenzen von $\alpha\,\Delta t$, so ergibt sich

$$\mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \alpha\,\Delta t\,\dot{\mathfrak{v}}^{(1)}) = \mathfrak{w}_\nu + \alpha\,\Delta t\,\dot{\mathfrak{w}}_\nu + \cdots,$$

also ist $K_2\,\alpha = \frac{1}{2}$ zu setzen. Zwei Lösungen sind besonders bequem:

1. $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$. Dem entspricht $\alpha = 1$, also, wenn wieder $\Delta t = 1^{\text{sec}}$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{v}^{(3)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu) + \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu)]\,. \qquad (\mathrm{V}_3)$$

Hier wird also Anfangs- und Endwert von $\mathfrak{w}$ nach (V_1) bestimmt und für $\overline{\mathfrak{w}}$ das arithmetische Mittel genommen.

2. $K_1 = 0$, $K_2 = 1$. Dem entspricht $\alpha = \frac{1}{2}$, also für $\Delta t = 1^{\text{sec}}$

$$\mathfrak{v}^{(4)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}_\nu)\,, \qquad (\mathrm{V}_4)$$

d. h. nach (V_1) wird mit $\Delta t = \frac{1}{2}^{\text{sec}}$ ein Zwischenwert von $\mathfrak{v}$ ermittelt und das dazugehörige $\mathfrak{w}$ als $\overline{\mathfrak{w}}$ benutzt.

Die Lösung (V_3) stimmt mit einer von A. Klose*) angegebenen Näherung überein. Führt man die vektorielle Differenz

$$\Delta\,\mathfrak{w}_{\nu+0.5} = \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu) - \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_\nu)$$

ein, so läßt sich (V_3) auch in der Form schreiben

$$\mathfrak{v}^{(3)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\mathfrak{w}_{\nu+0.5}\,.$$

Die Lösung (V_4) hat Ähnlichkeit mit einem von E. A. Brauer**) vorgeschlagenen Verfahren. Brauer nimmt den mittleren Widerstandsvektor entgegen der Richtung von $\mathfrak{v}_* = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}$ an, seine Größe $w\,(v_m)$ bestimmt er mit dem Argument v_m, nämlich als Schnitt der Geraden durch v_* (Richtungstangens -2) mit der $w\,(v)$-Kurve, also aus

$$w\,(v_m) = -2\,v_m + 2\,v_*\,.$$

Durch v_* ausgedrückt, ist $w\,(v_m) = w\,(v_*) + (v_m - v_*)\,w\,(v_*) + \ldots$ oder genähert $w\,(v_m) = w\,(v_*)\,[1 - \frac{1}{2}\,w'\,(v_*)]$. Daher entspricht die obige Konstruktionsvorschrift der Formel

$$\mathfrak{v}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} - \mathfrak{v}_*\,\frac{w_*}{v_*}\left(1 - \frac{1}{2}\,w_*{}'\right), \qquad \text{wo} \qquad \mathfrak{v}_* = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}\,. \qquad (\mathrm{B})$$

Aus (V_4) folgt entsprechend

$$\mathfrak{v}^{(4)}_{\nu+1} = \mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{g} - \mathfrak{v}_*\,\frac{w_*}{v_*}\left(1 - \frac{1}{2}\,w_*{}' \cdot \frac{w_\nu}{w_*}\,\mathfrak{e}_\nu \cdot \mathfrak{e}_*\right) - \frac{1}{2}\,\frac{w_*}{v_*}\,\mathfrak{w}_\nu \cdot \mathfrak{n}_*\,\mathfrak{n}_*\,.$$

---

*) A. Klose, Deutsche Mathematik Bd. 2 (1937), S. 473—479.

) Anleitung zur graphischen Ermittelung der Flugbahn eines Geschosses. Karlsruhe 1918. Für die numerische Rechnung siehe auch E. Pflanz, Einfaches Verfahren zur graphisch-rechnerischen Bestimmung einer Geschoßflugbahn. Wehrtechn. Monatshefte **41 (1937) S. 529—534.

Hier sind $\mathfrak{e}_\nu$, $\mathfrak{e}_*$ die Tangenten an den Stellen $\mathfrak{v}_\nu$ bzw. $\mathfrak{v}_*$, $\mathfrak{n}_*$ ist die Normale an der Stelle $\mathfrak{v}_*$. Für nicht zu kleine Geschwindigkeiten sind also die Unterschiede (B) — (V_4) klein von höherer Ordnung als der zweiten. Allerdings gibt (B) die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber (V_4) durchweg zu klein und zu flach, also ergeben sich bei (B) kleinere Gipfelhöhen und kleinere Schußweiten als bei (V_4).

Die Methoden (V_1) bis (V_4) sind so einfach in der Handhabung, daß auch minder geübte Hilfskräfte damit zurechtkommen. Selbst die Methoden erster Ordnung geben recht brauchbare Resultate, für überschlägliche Untersuchungen sind sie unentbehrlich. Bei (V_1) und (V_2) muß bei jedem Integrationsschritt ein Widerstandswert aus der Tafel entnommen werden, bei (V_3) und (V_4) sind jedes Mal zwei Werte erforderlich. Man kommt aber auch bei den Methoden zweiter Ordnung mit einem einzigen Widerstandswert aus, ohne daß es, wie bei Brauer, nötig wäre, diesen Wert durch eine umständliche Konstruktion zu ermitteln. Zu diesem Zweck überbrücken wir das Sekundenintervall mit zwei Schritten von je $^1/_2$ Sek. Länge, beim ersten Schritt wird die Methode (V_1), beim zweiten Schritt die Methode (V_2) angewandt. Das ergibt am Ende des Sekundenintervalls

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}^{(1,2)}_{\nu+1} &= \mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu) + \mathfrak{g}] + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}_\nu + \mathfrak{g})]\\ &= \mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu) + \mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}_\nu + \mathfrak{g})\,.\end{aligned}\right\} (V_1\,V_2)$$

Bei der Überbrückung des nächsten Sekundenintervalls ergibt sich

$$\mathfrak{v}^{(1,2)}_{\nu+2} = \mathfrak{v}_{\nu+1} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_{\nu+1}) + \mathfrak{g}] + \cdots\,.$$

Die Widerstände am Ende des ersten und am Beginn des zweiten Sekundenintervalls haben dieselbe Richtung, aber verschiedenes Argument $\mathfrak{v}_{\nu+1}$ bzw. $\mathfrak{v}_* = \mathfrak{v}_\nu + \frac{1}{2}\mathfrak{w}_\nu + \mathfrak{g}$. Entwickelt man nach Potenzen der Differenz $v_{\nu+1} - v_*$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} w(v_{\nu+1}) &= w(v_*) + (v_{\nu+1} - v_*)\,w'(v_*) + \cdots\\ &= w(v_*)\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{w^2(v_*)}{v_*}\,n_1(v_*) + \cdots\right],\end{aligned}$$

d. h. der Unterschied der Widerstände ist klein von der dritten Ordnung. Man kann also $\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_{\nu+1})$ durch $\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_*)$ ersetzen. Abgesehen vom ersten Schritt braucht man also bei ($V_1\,V_2$) immer nur einen Widerstandswert zu bestimmen [vgl. Abb. 23]. Die Genauigkeit ist, wie man leicht sieht, dieselbe wie bei (V_3), (V_4) und (B). Man kann aber auch zunächst nach (V_2) und dann nach (V_1) konstruieren:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}^{(2,1)}_{\nu+1} &= \mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g})] + \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g})) + \mathfrak{g}\right]\\ &= \mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}))\right] + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}.\end{aligned}\right\} (V_2\,V_1)$$

Auch hier kann man mit ausreichender Genauigkeit

$$\tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}) + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}))\right] = \mathfrak{w}(\mathfrak{v}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g})$$

setzen. Es wird also wie bei (V_4) und (B) ein mittlerer Widerstandswert benutzt. In dieser Form erfordern die Methoden ($V_1 V_2$) und ($V_2 V_1$) genau denselben Konstruktionsaufwand wie (V_1) und (V_2).

Jede der Lösungen (V_1) bis (V_4) kann als Ausgangslösung für ein strenges Iterationsverfahren benutzt werden. Hat man für die äquidistanten Zeitwerte $t_0, t_1, t_2, \ldots$ die $\varkappa$-te Näherungslösung für $\mathfrak{v}_\nu$ erhalten,

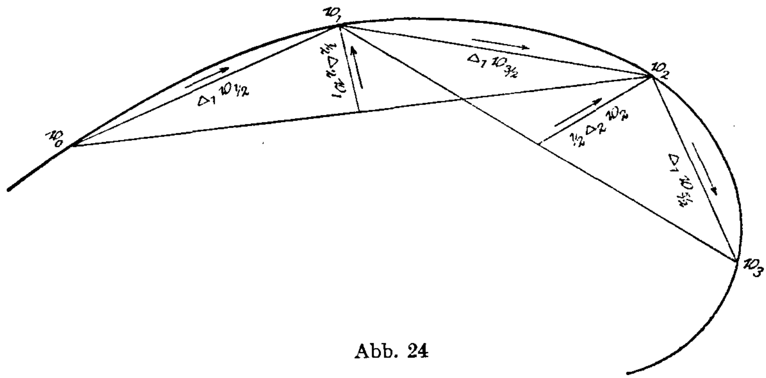

Abb. 24

kennt man also die zugehörigen Werte der Widerstandsvektoren $\mathfrak{w}_0^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{w}_1^{(\varkappa)}, \ldots$, so ergibt sich die $(\varkappa + 1)$-te Näherung durch Quadratur

$$\mathfrak{v}_\nu^{(\varkappa+1)} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,(t_\nu - t_0) + \int_{t_0}^{t_\nu} \mathfrak{w}^{(\varkappa)}\, dt\,.$$

Die Quadraturen können numerisch für die Horizontal- bzw. Vertikalkomponente (etwa nach der in § 23 angegebenen Methode) oder auch graphisch nach einem entsprechenden Verfahren durchgeführt werden. Der Vektorfolge $\mathfrak{w}_0, \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots$ läßt sich nämlich ebenfalls ein Differenzenschema zuordnen*):

$$\Delta_1 \mathfrak{w}_{\nu+0.5} = \mathfrak{w}_{\nu+1} - \mathfrak{w}_\nu\,, \qquad \Delta_2 \mathfrak{w}_{\nu+1} = \Delta_1 \mathfrak{w}_{\nu+1.5} - \Delta_1 \mathfrak{w}_{\nu+0.5}\,, \qquad \ldots\,.$$

Die geometrische Bedeutung ist aus der Abb. 24 zu ersehen. Die Integrationsformel (*B) aus § 23 läßt sich also auf Vektoren ohne weiteres übertragen.

§ 26. Bestimmung der Geschoßbahn

Soll die Bahn des Geschosses ohne Benutzung des Geschwindigkeitsrisses bestimmt werden, so ist der Geschoßort $\mathfrak{r}(t)$ durch eine Taylorsche Entwicklung darzustellen:

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + \Delta t\, \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \dot{\mathfrak{v}}_0 + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \ddot{\mathfrak{v}}_0 + \cdots\,. \tag{13}$$

*) A. Klose, Deutsche Mathematik Bd. 2 (1937), S. 473—479.

$\dot{\mathfrak{v}}_0$, $\ddot{\mathfrak{v}}_0$ ergeben sich aus § 10 (1), (3), die höheren Ableitungen aus $\ddot{\mathfrak{v}}$ durch fortgesetzte Differentiation nach t. Bricht man die Reihe bei dem Gliede n-ter Ordnung in Δt ab, so ist der Fehler gleich

$$\frac{1}{(n+1)!}\,\Delta t^{n+1}\,\overset{(n)}{\mathfrak{v}^*},$$

wo $\overset{(n)}{\mathfrak{v}^*}$ ein Zwischenwert der n-ten Ableitung von $\mathfrak{v}$ ist. Man sieht, daß die Entwicklung (13) im allgemeinen nur für kleine Werte von Δt bequem zu handhaben ist.

Nimmt man an, daß der Geschwindigkeitsriß $v(\omega)$ nach einer der Methoden des § 24 ermittelt ist, so läßt sich, wie zuerst Poncelet*) vorgeschlagen hat, die Bahnkurve durch eine Folge von Kreisbogen annähern. Nach § 10 (14) ist der Krümmungsradius ϱ der Bahn bestimmt durch

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \cdot \cos\omega\,. \tag{14}$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Normalen. Trägt man auf dem Krümmungskreis zur Zeit t von dem gegebenen Ausgangspunkt das Bogenelement $\Delta s = v\,\Delta t$ ab, so hat man damit angenähert den gesuchten Bahnpunkt zur Zeit $t+\Delta t$. Die zugehörige Geschwindigkeit und ihre Richtung findet man genähert [vgl. § 10 (9), (10)] zu

$$\left.\begin{aligned} v + \dot{v}\,\Delta t &= v - \left(g\sin\omega + w(v)\right)\Delta t\,,\\ \omega + \dot{\omega}\,\Delta t &= w - \frac{g\cos\omega}{v}\,\Delta t\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Ungenauigkeit, die durch die Näherungsformeln entsteht, läßt sich vermeiden, wenn ein tempierter Hodograph nach § 25 vorliegt. Die Poncelet sche Methode ist mit Vorteil nur bei kleinen Geschwindigkeiten anwendbar. Bei großen Geschwindigkeiten ist die Bahnkrümmung $1/\varrho$ meist so klein, daß die zeichnerische Durchführung auf Schwierigkeiten stößt.

An den tempierten Hodographen (§ 25) knüpft die folgende sehr einfache Methode**) an. Wie in § 25 gezeigt wurde, ist in der Parabel bei beliebigem Δt:

$$\mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \mathfrak{v}_\nu\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{g}\,\Delta t^2$$

oder auch, da

$$\mathfrak{g}\,\Delta t = \mathfrak{v}_{\nu+1} - \mathfrak{v}_\nu$$

ist,

$$\mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{v}_{\nu+1}\right)\Delta t\,. \tag{16}$$

Aus einer Folge äquidistanter $\mathfrak{v}$-Werte läßt sich also durch einfache Konstruktion nach (16) eine Folge äquidistanter Parabelpunkte ermitteln

---

*) Leçons de mécanique industrielle, 1828/29, II, § 55.

**) Vahlen, Artilleristische Monatshefte 1918, S. 145.

(s. Abb. 25). Kommt der Luftwiderstand hinzu, so kann in erster Näherung einfach $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g} + \mathfrak{w}$ ersetzt werden, d. h.

$$\mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \mathfrak{v}_\nu \Delta t + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu) \Delta t^2 .$$

Nun ist nach der Methode (V_1) [vgl. § 25] genähert

$$(\mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu) \Delta t = \mathfrak{v}_{\nu+1} - \mathfrak{v}_\nu ,$$

also, wie bei der Parabel,

$$\mathfrak{r}_{\nu+1} = \mathfrak{r}_\nu + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{v}_\nu + \mathfrak{v}_{\nu+1}) \Delta t . \tag{17}$$

Diese Methode nähert die Geschoßbahn durch eine Folge kleiner Parabelbogen an; die Richtung der Parabelachse ist die der jeweiligen

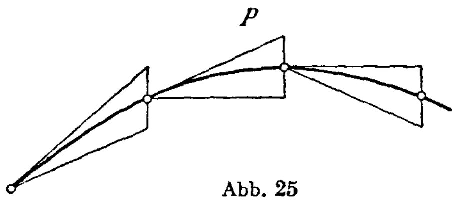

Abb. 25

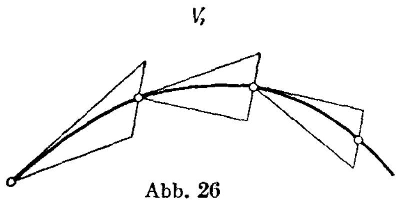

Abb. 26

Gesamtbeschleunigung $\mathfrak{g} + \mathfrak{w}_\nu$, also von Punkt zu Punkt veränderlich (s. Abb. 26).

Man kann auch, um die Quadratur

$$\Delta \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t + \Delta t) - \mathfrak{r}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathfrak{v}(t)\, dt$$

auszuführen, die bekannten Näherungsformeln der Integralrechnung vektoriell verallgemeinern. Sind $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ die Werte des Integranden an den Grenzen des Bereichs, so ergibt die Trapezregel

$$\Delta \mathfrak{r} = \tfrac{1}{2} \Delta t (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) . \tag{18}$$

Das ist dieselbe Formel wie (17). Setzen wir für $\mathfrak{v}_2$ die Taylorsche Entwicklung an,

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1 + \Delta t \dot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots ,$$

so ergibt sich

$$\Delta \mathfrak{r} = \Delta t \mathfrak{v}_1 + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 \dot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{3}{2} \Delta t^3 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

Ein Vergleich mit (13) zeigt, daß die Glieder 2. Ordnung *noch genau* erfaßt werden.

Man kann die Genauigkeit erheblich steigern, wenn man

$$\Delta \mathfrak{r} = \tfrac{1}{2} \Delta t (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) + \tfrac{1}{12} \Delta t^2 (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) \tag{19}$$

setzt. Entwickelt man $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{w}_2$ nach Potenzen von Δt, so ergibt sich

$$\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1 = \dot{\mathfrak{v}}_2 - \dot{\mathfrak{v}}_1 = \Delta t \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

Dadurch geht (19) über in

$$\varDelta \mathfrak{r} = \varDelta t\, \mathfrak{v}_1 + \tfrac{1}{2} \varDelta t^2 \dot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{6} \varDelta t^3 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{24} \varDelta t^4 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{120} \cdot \tfrac{5}{6} \varDelta t^5 \ddddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

Der Vergleich mit (13) zeigt, daß noch die Glieder 4. Ordnung genau erfaßt werden. Der Ansatz (19) ist der Trapezregel (18) überlegen, denn der Gewinn an Genauigkeit ist beträchtlich. Die Mehrarbeit ist unbedeutend, da bei sämtlichen V-Methoden zur Bestimmung des Geschwindigkeitsrisses (vgl. § 25) die vektorielle Widerstandskurve der Geschoßbahn ohnehin ermittelt wird, $\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1$ also bekannt ist. Man erkennt übrigens leicht, daß die Formel (19) mit den ersten Gliedern der Besselschen Integrationsformel [vgl. § 23 (*B)] identisch ist.

Sollen drei zu den äquidistanten Zeitwerten $t,\ t + \frac{1}{2} \varDelta t,\ t + \varDelta t$ gehörige Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ zur Berechnung von $\varDelta \mathfrak{r}$ herangezogen werden, so steht die Keplersche Faßregel (auch als Simpsonsche Regel bezeichnet) zur Verfügung:

$$\varDelta \mathfrak{r} = \tfrac{1}{6} \varDelta t\, (\mathfrak{v}_1 + 4\, \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3)\,. \tag{20}$$

Reihenentwicklung von $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3$ führt auf

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1 + \left(\frac{\varDelta t}{2}\right) \dot{\mathfrak{v}}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varDelta t}{2}\right)^2 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\varDelta t}{2}\right)^3 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots ,$$

$$\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \varDelta t\, \dot{\mathfrak{v}}_1 + \frac{1}{2} \varDelta t^2 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \frac{1}{6} \varDelta t^3 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

In (20) eingesetzt, ergibt sich

$$\varDelta \mathfrak{r} = \varDelta t\, \mathfrak{v}_1 + \tfrac{1}{2} \varDelta t^2 \dot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{6} \varDelta t^3 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{24} \varDelta t^4 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{120} \cdot \tfrac{25}{24} \varDelta t^5 \ddddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

Formel (20) ist also, wie der Vergleich mit (13) zeigt, genau bis zu den Gliedern 4. Ordnung einschließlich. Sie leistet also nicht mehr als die einfachere Formel (19). Das Glied in $\varDelta t^5$ ist bei (20), dem Betrage nach, 4% zu groß, bei (19) etwa 20% zu klein. Formel (20) ist also bei Berücksichtigung der Glieder 5. Ordnung leicht überlegen.

Die Anwendung der $^3/_8$-Regel setzt vier $\mathfrak{v}$-Werte $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ voraus, gehörig zu den Zeitpunkten $t,\ t + \frac{1}{3} \varDelta t,\ t + \frac{2}{3} \varDelta t,\ t + \varDelta t$:

$$\varDelta \mathfrak{r} = \tfrac{1}{8} \varDelta t\, (\mathfrak{v}_1 + 3\, \mathfrak{v}_2 + 3\, \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_4)\,. \tag{21}$$

Auch hier ist die Darstellung nur bis zu den Gliedern in $\varDelta t^4$ genau:

$$\varDelta \mathfrak{r} = \varDelta t\, \mathfrak{v}_1 + \tfrac{1}{2} \varDelta t^2 \dot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{6} \varDelta t^3 \ddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{24} \varDelta t^4 \dddot{\mathfrak{v}}_1 + \tfrac{1}{120} \cdot \tfrac{55}{54} \varDelta t^5 \ddddot{\mathfrak{v}}_1 + \cdots .$$

Der Fehler in der Berechnung des Gliedes 5. Ordnung ist, wie man sieht, halb so groß wie in der Keplerschen Regel.

Man wird also fast immer die Formel (19) den Formeln (18), (20), (21) vorziehen. Die günstigen Eigenschaften von (19) hängen offenbar mit der besonderen Form des Integranden $\mathfrak{v}\,(t)$ zusammen.

Sechstes Kapitel

Die erste Klasse von Lösungen

§ 27. Integration durch Iteration

Grundsätzlich führt das folgende Iterationsverfahren zur Lösung des ballistischen Problems: Wir schreiben die Bewegungsgleichung [§ 10 (1)] in integrierter Form,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t + \int_0^t \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v})\,dt\,. \tag{1}$$

Kenntman eine $\varkappa$-te Näherungslösung $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}\,(t)$ dieser Gleichung, so ergibt sich eine $(\varkappa + 1)$-te Näherungslösung $\mathfrak{v}^{(\varkappa+1)}\,(t)$, indem man die Quadratur

$$\mathfrak{v}^{(\varkappa+1)} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t + \int_0^t \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}^{(\varkappa)})\,dt \tag{2}$$

ausführt. Dieses Iterationsverfahren konvergiert in jedem nicht zu großen Zeitintervall. Soll das Verfahren auch praktisch brauchbar sein, so muß die erste Näherungslösung genügend nahe bei der genauen Lösung von (1) liegen.

Die Geschoßbahnen der ersten Klasse waren durch kleinen Widerstand gekennzeichnet, $w/g \doteq 0$ (vgl. § 13). Die widerstandsfreie Parabel ist daher eine brauchbare Ausgangslösung $\mathfrak{v}^{(1)}\,(t)$, falls nur w/g genügend klein und t nicht zu groß ist. Nach § 14 (40) ist die Geschwindigkeit in der Parabel

$$\mathfrak{v}^{(1)} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t\,. \tag{3}$$

Es ergibt sich daher als zweite Näherungsbahn

$$\mathfrak{v}^{(2)} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t + \int_0^t \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t)\,dt\,. \tag{4}$$

Hierin ist $\mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t) = -(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\,t)\,a\,(v^{(1)})$, wo $a\,(v) = \dfrac{w\,(v)}{v}$ gesetzt ist. Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}^{(2)} &= \mathfrak{v}_0\,(1 - V\,(t)) + \mathfrak{g}\,(t - G\,(t))\,, \\ V\,(t) &= \int_0^t a\,(v^{(1)})\,dt\,, \qquad G\,(t) = \int_0^t a\,(v^{(1)})\,t\,dt\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Integrale $V\,(t)$ und $G\,(t)$ lassen sich für jeden Anfangszustand $\dot{x}_0$, $\dot{z}_0$ ausrechnen. Denn es ist nach § 14 (40)

$$v^{(1)^2} = \dot{x}_0^2 + (\dot{z}_0 - g\,t)^2\,, \tag{6}$$

$v^{(1)}$ ist also als Funktion der Zeit bekannt.

Die Funktionen $V(t)$ und $G(t)$ lassen sich aber noch nicht in Tabellenform bringen (vgl. die allgemeinen Bemerkungen in § 22, S. 68), denn sie sind außer von dem Argument t nach (6) auch noch von den beiden Parametern $\dot{x}_0$ und $\dot{z}_0$ abhängig. Um $V(t)$ und $G(t)$ tabulierfähig zu machen, führen wir $v^{(1)}$ als neue unabhängige Veränderliche ein. $v^{(1)}$ ist monoton abnehmend mit wachsender Zeit im aufsteigenden Ast der Parabel, monoton zunehmend im absteigenden Ast [vgl. § 14]. Das bringt einige Unbequemlichkeiten mit sich, denen wir aber wie folgt begegnen: Zunächst integrieren wir bis zum Gipfel der Parabel, d. h. bis $t_* = \dot{z}_0/g$:

$$\mathfrak{v}_*^{(2)} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\, t_* + \int_0^{t_*} \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\, t)\, dt = \mathfrak{v}_0 + (\mathfrak{g} + \bar{\mathfrak{w}})\, t_* \,.$$

Hier ist

$$\bar{\mathfrak{w}} = \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \mathfrak{w}\,(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}\, t)\, dt = -\frac{1}{t_*}\,[\mathfrak{v}_0 V(t_*) + \mathfrak{g} G(t_*)]\,,$$

der „mittlere" Widerstand des aufsteigenden Astes. Damit geht (5) über in

$$\mathfrak{v}^{(2)} = \mathfrak{v}_*^{(2)} - \mathfrak{v}_0 \int_{t_*}^{t} a^{(1)}\, dt + \mathfrak{g}\left(t - t_* - \int_{t_*}^{t} a^{(1)}\, t\, dt\right).$$

Aus (6) folgt

$$g\, t = \dot{z}_0 \mp \sqrt{v^{(1)^2} - \dot{x}_0^2}\,, \quad \text{also} \quad g\, dt = \mp \frac{v^{(1)}\, dv^{(1)}}{\sqrt{v^{(1)^2} - \dot{x}_0^2}}\,; \tag{7}$$

das obere Vorzeichen gilt für $t < t_*$, also für den aufsteigenden Ast der Parabel, das untere Vorzeichen für $t > t_*$, also für den absteigenden Ast. Man erhält zunächst

$$\mathfrak{v}^{(2)} = \mathfrak{v}_*^{(2)} \pm \frac{\mathfrak{v}_0}{g} \int_{\dot{x}_0}^{v^{(1)}} \frac{w(v)\, dv}{\sqrt{v^2 - \dot{x}_0^2}} + \mathfrak{g}\left[t - \frac{\dot{z}_0}{g} \pm \frac{1}{g^2} \int_{\dot{x}_0}^{v^{(1)}} \frac{w(v)\, dv}{\sqrt{v^2 - \dot{x}_0^2}} \left(\dot{z}_0 \mp \sqrt{v^2 - \dot{x}_0^2}\right)\right]$$

oder auch, wenn

$$\left.\begin{aligned} R(v^{(1)}, \dot{x}_0) &= \frac{1}{g} \int_{\dot{x}_0}^{v^{(1)}} \frac{w(v)\, dv}{\sqrt{v^2 - \dot{x}_0^2}}\,, \qquad S(v^{(1)}, \dot{x}_0) = \frac{1}{g} \int_{\dot{x}_0}^{v^{(1)}} w(v)\, dv\,, \\ \dot{\mathfrak{x}}_0 &= \mathfrak{v}_0 + \dot{z}_0 \frac{\mathfrak{g}}{g} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

gesetzt wird ($\dot{\mathfrak{x}}_0$ ist die vektorielle Horizontalgeschwindigkeit zu Beginn der Bewegung):

$$\mathfrak{v}^{(2)} = \mathfrak{v}_*^{(2)} + \mathfrak{g}\left(t - \frac{\dot{z}_0}{g}\right) \pm \dot{\mathfrak{x}}_0 R(v^{(1)}, \dot{x}_0) - \frac{\mathfrak{g}}{g} S(v^{(1)}, \dot{x}_0)\,. \tag{9}$$

Für $\mathfrak{v}_*^{(2)}$ ergibt sich hieraus, wenn $t = 0 < t_*$, $v^{(1)} = v_0$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{v}_*^{(2)} = \dot{\mathfrak{x}}_0 \left(1 - R(v_0, \dot{x}_0)\right) + \frac{\mathfrak{g}}{g} S(v_0, \dot{x}_0).$$

Die Funktion $S(v^{(1)})$ hat bereits die gewünschte Form. Tabuliert man z. B. $\int\limits_0^v w(v)\,dv$, so ergibt sich $S(v^{(1)})$ als Differenz der Tafelwerte an den Stellen $v^{(1)}$ und v_0. Es ist dies übrigens dieselbe Tafel, die bei der Orthodromenmethode (§ 24) benutzt wurde. Um in $R(v^{(1)}, \dot{x}_0)$ den Parameter $\dot{x}_0$ aus dem Integranden zu beseitigen, wird $v = \dot{x}_0 u$ gesetzt. Dann ergibt sich zunächst

$$R(v^{(1)}, \dot{x}_0) = \frac{w(\dot{x}_0)}{g} Q(u^{(1)}, \dot{x}_0), \quad Q(u^{(1)}, \dot{x}_0) = \int\limits_1^{u^{(1)}} \frac{w(\dot{x}_0 u)}{w(\dot{x}_0)} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}. \tag{10}$$

Die obere Grenze berechnet sich aus $u^{(1)} = \sec \omega^{(1)} = v^{(1)}/\dot{x}_0$, wo $v^{(1)}(t)$ nach (6) zu bestimmen ist. Der Integrand von Q ist immer dann von $\dot{x}_0$ unabhängig, wenn das Widerstandsgesetz ein B e r n o u l l i sches ist: $w(v) = a v^n$. Dann wird nämlich $\dfrac{w(\dot{x}_0 u)}{w(\dot{x}_0)} = u^n$ und Q kann als Funktion von $u^{(1)}$ tabuliert werden. Im allgemeinen Fall muß man $w(\dot{x}_0 u)$ nach Potenzen von $u - 1$ entwickeln. Es ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} w(\dot{x}_0 u) &= w(\dot{x}_0)\left[1 + n_1(\dot{x}_0)\cdot(u-1) + \tfrac{1}{2} n_2(\dot{x}_0)\cdot(u-1)^2 + \cdots\right], \\ n_1(\dot{x}_0) &= \frac{\dot{x}_0 w'(\dot{x}_0)}{w(\dot{x}_0)}, \qquad n_2(\dot{x}_0) = \frac{\dot{x}_0^2 w''(\dot{x}_0)}{w(\dot{x}_0)}, \quad \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mithin läßt sich Q in eine Summe von tabulierfähigen Funktionen aufspalten:

$$\left.\begin{aligned} Q(u^{(1)}, \dot{x}_0) &= Q_0(u^{(1)}) + n_1(\dot{x}_0) Q_1(u^{(1)}) + \tfrac{1}{2} n_2(\dot{x}_0) Q_2(u^{(1)}) + \cdots, \\ Q_0(u^{(1)}) &= \int\limits_1^{u^{(1)}} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \lg\left(\sec\omega^{(1)} + \operatorname{tg}|\omega^{(1)}|\right), \\ Q_1(u^{(1)}) &= \int\limits_1^{u^{(1)}} \sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\,du, \quad Q_2(u^{(1)}) = \int\limits_1^{u^{(1)}} (u-1)\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\,du, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Man braucht also für den Hodographen die Tafeln $S, Q_0, Q_1, \cdots$. Die Funktionen $Q_1, Q_2, \cdots$ können übrigens auch in geschlossener Form integriert werden, die numerische Integration nach den Methoden des § 23 führt aber meist rascher und auch sicherer zum Ziel. Bei linearem Luftwiderstand ist $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = \cdots = 0$, die Berechnung von

$Q_2, Q_3, \cdots$ erübrigt sich also dann; bei quadratischem Widerstand ist $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = n_4 = \cdots = 0$, hier brauchen also $Q_3, Q_4, \cdots$ nicht berechnet zu werden. Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn im betrachteten Bahnbogen eines dieser Gesetze nahezu gilt. Man wird also im allgemeinen mit wenigen Tafeln auskommen.

Um die Geschoßbahn zu erhalten, muß (9) nochmals über die Zeit integriert werden. Das gibt zunächst

$$\mathfrak{r}^{(2)} = \mathfrak{r}_0 + \left(\mathfrak{v}_*^{(2)} - \frac{\mathfrak{g}}{g}\dot{z}_0\right) t + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}\, t^2 \pm \dot{\mathfrak{x}}_0 \int_0^t R\, dt - \frac{\mathfrak{g}}{g}\int_0^t S\, dt\,. \tag{13}$$

Hier ist

$$\left.\begin{aligned} \int_0^t R\, dt &= \int_0^{t_*} R\, dt + \int_{t_*}^t R\, dt\,,\\ \int_{t_*}^t R\, dt &= \mp \frac{\dot{x}_0\, w(\dot{x}_0)}{g^2} \int_1^{u^{(1)}} Q \frac{u\, du}{\sqrt{u^2-1}} = \mp \frac{\dot{x}_0\, w(\dot{x}_0)}{g^2} P(u^{(1)}, \dot{x}_0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wird Q nach (12) als Summe von Tafelfunktionen geschrieben, so nimmt auch P diese Form an, also

$$P(u^{(1)}, \dot{x}_0) = P_0(u^{(1)}) + n_1(\dot{x}_0)\, P_1(u^{(1)}) + \tfrac{1}{2} n_2(\dot{x}_0)\, P_2(u^{(1)}) + \cdots.$$

Hier bedeutet

$$P_\nu(u^{(1)}) = \int_1^{u^{(1)}} Q_\nu \frac{u\, du}{\sqrt{u^2-1}}\,. \tag{15}$$

Die durch (8) eingeführte Funktion S kann auch in der Form

$$S(v^{(1)}, \dot{x}_0) = \dot{x}_0 \frac{w(\dot{x}_0)}{g} \int_1^{u^{(1)}} \frac{w(\dot{x}_0 u)}{w(\dot{x}_0)}\, du = \dot{x}_0 \frac{w(\dot{x}_0)}{g} T(u^{(1)}, \dot{x}_0) \tag{16}$$

geschrieben werden. Liegt ein Bernoullisches Gesetz vor, so ist T von $\dot{x}_0$ unabhängig. In jedem Fall aber kann T unter Benutzung von (11) entwickelt werden. Es ergibt sich dann

$$T(u^{(1)}, \dot{x}_0) = (u-1) + \tfrac{1}{2} n_1(\dot{x}_0)\cdot(u-1)^2 + \tfrac{1}{6} n_2(\dot{x}_0)\cdot(u-1)^3 + \cdots,$$

also wird

$$\left.\begin{aligned} \int_0^t S\, dt &= \int_0^{t_*} S\, dt + \int_{t_*} S\, dt\,,\\ \int_{t_*}^t S\, dt &= \mp \frac{\dot{x}_0^2\, w(\dot{x}_0)}{g^2} \int_1^{u^{(1)}} T \frac{u\, du}{\sqrt{u^2-1}} = \mp \frac{\dot{x}_0^2\, w(\dot{x}_0)}{g^2} U(u^{(1)}, \dot{x}_0)\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wo

$$U(u^{(1)}, \dot{x}_0) = \int_1^{u^{(1)}} u(u-1)\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} + \tfrac{1}{2} n_1(\dot{x}_0)\int_1^{u^{(1)}} u(u-1)^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} + \cdots$$

oder, nach (12)

$$U(u^{(1)}, \dot{x}_0) = (Q_1+Q_2) + \tfrac{1}{2} n_1(\dot{x}_0)(Q_2+Q_3) + \tfrac{1}{6} n_2(\dot{x}_0)(Q_3+Q_4) + \cdots. \quad (18)$$

Damit ist die Berechnung des Hodographen und der Bahnkurve auf die gewünschte Tafelform zurückgeführt.

Das Geschoß erreicht den Gipfel in der Parabel zur Zeit $t_* = \dot{z}_0/g$, in der Bahn zweiter Näherung zur Zeit t_{**}. Dieser Zeitpunkt bestimmt sich aus der Bedingung, daß die Vertikalgeschwindigkeit $\dot{z}_{**} = 0$ sein muß. Aus (9) folgt also

$$g\,t_{**} - \dot{z}_0 + S(v_0) - S(v_{**}) = 0 \quad (19)$$

oder, da genähert $S(v_{**}) = S(\dot{x}_0) = 0$ ist,

$$t_{**} = t_* - \frac{1}{g} S(v_0) < t_*.$$

Ziele im Mündungshorizont werden in der Parabel zur Zeit $t^0 = 2\,\dot{z}_0/g$, in der Bahn zweiter Näherung zur Zeit t^{00} erreicht. t^{00} bestimmt sich aus der Bedingung, daß die Geschoßhöhe über dem Mündungshorizont Null sein muß. Aus (13) folgt also

$$\dot{z}_0 = \tfrac{1}{2} g\,t^{00} + \frac{1}{t^{00}}\int_0^{t^{00}} [S(v_0) - S(v)]\,dt, \quad (20)$$

oder, wenn im zweiten Summanden der rechten Seite t^{00} genähert durch $t^0 = 2\,t_*$ ersetzt wird,

$$t^{00} = t^0 - \frac{2\,S(v_0)}{g} + \frac{2}{\dot{z}_0}\int_0^{t_*} S(v)\,dt < t^0.$$

Wird die Rechnung mit den zuerst erhaltenen Werten von t_{**} bzw. t^{00} und den genauen Gleichungen (19) bzw. (20) wiederholt, so kann man die Zeiten t_{**}, t^{00} im Rahmen der zweiten Näherungsbahn verbessern.

Die hier abgeleitete zweite Näherungsbahn kann dazu dienen, um eine dritte Näherung $\mathfrak{v}^{(3)}$ durch Wiederholung der Quadratur (2) zu erhalten. Es treten dann zu den für die zweite Näherung erforderlichen Tafeln noch weitere hinzu.

§ 28. Integrable Fälle, besonders der Bernoullische

Da die Widerstandsfunktion $w(v)$ nur empirisch bekannt ist, kann man sie so durch Funktionen approximieren, daß die Hauptgleichung integrabel wird. Dann ist v oder $\dot{x} = v\cos\omega$ als Funktion von ω bekannt; die Quadraturen § 13 (30) lassen sich also allgemein ausführen.

Man kann auch umgekehrt zur integrierten Hauptgleichung das Widerstandsgesetz finden. Wird nämlich die Hauptgleichung § 13 (28), $\frac{d\,(v\cos\omega)}{d\,\omega} = \frac{w\,v}{g}$, integriert durch $\sin\omega = G\,(v)$, so ergibt sich $G\,(v)\,\frac{d\,v}{d\,\omega} = \cos\omega$. Die integrierte Hauptgleichung liefert also das Widerstandsgesetz:

$$\frac{w}{g} = -G\,(v) + \frac{1 - G^2\,(v)}{v\,G'\,(v)}\,.$$

Der einzige integrable Fall von praktischer Bedeutung ist der des d'Alembertschen Gesetzes*):

$$\frac{w}{g} = a + b\,(v)\,, \qquad \text{mit } b\,(v) = b\cdot v^n\,. \tag{21}$$

Der wird am einfachsten wie folgt behandelt. Es sei

$$\dot{x} = \varkappa\,(\sigma)\cdot\lambda\,(\sigma)\,, \qquad \sigma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right). \tag{22}$$

Logarithmische Differentiation nach t ergibt

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa} + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\dot{\sigma}\,.$$

Aus der Hauptgleichung § 13 (28) folgt

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{w}{g}\,\frac{\dot{\omega}}{\cos\omega} = \frac{w}{g}\,\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\,,$$

also wird

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa} + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\sigma\,. \tag{23}$$

Die Gleichungen (21) und (23) werden erfüllt durch

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{a}{\sigma} \qquad \text{und} \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{b\,(v)}{\sigma}\,,$$

integrabel für $b\,(v) = b\cdot v^n$:

$$\varkappa = \varkappa_0\,\sigma^a\,, \qquad \lambda^{-n} = 1 - \frac{b\,n}{2^n}\,\varkappa_0^n\,\Omega_{\sigma_0}^{\sigma}\,,$$

wo

$$\Omega_{\sigma_0}^{\sigma} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} (1 + \sigma^2)^n\,\sigma^{n\,a - n - 1}\,d\,\sigma\,.$$

---

*) Der andere d'Alembertsche Fall $w\,(v) = a + b\lg v$ ergibt sich als Grenzfall, da $\lg v = \lim\limits_{n\to} \frac{1}{n}\,(v^n - 1)$ ist.

Wir führen $\sigma_{-\infty}$ ein durch

$$0 = 1 - \frac{b\,n}{2^n}\,\dot{x}_0^n\,\Omega_{\sigma_0}^{\sigma_{-\infty}}\,. \tag{24}$$

Rückt $\sigma \to \sigma_{-\infty}$, so geht $\dot{x} \to \infty$. Mithin bestimmt

$$\sigma_{-\infty} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_{-\infty}}{2}\right) \tag{25}$$

die Neigung $\omega_{-\infty}$ der Asymptote des virtuellen Astes der Geschoßbahn. Beim d'Alembertschen Widerstandsgesetz kann also die Asymptotenrichtung $\omega_{-\infty}$ nach (25) berechnet werden, sobald die Anfangsgeschwindigkeit nach Größe und Richtung (bzw. $\dot{x}_0$ und σ_0) bekannt ist. Das binomische Integral (24) ist ersichtlich integrabel für n positiv ganz und für $\frac{1}{2}\,n\,(a \pm 1)$ ganz. Die integrierte Hauptgleichung ist

$$\dot{x} = \frac{2\,\sigma^a}{\left[b\,n\,\Omega_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}}\right]^{1/n}}\,. \tag{26}$$

Die Geschwindigkeit $\dot{x}$ hängt also jetzt nicht mehr von den beiden, den Anfangszustand kennzeichnenden Parametern $\dot{x}_0$, ω_0, sondern nur noch von $\sigma_{-\infty}$ ab. Für die Elemente der Geschoßbahn erhält man aus § 13 (30):

$$\left.\begin{aligned} g\,t &= \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)\,\sigma^{a-2}\,d\sigma}{\left[b\,n\,\Omega_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}}\right]^{1/n}}\,, & g\,s &= \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)^2\,\sigma^{2a-3}\,d\sigma}{\left[b\,n\,\Omega_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}}\right]^{2/n}}\,, \\ g\,x &= 2\int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)\,\sigma^{2a-2}\,d\sigma}{\left[b\,n\,\Omega_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}}\right]^{2/n}}\,, & g\,z &= \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^4-1)\,\sigma^{2a-3}\,d\sigma}{\left[b\,n\,\Omega_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}}\right]^{2/n}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Das Widerstandsgesetz (21) ist von Bedeutung insofern, als Poncelet es für das Eindringen des Geschosses in feste Stoffe aufgestellt und Didion es durch Versuche gut bestätigt gefunden hat. Für den besonders wichtigen Fall des Bernoullischen Gesetzes $w/g = b\,v^n$ hat man $a = 0$. Wir betrachten die Schar der Bahnen mit demselben σ_0 und $\sigma_{-\infty}$, d. h. alle Bahnen der Schar sollen dieselbe Asymptotenrichtung im virtuellen Ast und dieselbe Anfangserhöhung haben. Nach (24) muß dann in der Schar $b\,\dot{x}_0^n = C = \text{const}$ sein. Die Geschoßbahnelemente können also auch in der Form geschrieben werden

$$\dot{x} = \dot{x}_0\,\frac{2}{(C\Omega)^{1/n}}\,, \quad \dot{z} = \dot{x}_0\,\frac{\sigma^2-1}{\sigma}\,\frac{1}{(C\Omega)^{1/n}}\,, \quad v = \dot{x}_0\,\frac{\sigma^2+1}{\sigma}\,\frac{1}{(C\Omega)^{1/n}}\,. \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} g\,t &= \dot{x}_0 \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)\,\sigma^{-2}\,d\sigma}{(C\Omega)^{1/n}}\,, & g\,s &= \dot{x}_0^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)^2\,\sigma^{-3}\,d\sigma}{(C\Omega)^{2/n}}\,, \\ g\,x &= 2\,\dot{x}_0^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^2+1)\,\sigma^{-2}\,d\sigma}{(C\Omega)^{2/n}}\,, & g\,z &= \dot{x}_0^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{(\sigma^4-1)\,\sigma^{-3}\,d\sigma}{(C\Omega)^{2/n}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Zu demselben ω_0 gehört also, mit $\dot{x}_0$ als Parameter, eine Schar von ähnlichen Geschoßbahnen. Vergleichen wir die Geschoßbahnelemente, die zu gleichem ω gehören, so stehen bei zwei Bahnen einer Schar entsprechende Abszissen und Ordinaten in quadratischem Verhältnis entsprechender Zeiten, und entsprechende Geschwindigkeiten oder Geschwindigkeitskomponenten in demselben Verhältnis wie die entsprechenden Zeiten. Diese Ähnlichkeitssätze sind für die tabellarische oder graphische Darstellung der Geschoßbahnen wesentlich, da man von jeder solchen Schar nur einen Repräsentanten darzustellen braucht. Man braucht also nur eine einfache Schar, mit ω_0 als Parameter, zu rechnen.

Für den Fall $n = 2$, wo

$$\Omega = \int_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}} \frac{(1+\sigma^2)^2}{\sigma^3}\, d\sigma = 2\left[\operatorname{tg}\omega \cdot \sec\omega + \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right]_{\omega}^{\omega_{-\infty}}$$

ist, hat das Euler hervorgehoben und Otto danach Tabellen berechnet. Dabei berechnet man, weil für jedes ω_0 die Gipfel entsprechende Punkte sind, die Werte der Integrale vom Gipfel aus für den aufsteigenden und den absteigenden Ast besonders. Ebenso hat Bashfort für den Fall $n = 3$, wo

$$\Omega = \int_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}} \frac{(1+\sigma^2)^3}{\sigma^4}\, d\sigma = \frac{8}{3}\left[3\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}^3\omega\right]_{\omega}^{\omega_{-\infty}}$$

ist und Sabudski für den Fall $n = 4$, wo

$$\Omega = \int_{\sigma}^{\sigma_{-\infty}} \frac{(1+\sigma^2)^4}{\sigma^5}\, d\sigma$$

$$= \left[4\operatorname{tg}\omega \cdot \sec^3\omega + 6\left(\operatorname{tg}\omega \cdot \sec\omega + \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right)\right]_{\omega}^{\omega_{-\infty}}$$

ist, Tabellen gerechnet.

Die Formeln (29) sind natürlich etwas einfacher direkt herzuleiten*). Die Formeln für x und z gab im wesentlichen schon Joh. Bernoulli (Opera II, S. 393 und 513); er erwähnt, daß der Fall $n = 2$ ebenso von Hermann und Patavini gelöst ist. Von dieser Lösung Bernoullis muß man den Anfang der Ballistik (Lehre vom Schuß im widerstehenden Mittel) datieren.

§ 29. Ermittlung der Bahnkurve

Die Hauptgleichung sei in der Form $\sin\omega = G(v)$ integriert; hieraus folgt durch Umkehrung $v = G^{-1}(\sin\omega)$, wo G^{-1} die zu G inverse Funktion bezeichnet. Es bleiben dann noch die Quadraturen § 13 (30) zu berechnen.

---

*) Siehe z. B. des Verfassers Beiträge zur Ballistik I. Arch. Math. Phys. (3) **25** (**1917**), S. 209—231.

Das kann mechanisch (vgl. die Bemerkung in § 13) oder nach einer der numerischen Methoden in § 23 erfolgen. Für eine genäherte Auswertung reicht auch oft eines der folgenden Verfahren aus. Nach § 11 (17) hängen Bogenlänge s und Tangentenerhöhung ω zusammen durch die Beziehung

$$s = \int_{\omega}^{\omega_0} \frac{v^2 \sec \omega}{g} \, d\omega = \int_{\omega}^{\omega_0} \frac{[G^{-1}(\sin \omega)]^2}{g \cos \omega} \, d\omega \,. \tag{30}$$

Zu jedem ω und $\omega + \varDelta\omega$ in zwei Bahnpunkten findet man danach den dazwischenliegenden Bogenteil $\varDelta s$. Nach dem Mittelwertsatz ist nämlich

$$\varDelta s = -\frac{[G^{-1}(\sin \omega_1)]^2}{g \cos \omega_1} \varDelta\omega \,,$$

wo ω_1 ein geeigneter Zwischenwert zwischen ω und $\omega + \varDelta\omega$ ist. Ist $\varDelta\omega$ klein, so kann auch genähert $\omega_1 = \omega$ gewählt werden. Aus

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega \,, \qquad \frac{dz}{ds} = \sin \omega \,, \qquad \frac{ds}{dt} = v \,,$$

folgt ebenso

$$\varDelta x = \cos \omega_2 \cdot \varDelta s \,, \quad \varDelta z = \sin \omega_3 \cdot \varDelta s \,, \quad \varDelta t = \frac{\varDelta s}{v_4} = \frac{\varDelta s}{G^{-1}(\sin \omega_4)} \,. \tag{31}$$

E u l e r wählt genähert $\omega_2 = \omega_3 = \omega + \frac{1}{2}\varDelta\omega$. Dabei sind die Bogen $\varDelta s$ so klein angenommen, daß man sie genau genug als geradlinig ansehen kann. Wählt man sie größer, so ist es besser, den Bahnbogen durch einen Kreisbogen derselben Gesamtkrümmung $\varDelta\omega$ zu approximieren (L e g e n d r e). Durch Multiplikation mit $\dfrac{\sin \frac{1}{2}\varDelta\omega}{\frac{1}{2}\varDelta\omega}$ wird dieser Kreisbogen auf seine Sehne zurückgeführt. Man erhält so die L e g e n d r e schen Näherungswerte, indem man $\varDelta s$ ersetzt durch $\varDelta s \cdot \dfrac{\sin \frac{1}{2}\varDelta\omega}{\frac{1}{2}\varDelta\omega}$. Noch genauer wird die Darstellung, wenn man den Bahnbogen durch einen Parabelbogen approximiert, der dieselbe Anfangs- und Endneigung hat wie der gegebene Geschoßbahnbogen (D i d i o n). Die Gesamtkrümmung $\varDelta\omega$ ist also wieder dieselbe wie in der Geschoßbahn. Aus § 13 (30) folgt, bei Anwendung des Mittelwertsatzes,

$$\begin{aligned} g\varDelta x &= \dot{x}_1^2 \int d \operatorname{tg} \omega = \dot{x}_1^2 \cdot \varDelta \operatorname{tg} \omega \,, \\ g\varDelta z &= \dot{x}_2^2 \int \operatorname{tg} \omega \cdot d \operatorname{tg} \omega = \tfrac{1}{2} \dot{x}_2^2 \cdot \varDelta \operatorname{tg}^2 \omega \,, \\ g\varDelta s &= \dot{x}_3^2 \int \sec \omega \cdot d \operatorname{tg} \omega = \tfrac{1}{2} \dot{x}_3^2 \left[\operatorname{tg} \omega \cdot \sec \omega + \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) \right]_{\omega}^{\omega + \varDelta\omega} \\ &= \tfrac{1}{2} \dot{x}_3^2 \cdot \varDelta\Omega \,. \end{aligned}$$

Hier sind $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ Mittelwerte, die sich um so weniger von $\dot{x}_0$ unterscheiden, je kleiner w/g ist. Setzt man genähert $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_0$, so ergeben sich die Didionschen Näherungswerte

$$\Delta x = \frac{\Delta \operatorname{tg} \omega}{\frac{1}{2}\Delta \Omega} \cdot \Delta s\,, \qquad \Delta z = \frac{\Delta \operatorname{tg}^2 \omega}{\Delta \Omega} \cdot \Delta s\,, \qquad \tfrac{1}{2}\,\Omega'(\omega) = \sec^3 \omega\,. \tag{32}$$

Die Teilung in Bogen Δs erfolgt bei Euler so, daß dieselben gleiche Gesamtkrümmung $\Delta \omega$ haben. Bei Anwendung der Didionschen Verhältnisse würde die Teilung am besten so erfolgen, daß die horizontale Geschwindigkeitsabnahme auf allen Teilbogen gleich klein ist.

Zum Vergleich der Genauigkeit muß man die Entwicklung des Legendreschen Verhältnisses

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega}{\frac{1}{2}\Delta\omega} = 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^4 - + \cdots$$

vergleichen mit den Entwicklungen der Didionschen Verhältnisse. Für diese ergibt die Rechnung

$$\frac{\Delta \operatorname{tg}\omega}{\frac{1}{2}\Delta\Omega\cdot\cos\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)} = 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 (6\sec^2\omega - 5) + \cdots\,,$$

$$\frac{\Delta \operatorname{tg}^2\omega}{\Delta\Omega\cdot\sin\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)} = 1 + \frac{5}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \cdots\,.$$

Es verhält sich also bei kleinem $\Delta\omega$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_E : \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_L : \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_D = 1 : 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 : 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 (6\sec^2\omega - 5)\,,$$

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_E : \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_L : \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_D = 1 : 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 : 1 + \frac{5}{6}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2.$$

Für die Abszissen folgt daraus: Das Legendresche Verhältnis kommt dem Didionschen stets näher als das Eulersche, und zwar um so besser, je kleiner ω ist. Für die Ordinaten folgt: Das Eulersche Verhältnis kommt dem Didionschen stets näher als das Legendresche; die Abweichungen verhalten sich bei Berücksichtigung der Glieder der 2. Ordnung wie

$$(E - D) : (L - D) = 5 : 6\,.$$

Diese Sätze hatte Didion an Zahlenbeispielen bemerkt (Balistique, S. 161—162). Die Didionschen Verhältnisse kommen den wahren für kleine w/g beliebig nahe, eine Eigenschaft, die den Eulerschen und Legendreschen fehlt, die man aber verlangen muß.

§ 30. Die natürliche Gleichung für $n = 2$

Ist für ein Widerstandsgesetz die Hauptgleichung integrabel, so kann es noch außerdem eintreten, daß auch eine der Quadraturen § 13 (30) in geschlossener Form ausgeführt werden kann. Gilt dies z. B. für die Bogenlänge s, so erhält man die Gleichung der Geschoßbahn in den „natürlichen" Koordinaten s und ω. Das ist, wie Euler bemerkt, für das Newtonsche Gesetz $w/g = a\,v^2$ der Fall. Nach § 13 (28) ist in diesem Fall

$$\int\limits_{\infty}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^3} = a \int\limits_{\omega_{-\infty}}^{\omega} \sec^3 \omega\, d\omega\,, \qquad \text{also} \qquad \dot{x}^2 = -\frac{1}{2\,a \int\limits_{\omega_{-\infty}}^{\omega} \sec^3 \omega\, d\omega} = \frac{1}{a\,\Omega}\,.$$

Ω ist die in § 28 (24) eingeführte Funktion. $\omega_{-\infty}$ ist wiederum die Erhöhung der Asymptote des virtuellen Bahnbogens. Aus § 11 (17) folgt

$$g\,s = \int\limits_{\omega}^{\omega_0} \dot{x}^2 \sec^3 \omega\, d\omega = \frac{1}{a} \int\limits_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{1}{a} \lg \frac{\Omega}{\Omega_0}\,, \tag{33}$$

oder auch

$$\Omega = \left[\operatorname{tg} \omega \cdot \sec \omega + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right]_{\omega}^{\omega_{-\infty}} = \Omega_0\, e^{a g s}\,. \tag{34}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten x, z drückt man durch die natürlichen s, ω vermittelst der Integrale aus:

$$x = \int \cos \omega\, ds\,, \qquad z = \int \sin \omega\, ds\,.$$

Man kann sie, wie in § 29 geschehen, durch Summen auswerten

$$x = \sum \cos\left(\omega + \tfrac{1}{2}\,\varDelta\,\omega\right) \cdot \varDelta s\,, \qquad z = \sum \sin\left(\omega + \tfrac{1}{2}\,\varDelta\,\omega\right) \cdot \varDelta s$$

oder, wie folgt, in Reihen entwickeln. Zunächst ergibt der Taylorsche Satz, wenn ω als Funktion von Ω aufgefaßt wird:

$$\cos \omega = \cos \omega_0 + \alpha_1 (\Omega - \Omega_0) + \tfrac{1}{2}\,\alpha_2 (\Omega - \Omega_0)^2 + \cdots\,,$$
$$\sin \omega = \sin \omega_0 + \beta_1 (\Omega - \Omega_0) + \tfrac{1}{2}\,\beta_2 (\Omega - \Omega_0)^2 + \cdots\,,$$

wo

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\Omega'} \frac{d \cos \omega}{d\omega}\right)_0, \qquad \alpha_2 = \left[\frac{1}{\Omega'} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\Omega'} \frac{d \cos \omega}{d\omega}\right)\right]_0, \quad \cdots\,,$$
$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\Omega'} \frac{d \sin \omega}{d\omega}\right)_0, \qquad \beta_2 = \left[\frac{1}{\Omega'} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\Omega'} \frac{d \sin \omega}{d\omega}\right)\right]_0, \quad \cdots\,.$$

Dabei ist Ω aus (33) bestimmt zu

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = -a\,\dot{x}^2 \sec^3 \omega = -a\,[G^{-1}(\sin \omega)]^2 \sec \omega\,,$$

also

$$\Omega = \Omega_0\, e^{-a \int\limits_{\omega_0}^{\omega} [G^{-1}(\sin \omega)]^2 \sec \omega\, d\omega}\,.$$

Kann man, wie im Falle $n = 2$, Ω mit Hilfe von (34) durch s ausdrücken, so erhält man die Reihen

$$\left.\begin{aligned} x &= s\cos\omega_0 + \alpha_1\,\Omega_0\int\limits_0^s (e^{a g s} - 1)\,ds + \cdots\,, \\ z &= s\sin\omega_0 + \beta_1\,\Omega_0\int\limits_0^s (e^{a g s} - 1)\,ds + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Um auch t durch s auszudrücken, gehen wir von der Gleichung aus:

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}} = \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_0}} = e^{1/2\,a g s}\,,$$

d. h. die Horizontalgeschwindigkeiten in äquidistanten Bahnpunkten bilden eine fallende geometrische Reihe. Dies ergibt

$$\dot{x}_0\,dt = e^{1/2\,a g s}\cos\omega\cdot ds\,,$$

also

$$\dot{x}_0\,t = \frac{2}{a g}\,(e^{1/2\,a g s} - 1)\cos\omega_0 + \alpha_1\,\Omega_0\int\limits_0^s e^{1/2\,a g s}\,(e^{a g s} - 1)\,ds + \cdots\,. \tag{36}$$

Alle Integrationen in diesen Reihen sind ausführbar. Diese Reihen teilt Didion (Balistique, S. 174) aus einer unveröffentlichten Arbeit von Français ohne Beweis mit. Über ihre Konvergenz ist nichts bekannt.

Siebentes Kapitel

Die zweite Klasse von Lösungen

§ 31. Allgemeine Gesichtspunkte

Die Geschoßbahnen der zweiten Klasse haben als Grenzfall, wie in § 13 gezeigt wurde, den schwerefreien Schuß (§ 15). Wird $g/w \doteq 0$ vorausgesetzt, so wird sich die Geschoßbewegung um so weniger von der in § 15 behandelten unterscheiden, je kleiner g/w ist. Es liegt daher nahe, die Gleichungen § 13 (32), (33), (34) so umzuformen, daß in erster Näherung die in § 15 abgeleiteten Gleichungen (45) gelten. Siacci führt an Stelle von $\dot{x}$ als neue Variable die „Pseudogeschwindigkeit" u ein durch

$$\dot{x}\sec\omega_m = u\,. \tag{1}$$

u ist wie $\dot{x}$ monoton abnehmend, unterscheidet sich also in dieser Beziehung von der wahren Geschwindigkeit v, die im allgemeinen zunächst ab- und dann wieder zunimmt. ω_m ist eine geeignet zu wählende „mittlere Erhöhung". Im Grenzfall der schwerefreien Bewegung wird man $\omega_m = \omega_0$ wählen; in diesem Fall geht also u in die Geschoßgeschwindigkeit v über. Weiter soll gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} v &= u\,\lambda\,, \qquad \lambda = \frac{\cos\omega_m}{\cos\omega}\,, \\ w(v) &= w(u\,\lambda) = B(u,\lambda)\,w(u)\,\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

An die Stelle der Variablen $\dot{x}$, ω sind also u, λ getreten. Im Grenzfall $g/w = 0$ ist $\lambda = 1$ zu wählen. Bei kleinem g/w kann man also erreichen, daß sich λ nur wenig von 1 unterscheidet, vorausgesetzt, daß die Gesamtkrümmung des betrachteten Bahnbogens, $\omega_0 - \omega$, einen gewissen Betrag nicht überschreitet. Der Faktor $B(u, \lambda)$, durch den $w(u\lambda)$ in $w(u)\lambda$ übergeführt wird, hat für $\lambda = 1$, also im Grenzfall $g/w = 0$ den Wert 1. Im allgemeinen ist er von u und λ abhängig.

$\lambda B(u, \lambda)$ läßt sich nach Potenzen von $\lambda - 1$ entwickeln. Zunächst ist

$$w(u\lambda) = w(u) + \frac{\lambda - 1}{1!} u\, w'(u) + \frac{(\lambda - 1)^2}{2!} u^2 w''(u) + \cdots .$$

Hier bedeutet

$$w^{(\varkappa)}(u) = \left(\frac{d^\varkappa w}{d(u\lambda)^\varkappa}\right)_{\lambda=1} = \left(\frac{d^\varkappa w}{d v^\varkappa}\right)_{v=u}.$$

Also ist

$$\lambda B(u, \lambda) = 1 + n_1(u)(\lambda - 1) + \tfrac{1}{2} n_2(u)(\lambda - 1)^2 + \cdots ,$$

wo

$$n_1(u) = \frac{u\, w'(u)}{w(u)}, \qquad n_2(u) = \frac{u^2 w''(u)}{w(u)}, \qquad \cdots .$$

Im folgenden wird vor allem die Funktion $1/B$ gebraucht. Hierfür ergibt sich die Reihenentwicklung

$$1/B(u, \lambda) = 1 + \mu_1(\lambda - 1) + \tfrac{1}{2}\mu_2(\lambda - 1)^2 + \cdots , \tag{3}$$

wo

$$\mu_1 = 1 - n_1 , \qquad \tfrac{1}{2}\mu_2 = -\tfrac{1}{2} n_2 + n_1^2 - n_1 , \quad \cdots .$$

Hat der Luftwiderstand die Form eines Bernoullischen Potenzgesetzes,

$$w(v) = w(u\lambda) = a_n \cdot (u\lambda)^n \qquad (n = \text{beliebige positive Zahl}),$$

so wird die $\varkappa$-te Ableitung

$$w^{(\varkappa)}(u\lambda)_{\lambda=1} = a_n\, n(n - 1) \cdots (n \quad \varkappa + 1)\, u^{n-\varkappa}.$$

Man erhält in diesem Fall die binomische Reihe

$$\lambda B(u, \lambda) = 1 + \binom{n}{1}(\lambda - 1) + \binom{n}{2}(\lambda - 1)^2 + \cdots = \lambda^n ; \tag{4}$$

$B(u, \lambda) = \lambda^{n-1}$ enthält jetzt nur λ als Veränderliche oder, anders ausgedrückt, B hängt jetzt nur von ω, aber nicht von $\dot{x}$ ab.

Setzt man in den Gleichungen § 13 (32), (33), (34) für die Horizontalbeschleunigung unter Benutzung von (1) und (2)

$$-\ddot{x} = w(v)\cos\omega = w(u\lambda)\frac{\cos w_m}{\lambda} = B(u, \lambda)\, w(u)\cos\omega_m , \tag{5}$$

so ergeben sich die neuen Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= g \sec\omega_m \int\limits_u^{u_0} \frac{1}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{du}{u\,w(u)}, \\
t &= \int\limits_u^{u_0} \frac{1}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{du}{w(u)}, \\
s &= \int\limits_u^{u_0} \frac{\lambda}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{u\,du}{w(u)}, \\
x \sec\omega_m &= \int\limits_u^{u_0} \frac{1}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{u\,du}{w(u)}, \\
x \operatorname{tg}\omega_0 - z &= g \int\limits_u^{u_0}\int\limits_u^{u_0} \frac{1}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{du}{u\,w(u)} \cdot \frac{1}{B(u,\lambda)} \cdot \frac{u\,du}{w(u)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die erste dieser Gleichungen, die Hauptgleichung, kann dazu dienen, ω als Funktion von u darzustellen. Damit wäre dann auch $\lambda = \lambda(u)$ bekannt, so daß die übrigen Integrale sich ausrechnen lassen. Um formal den Anschluß an die Gleichungen des Grenzfalles $g/w = 0$ zu gewinnen, wenden wir den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung an (dies ist in jeder der fünf Formeln möglich, weil u und $w(u)$ ihr Vorzeichen im Integrationsgebiet nicht wechseln). Danach gibt es für jedes Integrationsgebiet u, u_0 einen Wert B, gelegen zwischen dem kleinsten und größten Wert der Funktion $B(u, \lambda)$, so daß statt (6) geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= \frac{\sec\omega_m}{B_1(u)}[J(u) - J(u_0)], & J(u) &= g\int^u \frac{du}{u\,w(u)}, \\
t &= \frac{1}{B_2(u)}[T(u) - T(u_0)], & T(u) &= \int^u \frac{du}{w(u)}, \\
s &= \frac{\lambda_3}{B_3(u)}[D(u) - D(u_0)], & D(u) &= \int^u \frac{u\,du}{w(u)}, \\
x \sec\omega_m &= \frac{1}{B_4(u)}[D(u) - D(u_0)], \\
x \operatorname{tg}\omega_0 - z &= \frac{1}{B_5^2(u)}\,[A(u) - A(u_0) - J(u_0)\{D(u) - D(u_0)\}], \\
& & A(u) &= \int^u J(u)\,\frac{u\,du}{w(u)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Diese Formeln sollen als die verallgemeinerten Siaccischen Formeln, die Funktionen J, T, D, A als die Siaccischen Funktionen bezeichnet werden. Die zweite und dritte Formel unterscheidet sich jetzt von den entsprechenden Formeln des schwerefreien Grenzfalls [§ 15 (45)] nur durch die Faktoren, die mit $g/w \to 0$ nach 1 streben. Die Faktoren B_1, B_2, ... sind von Formel zu Formel verschieden, außerdem sind sie Funktionen der Integrationsgrenze. Über die genaue Größe der Faktoren gibt der Mittelwertsatz keine Auskunft. Die Formeln (7) haben also nur formale Bedeutung.

Man kann aber aus den Formeln (7) Näherungswerte für die Bahn ableiten. Einige Autoren, so z. B. Siacci, Vallier u. a. haben die Funktionen $B_2(u)$, $B_3(u)$, $\cdots$ durch Konstante ersetzt, die in einem gewissen Bereich (u, u_0) mehr oder weniger gut die Geschoßbahn darstellen. Gegen diese Methode ist nichts einzuwenden, wenn man sich über die Fehlergrenzen klar ist. Bedenklicher ist es schon, alle Konstanten gleich groß zu wählen. Eine andere Methode besteht darin, bei den Faktoren B_2, B_3, $\cdots$ näherungsweise die Abhängigkeit von u zu berücksichtigen. Die erstgenannten Methoden werden darauf ausgehen, gewisse Stellen der Bahn möglichst gut darzustellen. Bei den zuletzt genannten Methoden hat man die Möglichkeit, die Näherungsbahn in ihrem ganzen Verlauf der wahren Bahn anzupassen. Die zunächst frei verfügbare mittlere Erhöhung ω_m wird man so wählen, daß die aus (7) entstehenden Näherungsformeln in einem bestimmten Sinne möglichst genau werden. Das ist bei den zahlreichen Versuchen, die Formeln (7) zu vereinfachen, nicht immer beachtet worden. Vielmehr wird sehr oft ω_m nach äußerlichen und willkürlichen Gesichtspunkten gewählt.

Wahl von ω_m. Für gestreckte aufsteigende Äste ist die Annahme $\omega_m = \omega_0$ (Siacci), für flache Bogen, die den Gipfel enthalten, die Annahme $\omega_m = 0$ (Krupp) brauchbar. Manche Autoren nahmen für $\sec \omega_m$ ein Mittel aus den Werten von $\sec \omega$ am Anfangspunkt und am Gipfel. Didion bestimmt $\sec \omega_m$ als das Verhältnis eines Parabelbogens zu seiner Horizontalprojektion, der die gleiche Anfangs- und Enderhöhung hat wie der betrachtete Geschoßbahnbogen. Nach § 13 (30) ist

$$g\,s = \int_p^{p_0} \dot{x}^2 \sec \omega \, dp\,, \qquad g\,x = \int_p^{p_0} \dot{x}^2 \, dp\,, \qquad p = \operatorname{tg} \omega\,,$$

wo in der widerstandsfreien Parabel $\dot{x} = \dot{x}_0$ zu setzen ist; also bestimmt sich bei Didion $\sec \omega_m$ aus

$$s : x = \int_p^{p_0} \sec \omega \, dp : \int_p^{p_0} dp = \sec \omega_m\,,$$

oder, was dasselbe ist, aus dem Verschwinden der Fehlersumme:

$$\int_\omega^{\omega_0} (\sec \omega - \sec \omega_m)\, d \operatorname{tg} \omega = 0\,. \tag{8}$$

Man kann zwar erreichen, daß Geschoßbahnbogen und Parabelbogen zwischen ω_0 und ω dieselbe Horizontalprojektion x oder dieselbe Bogenlänge s haben, beides kann aber nicht gleichzeitig gefordert werden. Ebensowenig gibt es eine Wurfparabel, die im Anfangs- und Endpunkt den Bahnbogen berührt [vgl. § 14]. Die Bemerkung von Siacci*): „Cet arc parabolique diffère fort peu de l'arc véritable" ist also falsch. Didion**) nennt übrigens fälschlicherweise den Vergleichsbogen „un arc parabole osculatrice à l'une des extrémités". Sollen Anfangs- und Endpunkt des Bogens, sowie Anfangs- und Enderhöhung in der wahren Bahn und der Näherungsparabel übereinstimmen, so muß nach § 14 z. B. eine Parabel mit schräger Achse zugrunde gelegt werden. Für jede Näherungsbahn dieser Art ist

$$g\, s = \int \dot{x}^2 \sec \omega \, d \operatorname{tg} \omega = \sec \omega_m \int \dot{x}^2 \, d \operatorname{tg} \omega = g\, x \sec \omega_m .$$

Man müßte also dann die Fehlerbedingungen

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \dot{x}^2 (\sec \omega - \sec \omega_m) \, d \operatorname{tg} \omega = 0 \tag{9}$$

der Bestimmung von ω_m zugrunde legen.

Wahl von B. Wählt man $\omega_m = \omega_0$ und $B = 1$, so ist die Beziehung zwischen $\ddot{x}$ und $\dot{x}$ in einem Bahnpunkt um so genauer richtig, je näher er dem Bahnanfang ist. Die aus den Formeln entstehenden Näherungsbahnen „oskulieren" die wahre Geschoßbahn im Anfangspunkte. Wählt man $B \neq 1$, so hört die Näherung auf, eine oskulierende zu sein, sie wird „interpolierend". Sie hat dann nicht mehr die Eigenschaft um so genauer zu sein, je kleiner der Bogen ist, aber sie kann bei zweckmäßiger Wahl von B auch noch bei größeren Bogen eine leidliche Annäherung geben***). Borda nahm $\ddot{x} = -c\, \dot{x}^2 \sec \omega_0$ oder, was dasselbe ist, $\ddot{x} \sec \omega_0 = -c\, (\dot{x} \sec \omega_0)^2$. Sein Verfahren ist also sowohl zu den oskulierenden mit $\omega_m = \omega_0$, $B = 1$ als zu den interpolierenden mit $\omega_m = 0$, $B = \sec \omega_0$ zu rechnen. Bei Siacci steht $\beta \cos \omega_0$ statt B. Durch unsere Einführung von B an Stelle von $\beta \cos \omega_0$ werden aber alle hierauf bezüglichen Formeln anschaulicher und übersichtlicher. Von 1 verschiedene Werte von B kommen vor in Verbindung mit der Annahme $\omega_m = \omega_0$ (Siacci), mit der Kruppschen Annahme $\omega_m = 0$ (Charbonnier), mit der Didionschen (Takeda).

Bei der Wahl von ω_m und B muß vor allem auch beachtet werden, daß die Zwischenwerte in (7) verschieden sind, je nach dem Bahnelement, das bestimmt werden soll. Ein Wertepaar ω_m, B, das die Schußweite genau liefert, kann im allgemeinen nicht auch die Schußzeit genau darstellen.

---

*) Balistique, Paris 1892, S. 56.

**) Balistique, Paris 1848, S. 160.

***) Über oskulierende und interpolierende Näherungen vgl. des Verfassers Buch: Konstruktionen und Approximationen, Leipzig 1913, S. 192.

§ 32. Verfahren von Siacci und Vallier

Wir wählen jetzt mit Siacci $\omega_m = \omega_0$, setzen also $u = \dot{x} \sec \omega_0$. Bezeichnen wir den Siaccischen Mittelwert von B mit $\overline{B}$, so soll $\overline{B}$ durch die Forderung bestimmt werden, daß die Fehlersumme

$$\int [B(v, \omega) - \overline{B}]\, G(\operatorname{tg} \omega)\, d \operatorname{tg} \omega = 0 \tag{10}$$

ist. Um diesen Ansatz zu verwerten, wählen wir das „Gewicht" zu $G = (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_0)^2$, damit die Fehler entfernt vom Anfangspunkte um so mehr ins Gewicht fallen*). Ferner wählen wir die Grenzen des Integrals gleich ω_0 und $-\omega^0$, so daß es sich über die „ganze" Bahn erstreckt. Schließlich setzen wir für v einen konstanten Wert v_1, weil B nach (4) nur von λ abhängt, wenn man $w(v)$ durch ein Bernoullisches Potenzgesetz approximiert. Für v_1 nehmen wir diejenige Anfangsgeschwindigkeit, die im leeren Raum mit der Erhöhung ω_0 die gleiche Schußweite x^0 ergibt, also $v_1^2 = g\, x^0 / \sin 2\omega_0$ [§ 14 (42)]. Dadurch wird, wenn nach (2)

$$B(v, \omega) = \frac{w(v)}{w(u)\,\lambda} = \frac{w(v)}{w\left(v \dfrac{\cos \omega}{\cos \omega_0}\right)} \, \frac{\cos \omega_0}{\cos \omega}$$

gesetzt wird,

$$\overline{B} \int_{\omega_0}^{\omega^0} G(\operatorname{tg} \omega)\, d \operatorname{tg} \omega = \int_{\omega_0}^{\omega^0} \frac{w(v_1) \dfrac{\cos \omega}{\cos \omega_0}}{w\left(v_1 \dfrac{\cos \omega}{\cos \omega_0}\right)}\, G(\operatorname{tg} \omega)\, d \operatorname{tg} \omega\,.$$

Nimmt man noch in erster Näherung $\omega^0 = -\omega_0$, so wird $\overline{B}$ eine bloße Funktion von ω_0 und x^0, kann also in einer Tabelle mit doppeltem Eingang dargestellt werden.

Zur Beurteilung dieses Siaccischen Verfahrens beschränken wir uns auf kleine Bogen, für welche die Annahme berechtigt ist, daß B von v unabhängig ist; d. h. für v und für das zugehörige u soll der Exponent des Bernoullischen Gesetzes derselbe sein; er sei mit $n(v)$ bezeichnet. Ebenso sei er derselbe für v_1 und $u_1 = v_1 \lambda_0$; dieser sei mit $n(v_1)$ bezeichnet. Dann ist der wahre Wert B_v ein Mittelwert von $B = \lambda_0^{n(v)-1}$, während der Siaccische Wert $\overline{B}$ ein Mittelwert von $(B) = \lambda_0^{n(v_1)-1}$ ist. Gilt für v_1 und v derselbe Exponent, ist also $n(v_1) = n(v)$, dann kann (B) für B genommen werden. Daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht, zeigt folgendes Beispiel. Es sei v_1 nahe der Schallgeschwindigkeit, so daß $n(v_1)$ den größten Wert, etwa 5 hat. x^0 sei die zugehörige Schußweite im leeren Raum. Für v_0 werde eine Überschallgeschwindigkeit mit $n(v_0) = 2$

*) Siacci wählt $G = (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} \omega)^2$, wodurch die Fehler nahe dem Anfangspunkt mehr ins Gewicht fallen.

gewählt. Schließlich wird der Geschoßfaktor so groß gewählt, daß mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Schußweite x^0 erreicht wird. Dann ist auf der ganzen Geschoßbahn: $1 < n(v) \leqq n(v_1)$ und zwischen ω_0 und $-\omega_0$ ist $\lambda_0 = \frac{\cos\omega_0}{\cos\omega} \leqq 1$, also (Abb. 27) $1 \geqq B \geqq (B)$, während zwischen $-\omega_0$ und ω^0 die Ungleichung $1 \leqq B \leqq (B)$ gilt. Demnach kann ein Mittelwert von (B) kleiner sein als jeder Wert von B, $\overline{B}$ ist also dann sicher nicht der gesuchte Wert B_ν. Man könnte also in diesem Fall mit mehr Recht den größten oder kleinsten Wert von $B(u, \lambda)$ als Näherungswert von B_ν benutzen.

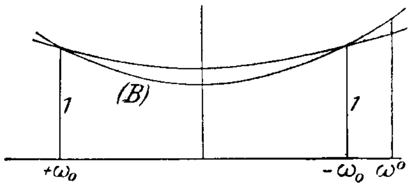

Abb. 27

Das Verfahren von Vallier zur Ermittlung eines Wertes für B ist im Kern das folgende. Die Taylorsche Entwicklung mit dem Restglied in Form eines bestimmten Integrals:

$$z = z_0'\, x + \tfrac{1}{2} z_0''\, x^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2 z'''(\xi)\, d\xi$$

ergibt, wenn man für z', z'', z''' ihre Werte nach § 23 (3) einsetzt:

$$z = x \operatorname{tg}\omega_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\dot{x}_0^2} + g \int_0^x (x-\xi)^2 \frac{\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^4}\, d\xi\,.$$

Nach § 31 (5) ist, wenn noch $\omega_m = \omega_0$ gesetzt wird, $\ddot{\xi} = -B(\xi)\, w(u) \cos\omega_0$. Setzt man dies in das Restglied ein , so ergibt sich, bei Anwendung des Mittelwertsatzes (der Integrand des Restgliedes ändert nirgends sein Vorzeichen):

$$\int_0^x (x-\xi)^2 \frac{B(\xi)\, w(u)}{\dot{\xi}^4}\, d\xi = \overline{B} \cos\omega_0 \int_0^x (x-\xi)^2 \frac{w(u)}{\dot{\xi}^4}\, d\xi\,, \qquad u = \dot{\xi} \sec\omega_0\,.$$

$\overline{B}$ ist jetzt der Valliersche Mittelwert. Läßt man die Formel auch für Werte zwischen 0 und x gelten, so entsteht ein Fehler bei der Berechnung von z, der am Anfang und Ende des Integrationsintervalls verschwindet. Die Fehlerbedingung lautet also:

$$\int_0^x (x-\xi)^2 \frac{(B-\overline{B})\, w(u)}{u^4}\, d\xi = \int_0^x (x-\xi)^2 \varepsilon(\xi)\, d\xi = 0\,. \qquad (11)$$

Das ist eine lineare Gleichung zur Bestimmung von $\overline{B}$, die sich lösen läßt, vorausgesetzt, daß man die Koeffizienten der linearen Gleichung berechnen kann. Das kann man auf Grund einer ersten vorläufigen Bahnbestimmung. Im einzelnen setzt Vallier $B - \overline{B}$ im Bereich $(0, x)$ als wenig veränderlich voraus; dann kann $\varepsilon(\xi)$ durch eine lineare Funktion approximiert werden:

$$\varepsilon(\xi) = \varepsilon_1 \frac{x_2 - \xi}{x_2 - x_1} + \varepsilon_2 \frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Die Gleichung für $\overline{B}$ wird dann

$$\varepsilon_1 \int_0^x (x - \xi)^2 (x_2 - \xi)\, d\xi + \varepsilon_2 \int_0^x (x - \xi)^2 (\xi - x_1)\, d\xi = 0 .$$

Dabei sind die zu x_1 und x_2 gehörigen Werte $\varepsilon_1 = \varepsilon(x_1)$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon(x_2)$ durch eine erste Bahnbestimmung angenähert zu ermitteln. Das so gewonnene $\overline{B}$ ist einer verbesserten Bahnbestimmung zugrunde zu legen usw. Wenn das Verfahren konvergent ist, so würde die wiederholte Anwendung desselben die zu der Endabszisse x gehörige Ordinate z immer genauer ergeben. Über die Darstellung der zu kleineren x-Werten gehörigen Ordinaten ist damit natürlich nichts ausgesagt. Vallier wählt insbesondere für x die Schußweite x^0, ferner für P_1 den Anfangspunkt, also $x_1 = 0$ und für P_2 den Gipfel, für den näherungsweise $x_2 = 0{,}55\, x^0$ genommen wird. (Gegen diesen Wert werden in § 16, S. 52 Bedenken erhoben.) Nach Einführung der approximierenden Funktion $\varepsilon(\xi)$ ist es nicht mehr sicher, daß das berechnete $\overline{B}$ der gesuchte Mittelwert ist.

Die Verfahren von Siacci und Vallier liefern zwar Mittelwerte von B, aber diese Mittelwerte haben nichts mit den in den Gleichungen (7) auftretenden Werten B_ν zu tun. Bei Siacci wird $B - \overline{B}$ im Mittel über alle ω-Werte zwischen ω_0 und $-\omega_0$ zu Null gemacht, bei Vallier werden nur zwei Punkte der Bahn herangezogen, mit der Bedingung, daß die Endordinate z^0 richtig dargestellt wird. Diese Bestimmungen von $\overline{B}$ sind ebenso wie diejenigen von $\sec \omega_m$ ganz willkürlich, können im einzelnen vielfach abgeändert werden, da dabei der für jede solche Bestimmung entscheidende Gesichtspunkt unbeachtet bleibt: $\sec \omega_m$ und $\overline{B}$ sind so zu bestimmen, daß die Formeln (7) „möglichst genau“ richtig sind. Und selbst wenn es gelänge, ein einzelnes Element, wie die Schußweite x^0, die Flugzeit t^0, den Aufprallwinkel ω^0, die Endgeschwindigkeit v^0 zu berichtigen, so würden die hierfür geeigneten Werte von $\overline{B}$ und $\sec \omega_m$ noch nicht dasselbe für die anderen Elemente leisten, noch viel weniger würde dadurch die gesamte Geschoßbahn und der zeitliche Verlauf in ihr genauer dargestellt.

§ 33. Fehlergrenzen

Will man die Formeln (7) zur Berechnung beliebiger Geschoßbahnelemente benutzen, so muß man sich darüber klar sein, daß sie mit fest gewählten B-Faktoren nicht für beliebiges u gelten können. So aufgefaßt, sind die Formeln falsch und sie können durch keine Bestimmung von B und $\sec \omega_m$ berichtigt werden. Es kommt vielmehr darauf an, die Fehlergrenzen dieser Formeln zu ermitteln und durch zweckmäßige Wahl von B und $\sec \omega_m$ möglichst zu verengen. Dadurch erhält man ein Urteil über die Genauigkeit und kann, wenn man will, Mittelwerte bilden. Das ist der im folgenden eingeschlagene Weg, der sich auch noch darin von den früheren unterscheidet, daß er $\sec \omega_m$ und B zugleich berücksichtigt.

1. Einfaches Verfahren. Nach (2) ist der korrigierende Faktor B definiert durch

$$\frac{1}{B(u,\lambda)} = \frac{w(u)\,\lambda}{w(u\,\lambda)} = \frac{w\left(v\dfrac{\cos\omega}{\cos\omega_m}\right)}{w(v)\cdot\dfrac{\cos\omega}{\cos\omega_m}}\,. \tag{12}$$

Die Faktoren $1/B_\nu$ der Gleichungen (7) liegen also sicher zwischen dem größten und dem kleinsten dieser Werte. Eine erste Schätzung erhält man durch die Annahme, daß im ganzen Intervall

$$w(v) = a\,v^n \quad \text{und} \quad w\left(v\frac{\cos\omega}{\cos\omega_m}\right) = a\cdot\left(v\frac{\cos\omega}{\cos\omega_m}\right)^n$$

gesetzt werden kann; so klein, daß diese Annahme zulässig ist, wäre also der betrachtete Bogen zu nehmen. Dann wird

$$\frac{1}{B(u,\lambda)} = \left(\frac{\cos\omega}{\cos\omega_m}\right)^{n-1}\,; \tag{13}$$

es kommt also auf die Ermittlung des größten und kleinsten Wertes von $\cos\omega$ an, die bei einem nur auf- oder nur absteigenden Bogen am Anfang und am Ende liegen, während bei einem auf- und absteigenden Bogen der größte Wert im Gipfel, der kleinste im Anfang oder Ende liegt.

In einem „flachen" Gipfelbogen ($\omega_0 \geqq \omega \geqq \omega^0$), wo ω_0 und $|\omega^0|$ beide klein sind, wird man $\omega_m = 0$ wählen, also gilt

$$\cos^{n-1}\omega^0 \leqq \frac{1}{B_\nu} \leqq 1\,. \tag{14}$$

Ein Zwischenwert ist $\cos^{n-1}\omega^0 = 1 - \dfrac{n-1}{2}\,\omega_0^2$. Für $n = 2$ ist also $\cos\omega_0$ ein Zwischenwert. Das Wertepaar $\omega_m = 0$, $B = \sec\omega_0$ hat Borda benutzt.

Wählt man für einen aufsteigenden Ast $\omega_m = \omega_0$, so gilt

$$1 \leqq \frac{1}{B_\nu} \leqq \sec^{n-1}\omega_0\,. \tag{15}$$

Für $n = 3$ ist das arithmetische Mittel aus den Extremwerten $\frac{1}{2}(1+\sec^2\omega_0)$, genähert gleich $\sec\omega_0$, für beliebiges n ergibt die Reihenentwicklung $1+\frac{n-1}{4}\omega_0^2$. Wählt man für den absteigenden Ast $\omega_m = \omega^0$, dann ist das arithmetische Mittel $1+\frac{n-1}{4}\omega^{0\,2}$. Auf diese Mittelwerte hat Charbonnier hingewiesen. Die obige einfache Herleitung läßt die engbegrenzte Anwendbarkeit derselben erkennen.

2. Schärferes Verfahren. Wir wollen jetzt die Grenzen genauer bestimmen. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$w(u) = w(v) + (u - v)\, w'(\bar{v}),$$

wo $\bar{v}$ ein Wert zwischen v und u ist. Wird $\bar{n} = \frac{\bar{v}\, w'(\bar{v})}{w(\bar{v})}$ gesetzt, so ist von

$$\frac{1}{B(u,\lambda)} = 1 + (\bar{n} - 1)(1 - \lambda) \tag{16}$$

der größte und kleinste Wert zu ermitteln. Zu dem Zweck wird zunächst λ transformiert:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\cos\omega_m}{\cos\omega} = \cos\omega_m \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}\\ &= \cos\omega_m\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega_m + 2\operatorname{tg}\omega_m(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega_m) + (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega_m)^2}\\ &= \sqrt{1 - 2\sin\omega_m\cdot H + H^2} = \sqrt{(1-\sin\omega_m\cdot H)^2 + (\cos\omega_m\cdot H)^2},\end{aligned}$$

wenn man $\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega_m = -\sec\omega_m\cdot H$ setzt. Durch Wahl von ω_m werden wir erreichen, daß

$$0 \leqq \sin\omega_m\cdot H \leqq 1 \tag{17}$$

ist. In diesem Fall wird

$$\lambda = (1 - \sin\omega_m\cdot H) + \Theta\cdot\cos\omega_m\cdot|H| \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1\,. \tag{18}$$

Also wird erstens

$$1 - \lambda = |H|\,(|\sin\omega_m| - \Theta\cos\omega_m)\,; \tag{19}$$

zweitens ist identisch

$$1 - \lambda = \sin\omega_m\cdot H - \frac{\cos^2\omega_m\cdot H^2}{(1-\sin\omega_m\cdot H) + \lambda}\,;$$

also durch Einsetzen von (18):

$$1 - \lambda = \sin\omega_m\cdot H - \frac{\cos^2\omega_m\cdot H^2}{2(1-\sin\omega_m\cdot H) + \Theta\cdot\cos\omega_m\cdot|H|}\,. \tag{20}$$

Folglich wird erstens

$$\frac{1}{B(u,\lambda)} = 1 + (\bar{n} - 1)(|\sin\omega_m| - \Theta\cdot\cos\omega_m)\cdot|H| \tag{21}$$

und zweitens

$$\frac{1}{B(u,\lambda)} = 1 + (\bar{n}-1)\sin\omega_m\cdot H - \frac{(\bar{n}-1)\cos^2\omega_m\cdot H^2}{2(1-\sin\omega_m\cdot H)+\Theta\cos\omega_m\cdot|H|}. \tag{22}$$

Um die Ungleichung (17) durch Wahl von ω_m zu erfüllen, wählen wir auf einem Gipfelbogen $\omega_m = 0$. Dann wird nach (22)

$$\frac{1}{B} = 1 - \frac{(\bar{n}-1)\,\mathrm{tg}^2\,\omega}{2+\Theta\,|\mathrm{tg}\,\omega|}.$$

Für die Faktoren B_ν aus (7) gelten also die Ungleichungen

$$1 - \frac{\bar{n}-1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,|\omega|_{\max} \leqq \frac{1}{B_\nu} \leqq 1, \tag{23}$$

wo $|\omega|_{\max}$ der größere der Werte von $|\omega|$ am Anfang bzw. am Ende des Bogens ist.

Auf aufsteigenden Bogen ist $\sin\omega_m > 0$, also muß auch $H \geqq 0$, d. h. $\mathrm{tg}\,\omega_m \geqq \mathrm{tg}\,\omega$ sein. Demnach muß man $\omega_m = \omega_0$ wählen. Auf absteigenden Bogen ist $\sin\omega_m < 0$, also muß auch $H \leqq 0$, d. h. $\mathrm{tg}\,\omega_m \leqq \mathrm{tg}\,\omega$ sein. Also muß man $\omega_m = \omega^0$ wählen. Die Ungleichung (17) ist beidemal erfüllt. Es ist nämlich

$$\sin\omega_m\cdot H = \sin\omega_m\cdot\cos\omega_m\cdot(\mathrm{tg}\,\omega_m - \mathrm{tg}\,\omega) = \frac{\sin\omega_m}{\cos\omega}\sin(\omega_m-\omega) \tag{24}$$

oder, wenn statt ω dessen Komplement $\delta = \frac{\pi}{2} - \omega$ eingeführt wird,

$$0 \leqq \cos\delta_m\cdot\frac{\sin(\delta-\delta_m)}{\sin\delta} \leqq 1$$

in beiden Fällen, denn jeder der beiden Faktoren ist absolut genommen nicht größer als 1 und beide sind zugleich positiv oder zugleich negativ.

Bei auf- bzw. absteigenden Bogen benutzen wir Formel (21). Es ist dann der Faktor von $\bar{n}-1$ in (21) wegen (24):

$$(\sin\omega_0 - \Theta\cos\omega_0)\frac{\sin(\omega_0-\omega)}{\cos\omega} \leqq (\mathrm{tg}\,\omega_0 - \Theta)\sin(\omega_0-\omega^0),$$

$$(\sin|\omega^0| - \Theta\cos\omega^0)\frac{\sin(\omega-\omega^0)}{\cos\omega} \leqq (\mathrm{tg}\,|\omega^0| - \Theta)\sin(\omega_0-\omega^0).$$

Je steiler also die Bogen sind, d. h. je größer $\mathrm{tg}\,\omega_0$ bzw. $\mathrm{tg}\,|\omega^0|$ ist, je kleiner muß die Gesamtkrümmung $\omega_0 - \omega^0$ des zu berechnenden Bogens genommen werden, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen.

§ 34. Bestimmung der korrigierenden Faktoren

Der Gedanke, die Lösungen zweiter Klasse an den Grenzfall der schwerefreien Bewegung (§ 15) anzuschließen, soll jetzt ohne Annahmen über den korrigierenden Faktor B_ν durchgeführt werden. Genau wie in § 31 (2) werden v, ω durch die Variablen u, λ ersetzt. Zunächst wird die erste der Gleichungen (6), also die Hauptgleichung des Problems dazu benutzt, um λ als Funktion von u auszudrücken. Wird zur Abkürzung

$$H(u) = -g \int_u^{u_0} \frac{1}{B(u, \lambda)} \cdot \frac{du}{u\, w(u)} \tag{25}$$

gesetzt, so ergibt sich aus der ersten Gleichung (6), wenn noch $\omega_m = \omega_0$ gewählt wird,

$$\lambda^2 = 1 - 2H \sin \omega_0 + H^2 \tag{26}$$

als neue Form der Hauptgleichung. λ unterscheidet sich also um Größen der Ordnung g/w von 1. Für $1/B(u, \lambda)$ gilt nach (3) eine Entwicklung nach Potenzen von $\lambda - 1$; auch $1/B$ unterscheidet sich von 1 um Größen der Ordnung g/w. Bei Beschränkung auf Glieder 1. Ordnung in g ergibt sich daher für λ und B bei Beachtung von (7),

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(1)}(u) &= 1 - H_0 \sin \omega_0\,, \qquad & H_0(u) &= J(u) - J(u_0)\,, \\ \frac{1}{B^{(1)}} &= 1 + \sin \omega_0 \cdot H_0 \cdot (n_1 - 1)\,, \qquad & n_1(u) &= \frac{u\, w'(u)}{w(u)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Werden diese Näherungswerte in die übrigen Gleichungen (6) eingeführt, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} t &= T(u) - T(u_0) + \sin \omega_0 \int_u^{u_0} (n_1 - 1)\, H_0 \frac{du}{w(u)} + (g^2)\,, \\ s &= D(u) - D(u_0) + \sin \omega_0 \int_u^{u_0} (n_1 - 2)\, H_0 \frac{u\, du}{w(u)} + (g^2)\,, \\ x \sec \omega_0 &= D(u) - D(u_0) + \sin \omega_0 \int_u^{u_0} (n_1 - 1)\, H_0 \frac{u\, du}{w(u)} + (g^2)\,, \\ x \operatorname{tg} \omega_0 - z &= A(u) - A(u_0) - J(u_0) \{D(u) - D(u_0)\} + (g^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die vierte Gleichung geht also bei Berücksichtigung der Glieder 1. Ordnung in g aus der entsprechenden Gleichung (6) hervor, indem dort $B_5 = 1$ gesetzt wird. Tabuliert man die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} T_1(u) &= \int^u (n_1 - 1)\, J(u) \frac{du}{w(u)}, & T_1^*(u) &= \int^u (n_1 - 1) \frac{du}{w(u)}, \\ D_1(u) &= \int^u (n_1 - 1)\, J(u) \frac{u\,du}{w(u)}, & D_1^*(u) &= \int^u (n_1 - 1) \frac{u\,du}{w(u)}, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

so erhält man aus (28)

$$\left.\begin{aligned} t &= T(u) - T(u_0) + \sin\omega_0 [T_1(u) - T_1(u_0) \\ &\qquad - J(u_0)\{T_1^*(u) - T_1^*(u_0)\}] + (g^2), \\ x \sec\omega_0 &= D(u) - D(u_0) + \sin\omega_0 [D_1(u) - D_1(u_0) \\ &\qquad - J(u_0)\{D_1^*(u) - D_1^*(u_0)\}] + (g^2), \\ x \operatorname{tg}\omega_0 - z &= A(u) - A(u_0) - J(u_0)[D(u) - D(u_0)] + (g^2), \\ s &= x \sec\omega_0 - (x \operatorname{tg}\omega_0 - z)\sin\omega_0 + (g^2) \\ &= x\cos\omega_0 + z\sin\omega_0 + (g^2). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Vergleicht man diese Formeln mit den Gleichungen (7), so ergeben sich die Zwischenwerte B_2 und B_4 aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{B_2} &= 1 + \beta_2(u, u_0)\sin\omega_0, \\ \frac{1}{B_4} &= 1 + \beta_4(u, u_0)\sin\omega_0, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \beta_2(u, u_0) &= \frac{T_1(u) - T_1(u_0) - J(u_0)\{T_1^*(u) - T_1^*(u_0)\}}{T(u) - T(u_0)} + (g^2), \\ \beta_4(u, u_0) &= \frac{D_1(u) - D_1(u_0) - J(u_0)\{D_1^*(u) - D_1^*(u_0)\}}{D(u) - D(u_0)} + (g^2). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die Koeffizienten β_2, β_4 verschwinden zugleich mit g; sie sind Funktionen von u und u_0, aber nicht von ω_0, sie können also z. B. für jedes Wertepaar u, u_0 einem Nomogramm entnommen werden. Aus (32) wird deutlich, daß die Zwischenwerte von B verschieden zu wählen sind, je nachdem ob die Schußzeit oder die Schußweite bestimmt werden soll.

Gilt in demselben Bahnbogen mit ausreichender Genauigkeit dasselbe Bernoullische Gesetz, ist also

$$n_1(u) = \frac{u\,w'(u)}{w(u)} = n = \text{const},$$

so ist von den Funktionen (29) nur

$$T_1(u) = (n-1)\int^u J(u)\frac{du}{w(u)} = (n-1)\,T'(u)$$

neu, während sich die Funktionen

$$T_1^*(u) = (n-1)\,T(u)\,,$$
$$D_1(u) = (n-1)\,A(u)\,,$$
$$D_1^*(u) = (n-1)\,D(u)$$

durch die in (7) eingeführten Funktionen ausdrücken lassen. Für die Koeffizienten β_2 und β_4 ergibt sich dann:

$$\left.\begin{aligned} \beta_2(u, u_0) &= (n-1)\left[\frac{T'(u) - T'(u_0)}{T(u) - T(u_0)} - J(u_0)\right] + (g^2)\,, \\ \beta_4(u, u_0) &= (n-1)\left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0)\right] + (g^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Hier läßt sich β_4 anschaulich deuten. Aus (30) folgt

$$\left.\begin{aligned} \beta_4 &= (n-1)\frac{x \operatorname{tg} \omega_0 - z}{x \sec \omega_0} + (g^2)\,, \\ &= (n-1)(\sin \omega_0 - \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \cos \omega_0) + (g^2) \\ &= (n-1) \sec \varepsilon \cdot \sin(\omega_0 - \varepsilon) + (g^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Unter ε wird der Geländewinkel verstanden, das ist die Neigung des Richtstrahles nach dem Zielpunkt gegen den Horizont, $\omega_0 - \varepsilon$ ist also der Visierwinkel. Bei Zielen im Mündungshorizont ist noch einfacher

$$\frac{1}{B_4} = 1 + (n-1)\sin^2 \omega_0 > 1\,.$$

Ist die Annahme $n_1 = n$ nicht mehr zulässig — das ist vor allem zu erwarten, wenn die Geschwindigkeiten in einem nicht mehr kleinen Bereich die Schallgeschwindigkeit einschließen — dann ist auf die Formeln (32) zurückzugehen.

Wählt man ω_m von ω_0 verschieden, so hat man noch eine zusätzliche Bedingung verfügbar.

Mit $\lambda_0 = \cos \omega_m / \cos \omega_0$ ergibt sich statt (26) die Hauptgleichung

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 - 2H\lambda_0 \sin \omega_0 + H^2\,.$$

Gehen wir sogleich auf den Fall eines Bernoullischen Widerstandsgesetzes ein, so ergeben sich die Zwischenwerte von $B(u, \lambda)$ zur Berechnung von t bzw. x zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{B_{2,m}} &= 1 + (n-1)(1-\lambda_0) + \beta_2 \sin \omega_0\,, \\ \frac{1}{B_{4,m}} &= 1 + (n-1)(1-\lambda_0) + \beta_4 \sin \omega_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wo β_2, β_4 die in (33) berechneten Größen sind. Man kann jetzt λ_0 so wählen, daß die Glieder 1. Ordnung möglichst verschwinden. Selbstverständlich ergibt sich für λ_0 ein verschiedener Wert, je nachdem $B_{2,m}$ oder $B_{4,m}$ betrachtet wird. Im folgenden soll nur $B_{4,m}$ weiter untersucht werden. An Stelle von (34) ergibt sich jetzt

$$\beta_4 = (n-1)\frac{x \operatorname{tg}\omega_0 - z}{x \sec \omega_m} = (n-1)(\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\varepsilon)\cos\omega_m\,,$$

also wird

$$\frac{1}{B_{4,m}} = 1 + (n-1)\left[1 - \lambda_0 + \sin\omega_0 \cdot \cos\omega_0 \cdot (\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\varepsilon)\,\lambda_0\right]. \quad (36)$$

Hieraus folgt, daß z. B. das Wertepaar

$$B_{4,m} = 1\,, \qquad \sec\omega_m = \cos\omega_0 + \sin\omega_0 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \quad (37)$$

gewählt werden kann, um die Glieder 1. Ordnung in g/w voll zu erfassen. Allerdings gehört zu (37) nicht immer ein reeller Wert ω_m, denn es muß $\sec\omega_m \geqq 1$ sein. Liegt das Ziel im aufsteigenden Ast der Schußbahn und ist die Gesamtkrümmung des betrachteten Bahnbogens klein, so ist mit großer Annäherung $\varepsilon = \omega_0$. In diesem Fall wird also $\omega_m = \omega_0$. Für Ziele im Mündungshorizont, also für $\varepsilon = 0$ gibt es kein reelles ω_m, denn es ist dann $\sec\omega_m = \cos\omega_0$. Der kleinste Geländewinkel ε, für den $B_{4,m} = 1$ gesetzt werden kann, berechnet sich nach (37) aus $\sec\omega_m = 1 = \cos\omega_0 + \sin\omega_0 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon$, also $\varepsilon = \frac{1}{2}\,\omega_0$. Für Geländewinkel $\varepsilon < \frac{1}{2}\,\omega_0$ wird also $\omega_m = 0$ zu setzen sein. Setzt man dies in (36) ein, wählt also $\lambda_0 = \sec\omega_0$, so befriedigt das Wertepaar

$$\frac{1}{B_{4,m}} = 1 + (n-1)\left[1 - \cos\omega_0 \cdot (1 + \operatorname{tg}\varepsilon)\right] > 1\,, \quad \omega_m = 0 \quad (38)$$

die Gleichung (36). Liegt der Endpunkt des Bahnbogens im Horizont des Anfangspunktes, so ist in (38) $\varepsilon = 0$ zu setzen.

Die Genauigkeit der Rechnung läßt sich beliebig steigern, wenn die Größen $H(u, \lambda)$, $\lambda(u)$ und $B(u, \lambda)$ durch Iteration angenähert werden. $H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ sei eine Folge von Näherungswerten der durch (25) eingeführten Funktion, indem

$$H^{(\nu)}(u, \lambda) = -g \int\limits_u^{u_0} \frac{1}{B^{(\nu-1)}(u, \lambda)} \, \frac{du}{u\, w(u)}$$

gesetzt wird. Die ersten Glieder der Folge sind $H^{(0)} = 0$, $H^{(1)} = J(u) - J(u_0)$. Bei jeder neuen Näherung treten natürlich auch neue Siaccische Funktionen auf. Der Arbeitsaufwand steigt also beträchtlich. Besser ist es schon, die Bahnkurven in Teilbögen aufzuteilen. Die Gesamtkrümmung ist in jedem Teilbogen so klein zu wählen, daß die Berücksichtigung der Glieder 1. Ordnung zur Darstellung ausreicht.

§ 35. Integrable Fälle

Von Fällen, in denen durch Wahl der Funktion w die Quadraturen in den Formeln (7) ausführbar werden, haben wir schon den Bernoullischen behandelt. Einen zweiten solchen Fall hat Didion gefunden. Es ist der des Gesetzes

$$w = a\,v^2 \left(1 + \frac{v}{R}\right), \tag{39}$$

das Didion zur Verbesserung des Newtonschen aufgestellt hatte, da die Versuche ergaben, daß der Widerstand schneller wächst als das Geschwindigkeitsquadrat. Es gibt allgemeinere integrable Gesetze, die das Bernoullische und das Didionsche als Sonderfälle enthalten. Mit solchen Gesetzen kann man wegen der größeren Zahl darin vorkommender Koeffizienten eine bessere Annäherung an die Widerstandstabelle erreichen. Es ist im folgenden zweckmäßig, x statt $\dot{x}$ als unabhängige Veränderliche einzuführen, wie es auch Didion getan hat. Dann hat man zunächst

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}}, \qquad \text{also} \qquad t = \int\limits_0 \frac{dx}{\dot{x}},$$

ferner aus § 23 (3):

$$z'' = -\frac{g}{\dot{x}^2}, \qquad \text{also integriert} \qquad \operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega = \int\limits_0 \frac{g\,dx}{\dot{x}^2}$$

und durch eine zweite Integration $\quad x \operatorname{tg}\omega_0 - z = \int\limits_0 \int\limits_0 \frac{g\,dx}{\dot{x}^2}\,dx\,.$

Nehmen wir als Beziehung zwischen $\dot{x}$ und x an:

$$\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^r + \varepsilon = (1+\varepsilon)\left(1 + \frac{\nu\,x}{M\,\dot{x}_0}\right)^\mu \tag{40}$$

mit beliebigen Konstanten $r, \mu, \nu, \varepsilon, M$, so erhält man daraus durch Differentiation und Elimination von x die Beziehung zwischen $\ddot{x}$ und $\dot{x}$, nämlich

$$\ddot{x} = \frac{\nu\,\mu\,\dot{x}_0}{r M}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^{2-r}\left[\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right)^r + \varepsilon\right]^{1-\frac{1}{\mu}}. \tag{41}$$

Dieses Gesetz geht aus einem Gesetz zwischen w und v von der Form

$$w = a\,v^n \left(1 + \frac{v^m}{R}\right)^p \tag{42}$$

hervor [vgl. (39)]. Integrable Fälle erhält man z. B., wenn $1/r$ eine negative ganze Zahl ist. Beschränken wir uns auf den Fall $r = -1$ und setzen, wodurch die Allgemeinheit nicht weiter eingeschränkt wird, $\nu = \frac{1}{\mu + 1}$, so erhalten wir durch Ausführung der Quadraturen:

$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{x}{\dot{x}_0}\left\{(1+\varepsilon)\frac{\left(1+\frac{\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}-1}{\frac{1}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}}-\varepsilon\right\},\\
&\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega = \\
&\frac{g\,x}{\dot{x}_0^2}\left\{(1+\varepsilon)^2\frac{\left(1+\frac{\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{2-\nu}{\nu}}-1}{\frac{(2-\nu)}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}}-2\,\varepsilon(1+\varepsilon)\frac{\left(1+\frac{\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}-1}{\frac{1}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}}+\varepsilon^2\right\},\\
&x\operatorname{tg}\omega_0 - z = \\
&\frac{g\,x^2}{2\dot{x}_0^2}\left\{(1+\varepsilon)^2\frac{\left(1+\frac{\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{2}{\nu}}-\frac{2\,x}{M\dot{x}_0}-1}{\frac{(2-\nu)\,x^2}{M^2\dot{x}_0^2}}-2\,\varepsilon(1+\varepsilon)\frac{\left(1+\frac{\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^{\frac{1}{\nu}+1}-\frac{1+\nu}{M}\frac{x}{\dot{x}_0}-1}{\frac{1}{2}\frac{(\nu+1)x^2}{M^2\dot{x}_0^2}}+\varepsilon^2\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Diese Formeln liefern einerseits für den Bernoullischen Fall $\varepsilon = 0$ die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}^{-1} &= \dot{x}_0^{-1}\left(1+\frac{\nu\,x}{M\,\dot{x}_0}\right)^{\frac{1}{\nu}-1},\\
\ddot{x} &= -\frac{\nu-1}{M}\,\dot{x}_0^{\frac{1}{\nu-1}}\,\dot{x}^{\frac{\nu-2}{\nu-1}},\\
t &= M\left[\left(1+\frac{\nu\,x}{M\,\dot{x}_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}-1\right],\\
\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= \frac{g\,M}{(2-\nu)\,\dot{x}_0}\left[\left(1+\frac{\nu\,x}{M\,\dot{x}_0}\right)^{\frac{2-\nu}{\nu}}-1\right],\\
x\operatorname{tg}\omega_0 - z &= \frac{g\,M^2}{2\,(2-\nu)}\left[\left(1+\frac{\nu\,x}{M\,\dot{x}_0}\right)^{\frac{2}{\nu}}-\frac{2\,x}{M\,\dot{x}_0}-1\right].
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Andererseits erhält man, wenn man $\varepsilon \neq 0$ beibehält, aber zur Grenze $\lim \nu = 0$ übergeht, die Formeln von Didion:

$$\left.\begin{aligned}
\dot x^{-1} &= \dot x_0^{-1}\left[(1+\varepsilon)\, e^{\frac{x}{M \dot x_0}} - \varepsilon\right],\\
-\ddot x &= \frac{1}{M \dot x_0}\,\dot x^2 + \frac{\varepsilon}{M \dot x_0^2}\,\dot x^3,\\
t &= \frac{x}{\dot x_0}\left[(1+\varepsilon)\,\frac{e^{\frac{x}{M \dot x_0}} - 1}{\frac{x}{M \dot x_0}} - \varepsilon\right],\\
\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= \frac{g x}{\dot x_0^2}\left[(1+\varepsilon)^2\,\frac{e^{\frac{2x}{M \dot x_0}} - 1}{\frac{2x}{M \dot x_0}} - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\,\frac{e^{\frac{x}{M \dot x_0}} - 1}{\frac{x}{M \dot x_0}} + \varepsilon^2\right],\\
x \operatorname{tg}\omega_0 - z &= \frac{g x^2}{2\dot x_0^2}\left[(1+\varepsilon)^2\,\frac{e^{\frac{2x}{M \dot x_0}} - \frac{2x}{M \dot x_0} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{M \dot x_0}\right)^2} - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\,\frac{e^{\frac{x}{M \dot x_0}} - \frac{x}{M \dot x_0} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{M \dot x_0}\right)^2} + \varepsilon^2\right],
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Bei Didion ist $w = a v^2 + \frac{a}{R} v^3$,

also $$-\sec\omega_m \cdot \ddot x = a(\sec\omega_m \cdot \dot x)^2 + \frac{a}{R}(\sec\omega_m \cdot \dot x)^3,$$

also $$a = \frac{1}{M \dot x_0 \sec\omega_m}, \qquad \varepsilon = \frac{\dot x_0 \sec\omega_m}{R}.$$

Die Einführung von x statt $\dot x$ als unabhängige Veränderliche ist, wenigstens bei Gesetzen der Form (41) nicht nötig, da man vermittelst (40) x explizit durch $\dot x$ ausdrücken kann. Dagegen ist die Einführung von t als unabhängiger Veränderlicher nur im Bernoullischen Fall $\varepsilon = 0$ möglich, da man aus der dritten Formel (44) x explizit durch t ausdrücken kann. Tut man das, so kommt man auf die Formeln (30) in § 20.

Derartige Lösungen des ballistischen Problems durch endliche Ausdrücke hätten große Vorzüge, wenn es möglich wäre, ihnen die nötige Genauigkeit zu geben. Dazu müßte man ein integrables Widerstandsgesetz finden, das sich der Tabelle genau genug anschmiegt. Die Formeln (7) werden nun meist als Näherungsformeln verwandt, indem man λ und B_ν als Konstante ansieht. Man muß dann zur Erreichung einer bestimmten Genauigkeit die Geschoßbahn nicht als Ganzes, sondern in Teilbogen berechnen. Dazu aber genügt ein integrables Widerstandsgesetz, das sich zonenweise der Tabelle gut anschmiegt, wie es das Bernoullische tut, das sich durch Einfachheit empfiehlt. Es ist aber erwünscht, die in jedem Falle erforderlichen Rechnungen auf ein Mindestmaß zu beschränken, also den Hauptteil der Rechnungen nur ein für allemal auszuführen und tabellarisch darzustellen. Dabei ist es dann nicht mehr angebracht, ein

Näherungsgesetz zugrunde zu legen, sondern man wird zweckmäßiger die Widerstandstabelle selbst den Berechnungen unterlegen. Das ist der heute übliche Weg. Die praktischen Hilfsmittel zur Berechnung der nun ebenfalls durch Tabellen darzustellenden Integrale in (7) gibt § 23.

§ 36. Die 33 Schußbahnaufgaben erster Art. Sekundäre Funktionen

Ersetzt man in den genauen Formeln § 31 (7) die Funktionen $B_\nu(u)$ durch eine gemeinsame Konstante B,

$$B_1(u) = B_2(u) = \cdots = B_5(u) = \mathsf{B} = \text{const},$$

so entstehen die Näherungsformeln

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{\mathsf{B}}[T(u) - T(u_0)], \\ x \cdot \sec\omega_m &= \frac{1}{\mathsf{B}}[D(u) - D(u_0)], \\ \operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= \frac{1}{\mathsf{B}}\sec\omega_m \cdot [J(u) - J(u_0)], \\ x\operatorname{tg}\omega_0 - z &= \frac{1}{\mathsf{B}^2}[A(u) - A(u_0) - J(u_0)\{D(u) - D(u_0)\}]. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Diese Formeln werden als die Siaccischen bezeichnet, wenn man in ihnen $\sec\omega_m = \sec\omega_0$ und $\mathsf{B} = \beta \cdot \sec\omega_0$ setzt. In der Lösung von Krupp-Groß wird dagegen $\sec\omega_m = 1$ genommen. Nach dem, was in § 31 über die Bestimmung von $\sec\omega_m$ gesagt wurde, empfiehlt sich die erste Annahme bei steigenden, die letztere bei Gipfelbögen, während für fallende Bögen am besten $\omega_m = \omega^0$ genommen würde; wofür man zunächst näherungsweise $-\omega_0$ nehmen kann. Die übliche Berechnung lediglich nach der Siaccischen Annahme $\sec\omega_m = \sec\omega_0$ gibt also nicht stets die beste durch diese Formeln erreichbare Annäherung. Ebenso darf man die Schußbahn nicht als einen Bogen berechnen, sondern muß sie erst in Bögen kleiner Gesamtkrümmung zerlegen, falls sie nicht selbst ein solcher „kleiner" Bogen ist. In jedem Falle handelt es sich aber nur um ein Näherungsverfahren, dessen Wert nicht überschätzt werden darf. Die Siaccischen Bahnen fallen unter unsere „Grenzbahnen" (s. § 18).

Die dritte Siaccische Gleichung (46) kann man schreiben:

$$\operatorname{tg}\omega + \frac{\sec\omega_m}{\mathsf{B}} \cdot J(u) = \text{const.} \tag{47}$$

Das ist die integrierte Hauptgleichung, die Gleichung des Geschwindigkeitsrisses. Bezeichnet man den Wert der rechtsstehenden Integrationskonstanten mit C, so kann man die vierte Siaccische Gleichung schreiben:

$$C \cdot x - z - \frac{1}{\mathsf{B}^2} A(u) = \text{const.} \tag{48}$$

Wir bezeichnen die sieben Elemente x, z, t, u_0, ω_0, u, ω als die Elemente eines Schußbahnbogens OP. Da zwischen diesen sieben Elementen die vier Siaccischen Gleichungen bestehen, kann man zu drei gegebenen Elementen die Werte der vier übrigen finden. So entstehen $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$ Aufgaben, von denen aber zwei (u, u_0, x), (u, u_0, t) wegfallen, da mit u und u_0 nach (46) zugleich x und t bereits bestimmt sind. Von praktischem Interesse sind von diesen Aufgaben z. B. die folgenden:

Gegeben u_0, ω_0, ω. Die dritte Siacci-Gleichung liefert $J(u)$, daraus u vermittelst der Tabelle. Dann erhält man t, x, z aus der ersten, zweiten und vierten Gleichung. So findet man z. B. zu $\omega = 0$ die Elemente des Gipfels: u_*, t_*, x_*, z_*.

Gegeben u_0, ω_0, z/x (d. h. der Geländewinkel $\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} z/x$). Man hat u zu ermitteln aus der Gleichung, die durch Division der vierten durch die zweite Siacci-Gleichung entsteht:

$$\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{z}{x} = \frac{\sec\omega_m}{\mathsf{B}}\left\{\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0)\right\}.$$

Diese Aufgabe muß man lösen, um die Elemente des Auffallpunktes auf geneigtem Boden, oder bei $z = 0$ auf waagerechtem Boden zu finden.

Die Auflösung solcher Aufgaben wird erleichtert durch Tabellen für die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} D(u) - D(u_0), \quad T(u) - T(u_0), \quad J(u) - J(u_0), \\ \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) = Y(u, u_0) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

von zwei Argumenten u, u_0. Für diese „sekundären" Funktionen sind Tabellen vorhanden, aber so angeordnet, daß als Argumente u_0 und $D(u) - D(u_0)$ genommen werden.

Die erwähnten 33 Aufgaben teilen wir in drei Gruppen.

Die erste Gruppe umfaßt die 19 Aufgaben: Gegeben u_0 und u, oder eins von beiden und t oder x oder ω_0 und ω. Das fehlende u_0 oder u ergibt sich dann aus dem Werte einer der drei Funktionen T, D, J und dieser Wert aus einer der drei ersten Gleichungen. Hat man aber u_0 und u, so erhält man zunächst t und x aus den beiden ersten Gleichungen; und dann ergeben die beiden anderen die Werte von $\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega$ und $\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{z}{x}$ zur Berechnung von $\operatorname{tg}\omega_0$, $\operatorname{tg}\omega$, z.

Die zweite Gruppe umfaßt die sieben Aufgaben: Gegeben (ω, ω_0, x), (ω, ω_0, t), (ω, x, z), (ω_0, x, z), (ω, x, t), (ω_0, x, t), (x, z, t). In jeder dieser Aufgaben haben zwei der vier Differenzen $T(u) - T(u_0)$, $D(u) - D(u_0)$, $J(u) - J(u_0)$, $A(u) - A(u_0)$ gegebene Werte. Die Ermittlung der zwei Unbekannten u und u_0 aus zwei solchen Gleichungen erfolgt auf Grund von Tabellen für diese sekundären Funktionen am besten, wenn diese graphisch als Kurvenscharen dargestellt sind.

Die dritte Gruppe umfaßt die sieben Aufgaben: Gegeben (ω, ω_0, z), (ω, z, t), (ω_0, z, t), (u, ω, z), (u, ω_0, z), (u_0, ω, z), (u_0, ω_0, z).

Ein einheitliches Lösungsverfahren für diese und alle 33 Aufgaben kann man sich auf Grund der Tabellen der sekundären Funktionen, wie folgt, herstellen. Im Koordinatensystem mit der Abszisse $\frac{1}{D(u) - D(u_0)} = X$ und der Ordinate $\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) = Y$ zeichne man die vier Kurvenscharen mit den Gleichungen

$$u_0 = \text{const},$$

$$u = \text{const},$$

$$T(u) - T(u_0) = \text{const},$$

$$J(u) - J(u_0) = \text{const}.$$

Dann werden sämtliche Aufgaben gelöst, indem man eine bestimmte Kurve einer Schar mit einer bestimmten Kurve einer anderen Schar oder mit einer bestimmten Geraden zum Schnitt bringt.

Zwei Aufgaben, die durch Vertauschung von u mit u_0 und ω mit ω_0 auseinander hervorgehen, sind nicht wesentlich verschieden; aus der Lösung der einen erhält man die der andern, indem man die u-Kurven als u_0-Kurven und umgekehrt auffaßt. Demnach ist in folgender Zusammenstellung von zwei solchen „dualen" Aufgaben immer nur eine berücksichtigt.

Anzahl	Aufgabe	gelöst durch Schnitt von	mit
3	$(u, u_0, .)$	einer u-Kurve	einer u_0-Kurve
2	(u_0, ω_0, ω)	„ $(J(u) - J(u_0))$-Kurve	„ „
6	$(u_0, t, .)$	„ $(T(u) - T(u_0))$- „	„ „
6	$(u_0, x, .)$	„ Parallelen zur Y-Achse	„ „
1	(ω, ω_0, x)	„ „ „ „	„ $(J(u) - J(u_0))$-Kurve
5	$(x, t, .)$	„ „ „ „	„ $(T(u) - T(u_0))$- „
2	(x, z, ω_0)	„ „ „ „	„ Parallelen zur X-Achse
2	(z, ω_0, u_0)	der Geraden $Y + z B^2 \cdot X = \frac{B \operatorname{tg} \omega_0}{\sec \omega_m}$	„ u_0-Kurve
2	(z, ω_0, u)	„ „ „ „	„ u- „
2	(z, ω_0, t)	„ „ „ „	„ $(T(u) - T(u_0))$-Kurve
2	(z, ω_0, ω)	„ „ „ „	„ $(J(u) - J(u_0))$- „
33			

Wenn auch bisher nur ein Teil dieser Aufgaben praktisch in Betracht kommt, so ist es doch von Wert für jede dieser Aufgaben, falls sie auftritt, den Weg zur Lösung zu haben. Die Abszissenachse der dazu erforderlichen Rechentafel kann mit einem reziproken Maßstab versehen werden, so daß bei dem Punkt mit der Abszisse $\frac{1}{D(u) - D(u_0)}$ die Zahl $D(u) - D(u_0)$ steht. Zur Herstellung der Rechentafel sind also Tabellen für die sekundären Funktionen (49) erforderlich; von der letzten für alle Wertepaare $u \lesseqgtr u_0$. Man wird zweckmäßig die zwei Kurvenscharen $u_0 = \text{const}$, $u = \text{const}$ auf einer, die zwei Kurvenscharen $T(u) - T(u_0) = \text{const}$, $J(u) - J(u_0) = \text{const}$ auf einer zweiten durchsichtigen Tafel vereinigen. Nur acht Aufgaben erfordern ein Aufeinanderlegen beider Tafeln.

§ 37. Schußbahnaufgaben zweiter Art. Schußfaktoren

Kennt man $w(u)$ noch nicht, darf man aber vermuten, daß sich die Widerstandsfunktion von der eines anderen Geschosses nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, so kann $w(u) = c\,f(u)$ gesetzt werden, wo jetzt $f(u)$ als bekannt angesehen werden kann. Die Tabellen in (46) sind also jetzt mit $f(u)$ statt mit $w(u)$ anzulegen. In (46) ist also jetzt überall B durch $c\mathsf{B}$ zu ersetzen.

Bei den eben behandelten Aufgaben wurde angenommen, daß der Geschoßfaktor c bekannt ist. Eine zweite Art von Aufgaben entsteht, wenn auch c zu den gesuchten Größen gehört. Da aber in den Gleichungen (46) die Größe c nur in der Verbindung $c\mathsf{B}$ vorkommt, so kann man aus ihnen nur diese Größe ermitteln, und erst daraus c nach Abschätzung von B nach § 33 oder § 34. Der Geschoßfaktor c bleibt also immer mit derselben Unsicherheit wie der korrigierende Faktor B behaftet. Deshalb muß die Ermittlung des Geschoßfaktors möglichst auf solche Bögen gegründet werden, auf denen sich v und ω wenig ändern, also B in engen Grenzen liegt, d. h. auf flache Bögen geringer Gesamtkrümmung.

Befindet sich unter den vier bekannten Größen u_0 und u, so sind die Werte der rechten Seiten der vier Gleichungen (46) bekannt. Also ergibt sich der Wert von $c\mathsf{B}$ durch Vergleich mit der linken Seite einer der vier Gleichungen, je nachdem, ob noch t oder x oder (ω_0, ω) oder $(\omega_0, z/x)$ gegeben sind.

Ist u_0 (oder u) gegeben, so muß man zunächst u (oder u_0) ermitteln. Da aber c jedenfalls zu den Unbekannten gehört, so kommen nicht die linken Seiten der Gleichungen (46), sondern deren Quotienten in Betracht, oder allgemeiner die aus den linken Seiten gebildeten Monome der Dimension Null. Solche Ausdrücke sollen „Schußfaktoren" heißen. Deren gibt es also unendlich viele abgeleitete, aber nur drei ursprüngliche, z. B. irgend drei unabhängige der sechs Verhältnisse der vier Größen:

$$t : x \sec \omega_m : \cos \omega_m (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega) : \left(\operatorname{tg} \omega_0 - \frac{z}{x}\right). \qquad (50)$$

Mit Rücksicht auf den Dualismus der Aufgaben ergeben sich demnach die folgenden sechs Aufgaben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gegeben: } (x, t, .), \text{ also der Wert von } \frac{T(u) - T(u_0)}{D(u) - D(u_0)},\\ &(x, \omega_0, \omega), \text{ also der Wert von } \frac{J(u) - J(u_0)}{D(u) - D(u_0)},\\ &(t, \omega_0, \omega), \text{ also der Wert von } \frac{J(u) - J(u_0)}{T(u) - T(u_0)},\\ &\left(\frac{z}{x}, \omega_0, x\right), \text{ also der Wert von } \frac{Y(u, u_0)}{D(u) - D(u_0)},\\ &\left(\frac{z}{x}, \omega_0, t\right), \text{ also der Wert von } \frac{Y(u, u_0)}{T(u) - T(u_0)},\\ &\left(\frac{z}{x}, \omega_0, \omega\right), \text{ also der Wert von } \frac{Y(u, u_0)}{J(u) - J(u_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Demnach löst man diese Aufgaben, indem man auf einer gegebenen u_0-Kurve denjenigen Punkt aufsucht, in dem der betreffende Schußfaktor (51) den gegebenen Wert hat. Das ließe sich durch Kurvenscharen der sechs Schußfaktoren (51) erleichtern. Ist so u gefunden, so kommt man auf eine der ersten Aufgaben zurück.

Sind u_0 und u unbekannt, so hat man deren Werte aus den Werten zweier der sechs Schußfaktoren (51) zu ermitteln; das hätte zu erfolgen durch graphische Interpolation auf der Tafel der Schußfaktoren.

Die obige Theorie der Schußfaktoren ist vollständiger und allgemeiner als diejenige von Siacci oder von Chapel, welche das quadratische bzw. kubische Luftwiderstandsgesetz annehmen, sich nur auf den Gipfel ($\omega = 0$) und den Endpunkt ($z = 0$) beziehen und nur einen kleinen Teil der überhaupt möglichen Aufgaben behandeln. Auch wird oben der Begriff „Schußfaktor" zum ersten Male klar definiert.

Achtes Kapitel

Reihen nach Potenzen von $\overline{w}/g$

§ 38. Lösungen der ersten Klasse

Bei Geschoßbewegungen, die dem Grenzfall der widerstandsfreien Parabel nahekommen, wird man eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von $\overline{w}/g$ anzusetzen versuchen, wo $\overline{w}$ ein geeignet zu wählender mittlerer Widerstandswert ist. Wir setzen

$$\tau = \frac{\overline{w}}{g}, \qquad \tilde{\omega}(v) = \frac{w(v)}{\overline{w}}. \tag{1}$$

Die Entwicklung von $\dot{x}$ nach Potenzen von τ heiße:

$$\dot{x} = {}_0\dot{x} + \tau \cdot {}_1\dot{x} + \tfrac{1}{2}\tau^2 \cdot {}_2\dot{x} + \tfrac{1}{6}\tau^3 \cdot {}_3\dot{x} + \cdots. \tag{2}$$

Entsprechend bezeichnen wir die Koeffizienten aller Entwicklungen nach Potenzen von τ mit vorderen Indizes.

Setzen wir diese Entwicklung in die Hauptgleichung [vgl. § 11 (16')]

$$g\, d\dot{x} = v\, w\, d\omega \tag{3}$$

ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} d_0\dot{x} &= 0\,, \\ d_1\dot{x} &= {}_0(v\,\tilde{\omega})\,, \\ d_2\dot{x} &= 2\,{}_1(v\,\tilde{\omega}) \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Für w ergibt die Entwicklung:

$$\begin{aligned} w\,(v) &= {}_0w + \tau\cdot{}_1w + \tfrac{1}{2}\,\tau^2\cdot{}_2w + \cdots\,, \\ {}_0w &= w\,({}_0v)\,, \\ {}_1w &= w'\,({}_0v)\cdot{}_1v = {}_0w'\cdot{}_1v\,, \\ {}_2w &= {}_0w''\cdot{}_1v^2 + {}_0w'\cdot{}_2v \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt erstens

$${}_0\dot{x} = \text{const} = \dot{x}_0\,, \tag{5}$$

also

$${}_0v = \dot{x}_0 \sec\omega\,, \qquad {}_0\tilde{\omega} = \frac{1}{\overline{w}}\, w\,(\dot{x}_0 \sec\omega)\,.$$

Zweitens folgt

$${}_1\dot{x} = \int {}_0v\cdot{}_0\tilde{\omega}\, d\omega = \frac{1}{\overline{w}} \int {}_0v\cdot{}_0w\, d\omega\,, \tag{6}$$

also wird auch ${}_1v = {}_1\dot{x} \sec\omega$ eine gegebene Funktion von ω.

Drittens folgt

$${}_2\dot{x} = 2\int {}_1v\cdot{}_1\tilde{\omega}\, d\omega = \frac{2}{\overline{w}} \int {}_1v^2\cdot{}_0w'\, d\omega\,, \tag{7}$$

also ${}_2v = {}_2\dot{x} \sec\omega$. Damit ist auch ${}_2w$ bekannt, usw.

Setzt man die gefundenen Werte für ${}_0\dot{x}$, ${}_1\dot{x}$, ${}_2\dot{x}$, $\cdots$ in die Reihe (2) ein, so erhält man die Entwicklung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} &= 1 + \frac{1}{g}\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sec\omega\cdot w\,(\dot{x}_0 \sec\omega)\, d\omega \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{\overline{w}}{g^2}\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sec\omega\,[w\,(\dot{x}_0 \sec\omega) + w'\,(\dot{x}_0 \sec\omega)] \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \sec\omega\cdot w\,(\dot{x}_0 \sec\omega)\, d\omega\, d\omega \\ &+ \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Setzt man die Reihe für $\dot{x}$ in die Integrale der Formeln § 13 (30) ein, so erhält man entsprechende Entwicklungen für die Schußbahnelemente

t, x, z, s. Die Entwicklung für t wird z. B.:

$$g\,t = -\int_{\omega_0}^{\omega} \dot{x}_0\, d\operatorname{tg}\omega + \tau \int_{\omega_0}^{\omega}\int_{\omega_0}^{\omega} \dot{x}_0 \sec\omega \cdot \tilde{\omega}\,(\dot{x}_0 \sec\omega)\, d\omega\, d\operatorname{tg}\omega - \cdots \quad \text{usw.}$$

Die in diesen Entwicklungen vorkommenden Integrale, wie z. B.:

$$\int\int \dot{x}_0 \sec\omega \cdot \tilde{\omega}\,(\dot{x}_0 \sec\omega)\, d\omega\, d\operatorname{tg}\omega$$

hängen von den zwei Argumenten ω und $\dot{x}_0$ ab. Dadurch wird ihre Vorausberechnung und tafelmäßige Darstellung für die Praxis so gut wie unmöglich. Für ein Bernoullisches Gesetz $w = a \cdot v^n$ jedoch läßt sich aus jedem solchen Integral eine Potenz von $\dot{x}_0$ herausziehen, so daß unter den Integralzeichen nur noch die Variable ω vorkommt. Danach ist die Berechnung und Tabulierung möglich. Dasselbe wäre bei einem mehrgliedrigen Gesetz

$$w = a_1 v^{n_1} + a_2 v^{n_2} + \cdots + a_\varkappa v^{n_\varkappa}$$

möglich, aber jedes einzelne Integral erfordert dann eine größere Anzahl von Spalten einer Tabelle.

Über die Konvergenz dieser Reihen, die von der nur tabellarisch gegebenen Funktion $\tilde{\omega}$ abhängen, gilt das § 19 über solche Reihen Gesagte.

§ 39. Lösungen der zweiten Klasse

Bei Geschoßbewegungen, die dem Grenzfall der schwerefreien Geraden nahekommen, wird man eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von $g/\bar{w}$ ansetzen, wo $\bar{w}$ wieder wie in § 38 ein passender Mittelwert ist. Die in § 36 (46) zusammengestellten Siaccischen Formeln können offenbar als erste Glieder einer derartigen Entwicklung angesehen werden. Schon Siacci hat seine Formeln als Ansatz eines strengen Verfahrens betrachtet und durch Hinzufügen eines korrigierenden Faktors zu verbessern versucht [vgl. §§ 31 bis 34]. Nunmehr sollen die Siaccischen Formeln additiv verbessert werden.

Natürlich ist dabei der Konvergenzbeweis oder besser die Fehlerabschätzung, eine notwendige Ergänzung. Mit der bloßen Konvergenz, die den Theoretiker um so mehr interessiert, je schwerer sie erkennbar ist, ist dem Praktiker nicht gedient; er braucht schnelle Annäherung an den gesuchten Wert, wie sie sich auch bei divergenten, nämlich sogenannten semikonvergenten Prozessen findet; außerdem braucht der Praktiker, wie schon hervorgehoben, eine Abschätzung des Fehlers, den man begeht, wenn man den Prozeß nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Die Konvergenz der in Folgendem behandelten Reihen ist (vgl. auch § 19) aus einem von Poincaré in der astronomischen Mechanik gebrauchten Satz zu folgern*).

*) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. 1. 1. S. 205.

Die Siacci-Formeln können in zwei verschiedenen Weisen als die Anfangsglieder von Entwicklungen auftreten, entsprechend den zwei Bedingungen, unter denen ihre Gültigkeit verbessert wird. Erstens kann man die Siacci-Formeln als diejenigen Glieder ansehen, die unter Vernachlässigung höherer Potenzen von g als der ersten übrigbleiben. Zweitens kann man die Siacci-Formeln als die Glieder ansehen, die unter Vernachlässigung von $\operatorname{tg}^2 \omega_0$ oder $\operatorname{tg}^2 \frac{\omega_0}{2}$ oder $\sin \omega_0$ übrigbleiben (Charbonnier 1927, Popoff 1931). Charbonnier berechnet die zweiten Glieder der vier Elemente $\operatorname{tg} \omega$, t, x, z. Dabei treten bei jedem Element drei neue Tabellenintegrale, also im ganzen zwölf auf. In meinen Entwicklungen nach Potenzen von g läßt sich das allgemeine Glied hinschreiben. Statt der Pseudogeschwindigkeit wird die dem Fall $g = 0$ entsprechende schwerefreie Geschwindigkeit ${}_0v$ eingeführt, wodurch die Entwicklung der Zeit einfach $t = -\int \frac{d_0 v}{{}_0 w}$ wird. Aber die Einführung der Pseudogeschwindigkeit $u = \dot{x} \sec \omega_0$ oder der schwerefreien Geschwindigkeit ${}_0v$ hat den Nachteil, daß dadurch die Ableitungen der Funktion w auftreten und die Formeln unnötig verwickelt machen*). Ich gebe daher eine zweite Entwicklung, in der ich die natürliche Geschwindigkeit v beibehalte. Diese Vereinfachung gestattet auch, den Fehler abzuschätzen.

Die als Koeffizienten von g^i auftretenden Tabellenintegrale enthalten w in der i-ten Potenz im Nenner, so daß die berechneten Tabellenintegrale immer brauchbar sind für Geschosse mit proportionalen Widerstandstabellen. In meiner unten folgenden Darstellung lasse ich die Verwendung normierter Größen fallen, führe statt w die Größe $\frac{w}{v} = c$ ein, und nehme an, daß die Größen c, $\frac{dc}{dv} = c'$, ... berechnet und in der Tabelle eingetragen sind. Die Entwicklung wird einfacher und übersichtlicher, sie ist bis zur Aufstellung der ersten nachsiaccischen Glieder nebst Abschätzung der Fehler durchgeführt. Die Größe c ist für große v wenig veränderlich, also schon c' klein, wie man aus Abb. 4 ersehen kann. Für das Chapelsche Gesetz w prop. $v - 263$ wird $c' = 263/v^2$, also z. B. für $v = 1000$ m/sec $c' = 0{,}000263$, abgesehen von einem Geschoßfaktor.

§ 40. Die Siacci-Reihen erster Art

Der durch die Gleichungen

$$\ddot{x} = -\frac{w}{v}\dot{x}, \quad \ddot{z} = -\frac{w}{v}\dot{z} - g \tag{9}$$

*) Charbonnier, Balistique extérieure II, S. 345.

und die Anfangswerte bestimmten Schußbahn [vgl. § 10 (1)] ordne ich die durch

$$\ddot{x} = -\frac{w}{v}\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = -\frac{w}{v}\dot{z} \tag{10}$$

und dieselben Anfangswerte bestimmte „schwerefreie" Schußbahn zu, deren Elemente mit

$${}_0x\,,\ {}_0z\,,\ {}_0s\,,\ {}_0v\,,\ {}_0w = w\,({}_0v)\,,\ {}_0\omega$$

bezeichnet werden. Die Gleichungen [vgl. § 10 (9), (10)]

$$\dot{v} = -w\,, \qquad v\,\dot{\omega} = 0 \tag{11}$$

ergeben

$${}_0\omega = \omega_0 \quad \text{und} \quad dt = -\frac{d\,{}_0v}{{}_0w}\,, \qquad t = -\int\limits_{v_0}^{{}_0v} \frac{d\,{}_0v}{{}_0w}\,, \tag{12}$$

ferner wird

$${}_0\dot{x} = {}_0v\cos\omega_0\,, \qquad {}_0\dot{z} = {}_0v\sin\omega_0\,, \qquad {}_0\dot{s} = {}_0v\,,$$

also

$$\left.\begin{aligned} {}_0x &= -\int \frac{{}_0v\,d\,{}_0v}{{}_0w}\cos\omega_0\,, \qquad {}_0z = -\int \frac{{}_0v\,d\,{}_0v}{{}_0w}\sin\omega_0\,,\\ {}_0s &= -\int \frac{{}_0v\,d\,{}_0v}{{}_0w}\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Diejenigen Punkte der zu (9) und (10) gehörigen Schußbahnen sollen einander zugeordnet werden, die gleichen Zeiten entsprechen. Schließlich soll vermittels (12) statt der unabhängigen Veränderlichen t die „schwerefreie" Geschwindigkeit ${}_0v$ als unabhängige Veränderliche eingeführt werden. Differentialquotienten nach ${}_0v$ werden mit Strichen bezeichnet. Es ist also z. B. für irgendeine der vorkommenden Funktionen y

$$\frac{dy}{d\,{}_0v} = y'\,, \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = y'\cdot{}_0\dot{v} = -{}_0w\,y' \tag{14}$$

und es sei

$$\left.\begin{aligned} (y)_{g=0} &= {}_0y\,, & \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_{g=0} &= {}_1y\,,\\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial g^2}\right)_{g=0} &= 2\cdot{}_2y\,,\ \cdots, & \left(\frac{\partial^i y}{\partial g^i}\right)_{g=0} &= i!\cdot{}_iy\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dann kann man formal setzen

$$y = {}_0y + {}_1y\,g + {}_2y\,g^2 + \cdots. \tag{16}$$

Da $(\omega)_{g=0} = \omega_0$, also

$$(\cos\omega)_{g=0} = \cos\omega_0\,, \qquad (\sin\omega)_{g=0} = \sin\omega_0 \tag{17}$$

und

$$(v)_{g=0} = {}_0v$$

ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} {}_0\dot{x} &= {}_0(v\cos\omega) = {}_0v\cos\omega_0\,,\\ {}_0\dot{z} &= {}_0(v\sin\omega) = {}_0v\sin\omega_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Machen wir jetzt die orthogonale Substitution

$$\left.\begin{aligned} x\cos\omega_0 + z\sin\omega_0 &= (x)\,,\\ x\sin\omega_0 - z\cos\omega_0 &= (z)\,, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

so wird in den neuen Veränderlichen (x), (z) wegen (18):

$$ {}_0(\dot{x}) = {}_0v\,, \qquad {}_0(\dot{z}) = 0 \tag{20}$$

und die Gleichungen (9) werden

$$\left.\begin{aligned} (\ddot{x}) &= -\frac{w}{v}\cdot(\dot{x}) + g\sin\omega_0\,,\\ (\ddot{z}) &= -\frac{w}{v}\cdot(\dot{z}) - g\cos\omega_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aus

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{z})^2$$

folgt durch die Operation (15)

$$ {}_0v\cdot{}_1v = {}_0(\dot{x})\cdot{}_1(\dot{x}) + {}_0(\dot{z})\cdot{}_1(\dot{z}) = {}_0v\cdot{}_1(\dot{x})\,, \qquad {}_1v = {}_1(\dot{x})\,,$$

ebenso

$$ {}_0v\cdot{}_2v + {}_1v^2 = {}_0(\dot{x})\cdot{}_2(\dot{x}) + {}_1(\dot{x})^2 + {}_0(\dot{z})\cdot{}_2(\dot{z}) + {}_1(\dot{z})^2\,, \tag{22}$$

also, wegen (20) und (22)

$$\frac{{}_2v}{{}_0v} = \frac{{}_2(\dot{x})}{{}_0v} + \left(\frac{{}_1(\dot{x})}{{}_0v}\right)^2. \tag{23}$$

Allgemein folgt aus ${}_i(v^2) = {}_i\big((\dot{x})^2\big) + {}_i\big((\dot{z})^2\big)$

$$\begin{aligned} {}_0v\cdot{}_iv + {}_1v\cdot{}_{i-1}v + \cdots &= {}_0(\dot{x})\cdot{}_i(\dot{x}) + {}_1(\dot{x})\cdot{}_{i-1}(\dot{x}) + \cdots\\ &\quad + {}_0(\dot{z})\cdot{}_i(\dot{z}) + {}_1(\dot{z})\cdot{}_{i-1}(\dot{z}) + \cdots \end{aligned}$$

durch den Schluß von $i-1$ auf i, daß ${}_iv/{}_0v$ eine ganze Funktion von ${}_1(\dot{x})/{}_0v$, ${}_2(\dot{x})/{}_0v$, $\ldots$, ${}_i(\dot{x})/{}_0v$ isobar vom Gewichte i ist, in der ${}_i(\dot{x})/{}_0v$ den Koeffizienten 1 hat. Wir setzen $w/v = c$, also

$$w = c\,v\,, \qquad w' = c'\,v + c\,, \qquad {}_0w' = {}_0c'\cdot{}_0v + {}_0c\,. \tag{24}$$

Aus

$$\begin{aligned} c &= c\,({}_0v + {}_1v\,g + {}_2v\,g^2 + \cdots)\\ &= c\,({}_0v) + c'\,({}_0v)\,({}_1v\,g + {}_2v\,g^2 + \cdots) + \tfrac{1}{2}c''\,({}_0v)\,({}_1v\,g + {}_2v\,g^2 + \cdots)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

folgern wir

$$\begin{aligned} {}_0c &= c\,({}_0v)\,,\\ {}_1c &= c'\,({}_0v)\cdot{}_1v = {}_0c'\cdot{}_1v = \left(\frac{{}_0w'}{{}_0v} - \frac{{}_0w}{{}_0v^2}\right)\cdot{}_1(\dot{x})\,, \end{aligned}$$

allgemein

$$\left.\begin{aligned} {}_ic &= {}_0c' \cdot {}_iv + \tfrac{1}{2}\, {}_0c'' \sum_{\alpha+\beta=i} {}_\alpha v \cdot {}_\beta v + \tfrac{1}{6}\, {}_0c''' \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} {}_\alpha v \cdot {}_\beta v \cdot {}_\gamma v + \cdots , \\ & (\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, \cdots, i-1) , \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

also ist ${}_ic - {}_0c' \cdot {}_i(\dot{x})$ von ${}_i(\dot{x})$ unabhängig.

In den Differentialgleichungen (21) für (x), (z) führen wir als unabhängige Veränderliche mittels (12) die schwerefreie Geschwindigkeit ${}_0v$ ein. Die Gleichungen werden

$$\left.\begin{aligned} {}_0w \cdot (\dot{x})' &= c \cdot (\dot{x}) + g \cdot \sin \omega_0 , \\ {}_0w \cdot (\dot{z})' &= c \cdot (\dot{z}) - g \cdot \cos \omega_0 . \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die von g freien Glieder ergeben

$$\left.\begin{aligned} {}_0w \cdot {}_0(\dot{x})' &= {}_0c \cdot {}_0(\dot{x}) , \qquad \text{also } {}_0w = {}_0c \cdot {}_0v , \\ {}_0w \cdot {}_0(\dot{z})' &= {}_0c \cdot {}_0(\dot{z}) = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die Glieder mit g ergeben für ${}_1(\dot{x})$

$$\left.\begin{aligned} {}_0w \cdot {}_1(\dot{x})' &= {}_1c \cdot {}_0(\dot{x}) + {}_0c \cdot {}_1(\dot{x}) + \sin \omega_0 \\ &= \left(\frac{{}_0w'}{{}_0v} - \frac{{}_0w}{{}_0v^2}\right) {}_0v \cdot {}_1(\dot{x}) + \frac{{}_0w}{{}_0v} \cdot {}_1(\dot{x}) + \sin \omega_0 , \\ &= {}_0w' \cdot {}_1(\dot{x}) + \sin \omega_0 , \\ \left(\frac{{}_1(\dot{x})}{{}_0w}\right)' \cdot {}_0w^2 &= \sin \omega_0 , \\ {}_1(\dot{x}) &= {}_0w \int_{v_0}^{{}_0v} \frac{d\,{}_0v}{{}_0w^2} \sin \omega_0 , \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ferner für ${}_1(\dot{z})$

$$\left.\begin{aligned} {}_0w \cdot {}_1(\dot{z})' &= {}_1c \cdot {}_0(\dot{z}) + {}_0c \cdot {}_1(\dot{z}) - \cos \omega_0 \\ &= \frac{{}_0w}{{}_0v} \cdot {}_1(\dot{z}) - \cos \omega_0 , \\ \left(\frac{{}_1(\dot{z})}{{}_0v}\right)' \cdot {}_0w \cdot {}_0v &= -\cos \omega_0 , \\ {}_1(\dot{z}) &= -\, {}_0v \int_{v_0}^{{}_0v} \frac{d\,{}_0v}{{}_0v \cdot {}_0w} \cos \omega_0 . \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Für die Glieder mit g^i $(i > 1)$ schreiben wir die Gleichungen (26)

$$\left.\begin{aligned} {}_0w^2 \cdot \left(\frac{(\dot{x})}{{}_0w}\right)' &= (c - {}_0w') \cdot (\dot{x}) , \\ {}_0w \cdot {}_0v \cdot \left(\frac{(\dot{z})}{{}_0v}\right)' &= (c - {}_0c) \cdot (\dot{z}) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

und erhalten für ${}_i(\dot{x})$ wegen (24)

$$\left.\begin{aligned} {}_0w^2\cdot\left(\frac{{}_i(\dot{x})}{{}_0w}\right)' &= {}_ic\cdot{}_0(\dot{x}) + {}_{i-1}c\cdot{}_1(\dot{x}) + \cdots + [{}_0c - ({}_0c'\cdot{}_0v + {}_0c)]\cdot{}_i(\dot{x}) \\ &= [{}_ic - {}_0c'\cdot{}_i(\dot{x})]\cdot{}_0(\dot{x}) + {}_{i-1}c\cdot{}_1(\dot{x}) + \cdots + {}_1c\cdot{}_{i-1}(\dot{x})\,. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Aus dieser Gleichung findet man ${}_i(\dot{x})$ durch eine bloße Quadratur, weil rechts der Koeffizient von ${}_i(\dot{x})$ Null wird [vgl. (25)].

Aus der zweiten Gleichung (30) folgt etwas einfacher

$$ {}_0w\cdot{}_0v\cdot\left(\frac{{}_i(\dot{z})}{{}_0v}\right)' = {}_{i-1}c\cdot{}_1(\dot{z}) + \cdots + {}_1c\cdot{}_{i-1}(\dot{z})\,. \quad (32)$$

Für $i = 2$ ergibt sich aus (31)

$$ {}_0w^2\cdot\left(\frac{{}_2(\dot{x})}{{}_0w}\right)' = {}_2c\cdot{}_0(\dot{x}) + {}_1c\cdot{}_1(\dot{x}) + {}_0c\cdot{}_2(\dot{x}) - {}_0w'\cdot{}_2(\dot{x})\,.$$

Durch Einsetzen von

$$ {}_2c = {}_0c'\cdot{}_2v + \tfrac{1}{2}\,{}_0c''\cdot{}_1v^2 = {}_0c'\cdot{}_2(\dot{x}) + \tfrac{1}{2}\,{}_0c'\cdot\frac{{}_1(\dot{z})}{{}_0v} + \tfrac{1}{2}\,{}_0c''\cdot{}_1(\dot{x})^2\,,$$

$$ {}_1c = {}_0c'\cdot{}_1(\dot{x}) \qquad \text{[nach (25)]}$$

erhält man

$$ {}_0w^2\cdot\left(\frac{{}_2(\dot{x})}{{}_0w}\right)' = ({}_0c' + \tfrac{1}{2}\,{}_0c''\cdot{}_0v^2)\cdot{}_1(\dot{x})^2 + \tfrac{1}{2}\,{}_0c'\cdot{}_1(\dot{z})^2\,. \quad (33)$$

Ebenso aus (32) mit (25)

$$ {}_0w\cdot{}_0v\cdot\left(\frac{{}_2(\dot{z})}{{}_0v}\right)' = {}_0c'\cdot{}_1(\dot{x})\cdot{}_1(\dot{z})\,. \quad (34)$$

Durch die schwerefreie Geschwindigkeit ${}_0v$ ausgedrückt, wird $t = -\int \frac{d\,{}_0v}{w\,({}_0v)}$, wo sich die Integration wie im folgenden immer von v_0 bis ${}_0v$ erstreckt. Für die durch (19) eingeführten Koordinaten wird

$$ {}_0(\dot{x}) = {}_0v\,,$$

$$ {}_1(\dot{x}) = {}_0w\int\frac{d\,{}_0v}{{}_0w^2}\sin\omega_0\,,$$

$$ {}_2(\dot{x}) = {}_0w\int\frac{({}_0c' + \frac{1}{2}\,{}_0c''\cdot{}_0v^2)\cdot{}_1(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}\,{}_0c'\cdot{}_1(\dot{z})^2}{{}_0w^2}\,d\,{}_0v\,,$$

$$ {}_0(\dot{z}) = 0\,,$$

$$ {}_1(\dot{z}) = {}_0v\int\frac{d\,{}_0v}{{}_0v\cdot{}_0w}\cos\omega_0\,,$$

$$ {}_2(\dot{z}) = {}_0v\int\frac{{}_0c'\cdot{}_1(\dot{x})\cdot{}_1(\dot{z})}{{}_0v\cdot{}_0w}\,d\,{}_0v\,, \qquad \text{usw.}$$

Daraus durch Multiplikation mit $dt = -\frac{d\,{}_0v}{{}_0w}$ und Integration

$$ {}_0(x) = -\int \frac{{}_0v\, d\,{}_0v}{{}_0w}\,, \qquad {}_0(z) = 0\,, $$

$$ {}_1(x) = -\iint \frac{d\,{}_0v}{{}_0w^2}\, d\,{}_0v \cdot \sin\omega_0\,, \quad {}_1(z) = -\iint \frac{d\,{}_0v}{{}_0v \cdot {}_0w} \cdot \frac{{}_0v\, d\,{}_0v}{{}_0w} \cos\omega_0\,, \text{ usw.} $$

Alle auftretenden Integrale sind Tabellenintegrale, die an Hand der Widerstandstafel vorweg zu berechnen und in die Tafel einzutragen sind. Die in t, ${}_1(\dot z)$, ${}_0(x)$, ${}_1(z)$ auftretenden Integrale sind die in § 31 (7) eingeführten Siaccischen Funktionen T, J, D, A. Die in ${}_1(\dot x)$, ${}_1(x)$ auftretenden sind neu und sollen mit K und B bezeichnet werden. Da sie mit $\sin\omega_0$ multipliziert sind, fallen sie bei Flachbahnen mit kleinem ω_0 fort. Nimmt man sie hinzu, so werden die so ergänzten Siacci-Formeln auch für Bahnen mit nicht kleinen ω_0 brauchbar. Genügen diese Glieder noch nicht, so nimmt man die Glieder ${}_2(\dot x)$, ${}_2(\dot z)$, ${}_2(x)$, ${}_2(z)$ hinzu. Damit werden für die Geschwindigkeitskomponenten und für die Koordinaten weitere Tabellenintegrale nötig. Von ω_0 kommen in ${}_2(\dot x)$ und ${}_2(x)$ nur $\sin^2\omega_0$, $\cos^2\omega_0$, in ${}_2(\dot z)$ und ${}_2(z)$ nur $\sin\omega_0 \cdot \cos\omega_0$ vor. Allgemein sind die Integranden von ${}_i(x)$, ${}_i(\dot z)$ ganze isobare Funktionen von ${}_1(\dot x)$, ${}_1(\dot z)$, $\ldots$, ${}_{i-1}(\dot x)$, ${}_{i-1}(\dot z)$ vom Gewichte i. Die Funktionen $c = w/v$, $c' = (w/v)' = w'/v - w/v^2$, $\ldots$ sind ebenfalls in die Tafel einzutragen. Für große v ist c langsam veränderlich, schon c' klein, für das Chapelsche Gesetz gleich $263/v^2$ bis auf einen Geschoßfaktor.

Behält man nur die Glieder bis zur ersten Ordnung in g bei, so erhält man die Formeln

$$ \begin{aligned} (x) &= D - g\,B \sin\omega_0\,, \\ (z) &= \phantom{D - {}} g\,A \cos\omega_0 \end{aligned} $$

oder, wenn man zu den ursprünglichen Koordinaten [s. Gleichung (19)] zurückgeht,

$$ \begin{aligned} x \sec\omega_0 &= D - g\,(B - A) \sin\omega_0\,, \\ x \operatorname{tg}\omega_0 - z &= g\,A\,. \end{aligned} $$

Bei der Abschätzung der Integrale kann man folgende Formeln anwenden, in denen $v_0 - {}_0v = \Delta v$ gesetzt ist und der Index m Mittelwerte kennzeichnet:

$$ T = -\int \frac{d\,{}_0v}{{}_0w} = \frac{\Delta v}{w_m}\,, $$

$$ D = -\int \frac{{}_0v\, d\,{}_0v}{{}_0w} = \frac{\Delta v}{(w/v)_m}\,, $$

$$ K = -\int \frac{d\,{}_0v}{{}_0w^2} = \frac{\Delta v}{w_m^2}\,, \qquad {}_0w\,K = \frac{\Delta v}{w_m}\,, $$

$$B = -\int K\, d_0 v \;= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v}{w_m}\right)^2,$$

$$J = -\int \frac{d_0 v}{{}_0v \cdot {}_0w} = \frac{\Delta v}{(v \cdot w)_m}, \qquad {}_0vJ = \frac{\Delta v}{w_m},$$

$$A = -\int J \frac{{}_0v\, d_0 v}{{}_0w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta v}{w_m}\right)^2, \quad \text{usw.}$$

Die Siaccische Pseudogeschwindigkeit $\dot{x} \sec \omega_0$ mag für Flachbahnen, d. h. für Bahnen, die der Waagerechten nahebleiben, zweckmäßig sein. Die schwerefreie Geschwindigkeit ${}_0v$ empfiehlt sich dagegen bei rasanten Bahnen, das sind solche, die der Anfangstangente nahebleiben, bei denen also die Gesamtkrümmung $\Delta w/\Delta s$ klein bleibt. Aber die Wahl einer Veränderlichen, die nicht diejenige ist, von der w abhängt, führt zwangsläufig dazu, daß außer w auch w', w'', ... auftreten und dadurch die Formeln umständlich werden. Ebenso zieht die Einführung der meromorphen Funktion $\operatorname{tg} \omega_0$, die beliebig große Werte annehmen kann, anstatt der in den ursprünglichen Gleichungen (21) vorkommenden holomorphen $\sin \omega_0$, $\cos \omega_0$, deren Beträge Eins nicht überschreiten, weitere Komplikationen nach sich. Deshalb werden bei Charbonnier schon die zweiten Glieder sehr weitläufig, Popoff begnügt sich mit Angabe der ersten Glieder, die natürlich die Siaccischen sind.

§ 41. Die Siacci-Reihen zweiter Art

Ich gehe von den Formeln [vgl. § 10 (9), (10)] aus

$$\dot{v} = -w - g \sin \omega, \qquad v\,\dot{\omega} = -g \cos \omega, \tag{35}$$

setze

$$\frac{g}{w} = \gamma \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1 + \gamma \sin \omega} = k. \tag{36}$$

Dann besteht die Reduktionsformel für k

$$k = 1 - \gamma k \sin \omega. \tag{37}$$

Die ω-Formeln. Aus den Gleichungen (35) folgt

$$-\frac{d\omega}{\cos \omega} = \frac{g}{v}\, dt = -\gamma k \frac{dv}{v} = k\, dJ, \tag{38}$$

wo gesetzt ist

$$-\gamma \frac{dv}{v} = dJ, \qquad J = -\int \gamma \frac{dv}{v}. \tag{39}$$

Hier, wie im folgenden, ist die Integration von v_0 bis v zu erstrecken.

Aus (38) folgt durch Integration

$$\Omega - \Omega_0 = \int k\, dJ, \tag{40}$$

wo

$$\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)=\Omega \tag{41}$$

gesetzt ist. Aus (38) folgen ferner

$$\left.\begin{aligned}
\sin^n\omega-\sin^n\omega_0 &= -n\int k\,dJ\cdot\sin^{n-1}\omega\cdot\cos^2\omega\,,\\
\cos^n\omega-\cos^n\omega_0 &= n\int k\,dJ\cdot\cos^n\omega\cdot\sin\omega\,,\\
\operatorname{tg}^n\omega-\operatorname{tg}^n\omega_0 &= -n\int k\,dJ\cdot\operatorname{tg}^{n-1}\omega\cdot\sec\omega\,.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

und insbesondere für $n=1$ die Reduktionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
\sin\omega &= \sin\omega_0-\int k\,dJ\cdot\cos^2\omega\,,\\
\cos\omega &= \cos\omega_0+\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\sin\omega\,,\\
\operatorname{tg}\omega &= \operatorname{tg}\omega_0-\int k\,dJ\cdot\sec\omega
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

und aus den beiden ersten noch

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\omega_0-\omega) &= \int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\cos(\omega_0-\omega)\,,\\
\cos(\omega_0-\omega) &= 1+\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\sin(\omega_0-\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

und aus (43) und (37)

$$k\sin\omega=\sin\omega_0-k\gamma\sin\omega\cdot\sin\omega_0-k\int k\,dJ\cdot\cos^2\omega\,,$$

$$k\cos\omega=\cos\omega_0-k\gamma\sin\omega\cdot\cos\omega_0+k\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\sin\omega\,.$$

Die t- und s-Formeln. Aus (35) folgt

$$g\,dt=-k\gamma\,dv=k\,dT\,,\qquad g\,t=\int k\,dT\,, \tag{45}$$

wenn man

$$-\gamma\,dv=dT,\qquad T=-\int\gamma\,dv \tag{46}$$

setzt. Ferner aus (45) vermittels $v\,dt=ds$

$$g\,ds=-k\gamma v\,dv=k\,dS\,,\qquad g\,s=\int k\,dS\,, \tag{47}$$

wenn man

$$-\gamma v\,dv=dS\,,\qquad S=-\int\gamma v\,dv \tag{48}$$

setzt.

Die x- und z-Formeln. Aus (47) folgt

$$\left.\begin{aligned}
g\,dx &= k\,dS\cdot\cos\omega\,,\\
g\,dz &= k\,dS\cdot\sin\omega\,,
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

also

$$\left.\begin{aligned}
g\,x &= \int k\,dS\cdot\cos\omega\,,\\
g\,z &= \int k\,dS\cdot\sin\omega
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
x\cos\omega_0+z\sin\omega_0 &= (x)\,,\\
x\sin\omega_0-z\cos\omega_0 &= (z)
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} g\cdot(x) &= \int k\,dS\cdot\cos(\omega_0-\omega)\,,\\ g\cdot(z) &= \int k\,dS\cdot\sin(\omega_0-\omega)\,.\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

Die Reduktion. Durch Anwendung von (37) auf (40), (45), (47) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Omega-\Omega_0 &= J-\int\gamma\,k\,dJ\cdot\sin\omega\,,\\ g\,t &= T-\int\gamma\,k\,dT\cdot\sin\omega\,,\\ g\,s &= S-\int\gamma\,k\,dS\cdot\sin\omega\,.\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

Aus (52) folgt durch Anwendung von (44)

$$\left.\begin{aligned} g\cdot(x) &= \int k\,dS+\int k\,dS\left[\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\sin(\omega_0-\omega)\right],\\ g\cdot(z) &= \int k\,dS\left[\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\cos(\omega_0-\omega)\right]\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

und durch Anwendung von (37) auf k in $\int k\,dS$

$$\left.\begin{aligned} g\cdot(x) &= S-\int\gamma\,k\,dS\cdot\sin\omega\\ &\quad+\int\left[\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\sin(\omega_0-\omega)\right]k\,dS\,,\\ g\cdot(z) &= \int\left[\int k\,dJ\cdot\cos\omega\cdot\cos(\omega_0-\omega)\right]k\,dS\,.\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Die Ordnung jedes Integrals ist die Anzahl der darin vorkommenden Faktoren $\gamma=g/w$. Die von k und ω freien Glieder in (53) und (55) sind von der Ordnung 1. Die folgenden Glieder sind die Restglieder, die man durch Einsetzen von Mittelwerten für k und ω abschätzen kann. Es treten dann die neuen Tabellenintegrale auf:

$$\int\gamma\,dJ\,,\qquad\int\gamma\,dT\,,\qquad\int\gamma\,dS\,,\qquad\int J\,dS\,,\tag{56}$$

die von der Ordnung 2 sind. Unter Beschränkung auf die Tabellenintegrale bis zur zweiten Ordnung bekommt man die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Omega-\Omega_0 &= J-\int\gamma\,dJ\cdot k_m\sin\omega_m\,,\\ g\,t &= T-\int\gamma\,dT\cdot k_m\sin\omega_m\,,\\ g\,s &= S-\int\gamma\,dS\cdot k_m\sin\omega_m\,,\\ g\cdot(x) &= S-\int\gamma\,dS\cdot k_m\sin\omega_m+\int J\,dS\cdot k_m^2\cos\omega_m\cdot\sin(\omega_0-\omega_m)\,,\\ g\cdot(z) &= \int J\,dS\cdot k_m^2\cos\omega_m\cdot\cos(\omega_0-\omega_m)\,.\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

Hier bedeuten k_m und ω_m in jedem Gliede andere Mittelwerte. Die Integrale J, T, S entsprechen den Siaccischen J, T, D. Das Integral $\int J\,dS=\int[J(v)-J(v_0)]\,dS=\int J(v)\,dS-J(v_0)\cdot[S(v)-S(v_0)]$ entspricht dem Siaccischen A. Kann man bei rasanten Bögen, also bei großem v, kleinem γ und wenig veränderlichem ω, $k=1$ und $\omega_m = \omega_0$ nehmen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\Omega - \Omega_0 &= J - \int \gamma\, dJ \cdot \sin\omega_0\,,\\
g\,t &= T - \int \gamma\, dT \cdot \sin\omega_0\,,\\
g\,s &= S - \int \gamma\, dS \cdot \sin\omega_0\,,\\
g\cdot(x) &= S - \int \gamma\, dS \cdot \sin\omega_0\,,\\
g\cdot(z) &= \int J\, dS \cdot \cos\omega_0
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
g\,x \sec\omega_0 &= S - \int (\gamma - J)\, dS \cdot \sin\omega_0\,,\\
g\,(x \operatorname{tg}\omega_0 - z) &= \int J\, dS\,.
\end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Die Formeln (58) bilden den ersten Schritt zur Verbesserung der Siacci-Formeln. Auf die Zweckmäßigkeit der Einführung von $\Omega = \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)$ statt $\operatorname{tg}\omega$, wie bei Siacci, hat mich mein früherer Schüler Dipl.-Ing. Gustav Günther aufmerksam gemacht.

Die Fehler der Formeln (58) bekommt man, indem man auf die Formeln (53) bis (55) die Reduktionsformeln anwendet.

Die von k und ω freien Glieder sind dann die der Formeln (58). Die übrigen sind entweder durch Einsetzen von Mittelwerten für k und ω abzuschätzen, wobei Integrale dritter Ordnung auftreten; oder sie sind ebenso weiter zu reduzieren. Innerhalb der Integranden treten immer nur γ und J auf in Verbindungen der betreffenden Ordnung.

ω_0 kommt nur in Potenzen von $\sin\omega_0$ und $\cos\omega_0$ vor. Nach den Graden geordnet, erhält man die folgenden Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega - \Omega_0 &= J - \int \gamma\, dJ \cdot \sin\omega_0 + \int \gamma^2\, dJ \cdot \sin^2\omega_0\\
&\qquad - \int \gamma\, J\, dJ \cdot \cos^2\omega_0 + \cdots\,,\\
g\,t &= T - \int \gamma\, dT \cdot \sin\omega_0 + \int \gamma^2\, dT \cdot \sin^2\omega_0\\
&\qquad - \int \gamma\, J\, dT \cdot \cos^2\omega_0 + \cdots\,,\\
g\,s &= S - \int \gamma\, dS \cdot \sin\omega_0 + \int \gamma^2\, dS \cdot \sin^2\omega_0\\
&\qquad - \int \gamma\, J\, dS \cdot \cos^2\omega_0 + \cdots\,,\\
g\,x \sec\omega_0 &= S - \int (\gamma - J)\, dS \cdot \sin\omega_0 + \int \gamma\,(\gamma - J)\, dS \cdot \sin^2\omega_0\\
&\qquad - \int \gamma\,(\gamma - J)\, dS \cdot \cos^2\omega_0 + \cdots\,,\\
g\,(x \operatorname{tg}\omega_0 - z) &= \int J\, dS + \int \gamma\, J\, dS \cdot \sin^2\omega_0 - \int J^2\, dS \cdot \cos^2\omega_0 + \cdots\,.
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Abgesehen von der Herleitung unterscheiden sich die Reihen erster Art von denen zweiter Art dadurch, daß bei den ersteren jedes Integral höherer Ordnung durch eine Quadratur aus einer ganzen Funktion von Integralen der niedrigeren Ordnungen gebildet wird, während bei den letzteren aus jedem Integral solche höherer Ordnung dadurch entstehen, daß man im Integranden auf k und ω die Reduktionsformeln anwendet. Bei den ersteren häufen sich die Quadraturen von außen, bei den letzteren von innen. Bei den Reihen zweiter Art ergibt jeder weitere Schritt zugleich den Rest in einer abschätzbaren Form.

Die in (59) auftretenden Funktionen J, T, S entsprechen den in § 31 (7) eingeführten Siacci-Funktionen J, gT, gD.

§ 42. Integrable Formen für das Widerstandsgesetz

Bei den Entwicklungen für die erste Klasse nach steigenden Potenzen von w/g tritt unter den Integralzeichen die Funktion w (und ihre Ableitungen) nur in den Zählern auf; bei den Entwicklungen für die zweite Klasse nach steigenden Potenzen von g/w tritt w nur in den Nennern auf. Dadurch wird es nahegelegt, im ersten Fall w zu approximieren durch Gesetze von der Form

$$w = c_1 v^{n_1} + c_2 v^{n_2} + \cdots c_\varkappa v^{n_\varkappa}, \tag{60}$$

im zweiten Fall durch solche der Form

$$\frac{1}{w} = \frac{i_1}{v^{n_1}} + \frac{i_2}{v^{n_2}} + \cdots + \frac{i_\varkappa}{v^{n_\varkappa}}. \tag{61}$$

Denn für solche Formen des Widerstandsgesetzes zerfallen alle auftretenden Integrale in voraus berechenbare Tabellenintegrale. So entsteht die Aufgabe, aus der Widerstandstabelle solche Formen abzuleiten. Es genügt hierzu, den Weg für $\varkappa = 2$ zu zeigen. Andererseits wollen wir die Frage noch nach anderer Richtung verallgemeinern. Es sei für ein Geschoß eine Widerstandstabelle $w = w_1(v)$ erschossen, für ein zweites Geschoß ebenso $w = w_2(v)$. Findet sich jetzt $w_2 = c \cdot w_1$, so wollen wir das zweite Geschoß dem ersten „ballistisch ähnlich" nennen. Die ältere Annahme war, daß alle Geschosse ballistisch ähnlich sind, wenigstens mit einer für die Praxis ausreichenden Annäherung. Heute reicht diese Annahme nicht immer aus. Sind die beiden zu $w_1(v)$ und $w_2(v)$ gehörenden Geschosse nicht ähnlich, so kann man sie als zwei Normalgeschosse einführen und die Widerstände anderer Geschosse in die Form $c_1 w_1(v) + c_2 w_2(v)$, bzw. die reziproken in die Form $\dfrac{1}{c_1 w_1(v)} + \dfrac{1}{c_2 w_2(v)}$ zu setzen suchen. Ist $w_3(v)$ die Widerstandstabelle eines dritten Geschosses, so liefert die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} w_1^\varepsilon(v) & w_1^\varepsilon(v_1) & w_1^\varepsilon(v_2) \\ w_2^\varepsilon(v) & w_2^\varepsilon(v_1) & w_2^\varepsilon(v_2) \\ w_3^\varepsilon(v) & w_3^\varepsilon(v_1) & w_3^\varepsilon(v_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (\varepsilon = +1 \text{ bzw. } -1)$$

$w_3^\varepsilon(v)$ als lineares Aggregat von $w_1^\varepsilon(v)$ und $w_2^\varepsilon(v)$. Ist dies nicht für alle Geschwindigkeiten v_1, v_2*) des in Betracht kommenden Intervalles möglich, so ist das dritte Geschoß als drittes Normalgeschoß einzuführen usw.

Die Berechnung der für Widerstandsgesetze der Form (60) oder (61) auftretenden Tabellenintegrale wird vereinfacht, wenn man die Tabellen der Normalgeschosse durch Bernoullische Gesetze $w = a \cdot v^n$ approximiert. Aus jeder Stelle w_0, v_0 einer Tabelle leitet man vermittels $n = \frac{v_0 w_0'}{w_0}$, $a = \frac{w_0}{v_0^n}$ das „oskulierende" Gesetz her; aus je zwei Stellen w_0, v_0, w_1, v_1 folgt durch Auflösung der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lg w(v_0) &= \lg a + n \lg v_0 \\ \lg w(v_1) &= \lg a + n \lg v_1 \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

das „interpolierende" mit $n = \frac{\lg w(v_0) - \lg w(v_1)}{\lg v_0 - \lg v_1}$, aus dem für $v_1 = v_0$ das oskulierende hervorgeht. Beste Annäherung an mehr als zwei Stellen wäre nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsummen zu bewirken.

Statt mehrere Normalgeschosse zugrunde zu legen, kann man auch aus der Tabelle eines solchen durch Annäherung an verschiedenen Stellen derselben Bernoullische Gesetze $c_1 v^{n_1}$, $c_2 v^{n_2}$, ... ableiten und diese als Gesetze von „fiktiven" Geschossen einführen.

Ähnlich ist das Verfahren von v. Eberhard, das darauf hinauskommt, die reziproke Verzögerung durch ein dreigliedriges Gesetz $\frac{i}{w} + \frac{i_1}{w:v} + \frac{i_2}{w \cdot v}$ zu approximieren, wobei w die Verzögerung des Normalgeschosses ist, also $w:v$ und $w \cdot v$ als Verzögerungen von zwei „fiktiven" Geschossen gedacht werden können. Bei dieser Wahl von fiktiven Geschossen kommen offenbar zu den Tabellenintegralen

$$T = -\int \frac{dv}{w}, \quad D = -\int \frac{dv}{w:v}, \quad J = -\int \frac{g\,dv}{w \cdot v}, \quad A = -\int\!\!\int \frac{g\,dv}{w \cdot v} \cdot \frac{dv}{w:v}$$

möglichst wenig (nur 7) neue hinzu. Bei v. Eberhard wird $i + i_1 v + i_2 : v$ als Korrektur des reziproken Geschoßfaktors aufgefaßt.

*) Man kann auch $v_2 = v_1$ nehmen, dann ist die dritte Spalte obiger Determinante durch die Ableitung der zweiten zu ersetzen.

Neuntes Kapitel

Störungen der Schußbahn, insbesondere durch Tageseinflüsse

§ 43. Die Hauptformeln

Die Schußtafeln, auf denen das Schießen beruht, geben zu den Anfangselementen v_0, ω_0 und dem Geschoßfaktor die Endelemente x^0, t^0, ω^0, v^0 an, wie sie teils durch Rechnung, teils durch Schießversuche gefunden worden sind. Die Anfangselemente eines Schusses werden aber mit gegebenen Anfangselementen der Schußtafel nicht immer genau übereinstimmen, sondern können infolge störender Einflüsse davon abweichen. Man wird dann nicht die ganze Schußbahn neu berechnen, sondern sie aus der nächsten in der Schußtafel enthaltenen durch Anbringung von Korrekturen ableiten.

Es handelt sich also in erster Linie um die Aufgabe: Um welche Beträge Δx^0, Δt^0, ... ändern sich die Endelemente x^0, t^0, ..., wenn die Anfangselemente v_0, w_0, ω_0 kleine Änderungen Δv_0, Δw_0, $\Delta \omega_0$ erfahren?

Dabei werden, was meist genügt, diese Änderungen wie kleine Größen erster Ordnung, also wie Differentiale behandelt.

Bei sonstigen hierauf gerichteten Untersuchungen wird ein bestimmtes Luftwiderstandsgesetz angenommen und die sogenannten Bernoullischen Näherungslösungen der Differentialgleichungen für x und z zugrunde gelegt. Demgegenüber werden im folgenden nur einige sehr allgemeine Voraussetzungen gemacht. Dadurch wird der Geltungsbereich einiger bekannter Formeln erst erkennbar, einige werden verbessert, einige neu hinzugefügt, z. B. die auf den Einfluß des Regens auf die Schußbahn bezüglichen. Der theoretischen Erörterung folgen Vorschläge für die praktische Verwertung.

Wir nehmen jetzt an, daß entweder g/w_0 oder w_0/g so klein ist, daß wir die Gleichungen § 17 (5) für Grenzbahnen zugrunde legen können. Die erstere Annahme wird auch sonst unausgesprochen gemacht, denn auf ihr und auf der Annahme des Bernoullischen Gesetzes beruhen die sogenannten Didion-Bernoullischen Näherungslösungen (s. § 20).

Diese allgemeinen Formeln § 17 (5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_0}{v_0^2}\, x \sec \omega_0 &= \Phi\left(\frac{w_0}{v_0}\, t\right) \\ \frac{w_0}{v_0^2}\,(x \operatorname{tg} \omega_0 - z) &= \frac{g}{w_0}\, \Psi\left(\frac{w_0}{v_0}\, t\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

genügen, um die gesuchten Ausdrücke für Δx^0, Δt^0, ... abzuleiten.

Ändert sich zunächst ω_0 nicht, so erhält man durch logarithmische Differentiation aus (1)

$$\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0^2}x\right)}{\frac{w_0}{v_0^2}x}=\frac{\varDelta\Phi}{\Phi}=\frac{\Phi'}{\Phi}\cdot\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0}t\right)=\frac{\dot\Phi}{\Phi}\cdot\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0}t\right)}{\frac{w_0}{v_0}}=\frac{\dot x}{x}\cdot\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0}t\right)}{\frac{w_0}{v_0}} \tag{2}$$

und ebenso

$$\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0^2}(x\operatorname{tg}\omega_0-z)\right)}{\frac{w_0}{v_0^2}(x\operatorname{tg}\omega_0-z)}=\frac{\varDelta\frac{g}{w_0}}{\frac{g}{w_0}}+\frac{\varDelta\Psi}{\Psi}=-\frac{\varDelta w_0}{w_0}+\frac{\dot x\operatorname{tg}\omega_0-\dot z}{x\operatorname{tg}\omega_0-z}\cdot\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0}t\right)}{\frac{w_0}{v_0}}\cdot \tag{3}$$

Setzt man $t=t^0$, $x=x^0$, $z=z^0=0$, $\varDelta z^0=0$, $\dot z^0=-\operatorname{tg}|\omega^0|\cdot\dot x^0$, so ergibt die Differenz der Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\dot x^0}{x^0}\cdot\frac{\operatorname{tg}|\omega^0|}{\operatorname{tg}\omega_0}\cdot\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0}t^0\right)}{\frac{w_0}{v_0}}=\frac{\varDelta w_0}{w_0} \tag{4}$$

und dann ergibt (2):

$$\frac{\varDelta\left(\frac{w_0}{v_0^2}x^0\right)}{\frac{w_0}{v_0^2}x_0}=\frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\cdot\frac{\varDelta w_0}{w_0}$$

oder

$$\frac{\varDelta x^0}{x^0}=2\frac{\varDelta v_0}{v_0}-\left(1-\frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\cdot\frac{\varDelta w_0}{w_0}\,. \tag{5}$$

Aus (4) kann durch Einsetzen von $\dot x^0=v^0\cos\omega^0$ die Änderung von t^0, aus (5) diejenige von x^0 berechnet werden. Die Größen x^0, t^0, v^0, $|\omega^0|$ liefert die Schußtafel.

Bei diesen Formeln wird von periodischen Änderungen der Schußweite x^0 und der Schußzeit t^0 abgesehen, wie sie bedingt werden durch Geschwindigkeitsänderung der konischen Pendelung (s. Kap. XI § 58) und dadurch bewirkte Phasenänderung der Pendelung am Endpunkt. Wir betrachten z. B. nur kleine Änderungen von v_0, wie sie mit wachsender Schußzahl infolge Erwärmung des Rohres hervorgerufen werden. Ist δv_0 der kleine Geschwindigkeitszuwachs, durch den die Zahl der konischen Pendelungen bis zum Aufschlag um Eins vermehrt wird, dann erreicht in jedem der Intervalle:

$$\cdots v_0+2\,\delta v_0\cdots v_0+\delta v_0\cdots v_0\cdots v_0-\delta v_0\cdots v_0-2\,\delta v_0\cdots$$

die Schußweite x^0 einmal ein Maximum, einmal ein Minimum, und die zugehörigen Zeitdifferenzen ergeben die Zeitdauer einer konischen Pendelung am Ende der Schußzeit. Hiermit finden die kleinen periodischen Änderungen infolge wachsender Schußzahl ihre bisher nicht gegebene Erklärung. Diese kleinen periodischen Änderungen sind also in den Formeln (4) und (5) nicht berücksichtigt, wie sie auch sonst nicht berücksichtigt, vielmehr in die Streuungen eingerechnet werden.

Ändert sich v_0 nicht, sondern nur w_0, so folgt aus (5) für $\Delta v_0 = 0$:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\frac{\Delta w_0}{w_0}. \tag{6}$$

Rührt die Änderung von w_0 von der Änderung des Luftgewichtes δ her, so ist (s. § 9):

$$\frac{\Delta w_0}{w_0} = \frac{\Delta\delta}{\delta}$$

in (6) einzusetzen. So wird die Formel (6) meist geschrieben. Es ist aber zu bemerken, daß eine Änderung von w_0 auch davon herrühren kann, daß man zu einem etwas anderen Geschoß übergeht. Dann ist $\Delta w_0/w_0$ gleich der relativen Änderung des Geschoßfaktors c, also

$$\frac{\Delta w_0}{w_0} = \frac{\Delta c}{c}.$$

Umgekehrt kann aus Schießversuchen vermittelst (6) die relative Änderung des Geschoßfaktors c ermittelt werden. Dann läßt sich die Schußtafel vermittelst (6) und der entsprechenden Formeln für Δt^0 usw. für das neue Geschoß umrechnen.

Ändert sich v_0 und infolgedessen w_0, so entnehme man aus der Widerstandstafel zu den Werten v_0, w_0 die Differenzen Diff v_0, Diff w_0 und berechne n aus der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{Diff} w_0}{w_0} = n \cdot \frac{\operatorname{Diff} v_0}{v_0},$$

durch die n als definiert anzusehen ist; dann wird aus (5) gefunden:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \left(2 - n + n \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\frac{\Delta v_0}{v_0}. \tag{7}$$

Es ändere sich das Gewicht $G = m\,g$ des Geschosses infolge Änderung der Masse m. Es bleibe unverändert die Pulverladung oder, allgemeiner ausgedrückt, ihre Energieentwicklung. Dann ändert sich die Geschwindigkeit v_0 so, daß $m\,v_0^2$ unverändert bleibt. Die Energie der Rotation kann neben der Energie der Translation vernachlässigt werden (s. Kap. XIII). Also ist $\Delta m\,v_0^2 = 0$, d. h.

$$\frac{\Delta v_0}{v_0} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta m}{m}.$$

Infolgedessen ergibt (7)

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \left[\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right) - 1\right]\frac{\Delta m}{m}\,. \tag{8}$$

Da der Quotient $\operatorname{tg}\omega_0/\operatorname{tg}|\omega^0|$ kleiner als Eins ist, folgert man aus (8) in Übereinstimmung mit der Erfahrung: Kleine Schußweiten wachsen, größere nehmen ab durch Verkleinern des Geschoßgewichtes, für $n \leqq 2$; sonst nur bei hinreichend flachen oder hinreichend steilen Bahnen.

Dabei ist aber die Änderung des Luftgewichtes mit der Höhe nicht berücksichtigt, wovon man nur bei Flachbahnen, aber nicht bei Steilbahnen absehen darf.

Ändert sich nur ω_0, so geht man zweckmäßig auf die Gleichungen § 18 (7) zurück:

$$x = X\cos\omega_0\,, \qquad z = X\sin\omega_0 - Z = 0\,.$$

Da X und Z unabhängig von ω sind, erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta x^0}{x^0} &= -\operatorname{tg}\omega_0\cdot\Delta\omega_0 + \frac{\dot X^0}{X^0}\cdot\Delta t^0,\\
\frac{\Delta z^0}{Z^0} &= \operatorname{ctg}\omega_0\cdot\Delta\omega_0 + \left(\frac{\dot X^0}{X^0} - \frac{\dot Z^0}{Z^0}\right)\Delta t^0 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

also wegen

$$\frac{\dot Z^0}{Z^0} = \frac{\dot x^0\operatorname{tg}\omega_0 - \dot z^0}{x^0\operatorname{tg}\omega_0 - z^0} = \frac{\dot x^0}{x^0}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}|\omega^0|}{\operatorname{tg}\omega_0}\right)$$

zur Bestimmung von Δx^0 und Δt^0:

$$\frac{\dot x^0}{x^0}\cdot\Delta t^0 = \operatorname{ctg}|\omega^0|\cdot\Delta\omega_0\,, \tag{10}$$

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = (\operatorname{ctg}|\omega^0| - \operatorname{tg}\omega_0)\Delta\omega_0\,. \tag{11}$$

Die sonst übliche Formel ist:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \left(\operatorname{ctg}|\omega^0| - \frac{\operatorname{tg}^2\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\Delta\omega_0\,, \tag{11'}$$

die gewöhnlich geschrieben wird: $\dfrac{\Delta x^0}{x^0} = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}2\,\omega_0\cdot\operatorname{tg}|\omega^0|}\cdot\Delta\omega_0$ (s. z. B. Cranz, Ballistik 1917, I, S. 287). In der Form (11′) kann man sie besser mit (11) vergleichen. Weil $\dfrac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}$ ein echter Bruch ist, liefert (11′) größere Korrekturen als (11), so lange $\operatorname{tg}\omega_0\cdot\operatorname{tg}|\omega^0| < 1$ ist.

In § 13 nannten wir eine Bahn flach oder steil, je nachdem $\Delta x^0/\Delta\omega_0$ größer oder kleiner als Null ist; nach (11) heißt das jetzt: je nachdem $\omega_0 + |\omega^0|$ kleiner oder größer als 90^0 ist. Und für die Höchstschußweite ($\Delta x^0 = 0$), $\omega_0 + |\omega^0| = 90^0$ folgt wegen $|\omega^0| > \omega_0$, daß $\omega_0 < 45^0$ sein muß; während (11′) ergäbe $\omega_0 = 45^0$. Demnach entspricht (11) besser der Erfahrung als (11′).

Die Formeln (6), (7), (8), (11′) finden sich schon bei Majevski*), aber hergeleitet aus den Ausdrücken, die sich unter Annahme des Bernoullischen Gesetzes $w = a\,v^n$ für die Schußbahnelemente ergeben.

Der Unterschied der Formeln (11) und (11′) erklärt sich so: In (11) werden die Schußbahnen durch die Grenzbahnen aus § 18 angenähert,

$$x = X(t) \cos \omega_0$$
$$z = X(t) \sin \omega_0 - Z(t)\,,$$

wo $X(t)$, $Z(t)$ nicht von ω_0 abhängen. Die Majevskischen Formeln dagegen stützen sich auf die in § 20 behandelten Näherungsbahnen

$$x = F_1 \cos \omega_0$$
$$z = F_1 \sin \omega_0 - gF_2\,,$$

wo F_1, F_2 außer von t auch noch von ω_0 abhängen, wie man aus § 20 (30) erkennt.

Zur Rechtfertigung unserer Annahme ist auch auf die Reihenentwicklungen des § 19 zu verweisen.

Den Einfluß einer Änderung von ω_0 können wir auch geometrisch ableiten. Setzt man die Schwenkung der Schußbahn um den Winkel $\varDelta\,\omega_0$ als zulässig voraus, so sind (Abb. 28) Q^0PRS, $QP^0R^0S^0$ Parallelogramme, also

$$PQ^0 \# RS\,,$$
$$P^0Q \# R^0S^0\,,$$

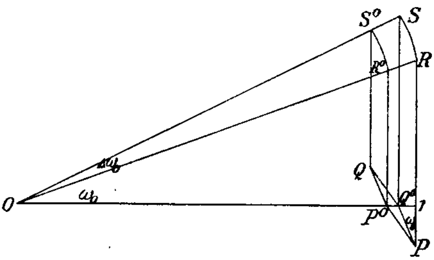

Abb. 28

*) „Probleme des Schießens", deutsch von Klußmann, Berlin 1886, S. 25 und 26; (6), (7), (8), (11′) = (7), (9), (10), (11).

Man vergleiche hierzu die Formeln (1), (2), (3) bei Majevski, a. a. O. S. 22, 23; Cranz, „Ballistik" (1896) S. 89 und oben (19) bis (24) in § 12.

Majevskis Formel (11) unterscheidet sich von (11′) noch durch den zu $\varDelta\,\omega_0$ hinzugefügten Faktor sin 1′. Da dies sowohl dem Übersetzer (s. S. 25 und 26 Anm.) als dem Rezensenten im „Arch. f. Art.- u. Ing.-Off.", Bd. 93 (1886) S. 490 unverständlich ist, sei bemerkt, daß dadurch Übergang von Bogenmaß zu Minuten bezweckt wird. — Noch nach Majevski kommen vielfach falsche Formeln vor, z. B. $\frac{\varDelta x^0}{x^0} = -\frac{\varDelta \delta}{\delta}$. Vgl. „Arch. f. Art.- u. Ing.-Off.", Bd. 93 (1896) S. 73, Bd. 94 (1887) S. 231, Bd. 97 (1890) S. 225. Die Bemerkung Bd. 94 (1887) S. 244: „eine durch Schall gemessene Entfernung bleibt als Schußweite richtig, da Temperaturänderungen Schallgeschwindigkeit und Schußweite gleich beeinflussen", beruht auf der ähnlichen falschen Annahme, daß

$$\frac{\varDelta x^0}{x^0} = -k\frac{\varDelta \delta}{\delta}\,,$$

wenn $k\frac{\varDelta\delta}{\delta}$ die relative Änderung der Schallgewindigkeit $\mathfrak{s}$ ist.

also $PQ^0 \# P^0Q \# RS = OR \cdot \Delta\omega_0$. Nun ist erstens

$$\Delta x^0 = P^0Q^0 = P^0T - Q^0T,$$

zweitens

$$P^0T = PT \operatorname{ctg}|\omega^0|, \qquad Q^0T = PT \operatorname{tg}\omega_0,$$

drittens

$$PT = PQ^0 \cos\omega_0 = RS\cos\omega_0 = OR\cos\omega_0 \cdot \Delta\omega_0 = x^0 \cdot \Delta\omega_0,$$

also ergibt sich wieder (11).

Aber diese Ergebnisse lassen auch erkennen, daß es sich nur um Näherungsformeln handelt, wie sie ja auch aus den Näherungsformeln (1) gewonnen sind. Für die Formel (11′) braucht man übrigens nicht zu den speziellen sogenannten Bernoullischen Formeln zurückzugehen; es genügt anzunehmen, daß x und z in folgender allgemeiner Weise darstellbar sind:

$$x = \frac{v_0^2}{w_0}\,\varphi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right),$$

$$z = \frac{v_0^2}{w_0}\,\varphi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right)\cdot\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{v_0^2\,g}{w_0^2\cos^2\omega_0}\,\psi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right).$$

Denn daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{v_0^2}{w_0}\,\Delta\varphi,\\ \Delta z &= \frac{v_0^2}{w_0}\,\varphi\,\frac{\Delta\omega_0}{\cos^2\omega_0} + \frac{v_0^2}{w_0}\operatorname{tg}\omega_0\cdot\Delta\varphi - 2\,\frac{v_0^2\,g\sin\omega_0}{w_0^2\cos^3\omega_0}\,\psi\,\Delta\omega_0\\ &\qquad + (\Delta z - \operatorname{tg}\omega_0\cdot\Delta x)\,; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

setzt man in die zweite Gleichung rechts ein:

$$\Delta\varphi = \frac{w_0}{v_0^2}\,\Delta x, \qquad \varphi = \frac{w_0}{v_0^2}\,x, \qquad \psi = \frac{w_0^2\cos^2\omega_0}{v_0^2\,g}\,[x\operatorname{tg}\omega_0 - z],$$

$$\Delta z = -\operatorname{tg}|\omega^0|\cdot\Delta x, \qquad z = 0, \qquad x = x^0,$$

links: $\Delta z = 0,$

so folgt:

$$0 = (1 + \operatorname{tg}^2\omega_0)\,\Delta\omega_0 + \operatorname{tg}\omega_0\cdot\frac{\Delta x^0}{x^0} - 2\operatorname{tg}^2\omega_0\cdot\Delta\omega_0 - \frac{\Delta x^0}{x^0}\operatorname{tg}|\omega^0| - \frac{\Delta x^0}{x^0}\operatorname{tg}\omega_0,$$

also:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0}\operatorname{tg}|\omega^0| = (1 - \operatorname{tg}^2\omega_0)\,\Delta\omega_0,$$

in Übereinstimmung mit (11′).

§ 44. Geneigtes Gelände

Die Schußweite x^0 bezieht sich auf die waagerechte Ebene $z = 0$. Wie ändert sich die Schußweite, wenn das Gelände vom Geschütz zum Ziel hin um einen kleinen Geländewinkel $\Delta\varepsilon$ abfällt ($\Delta\varepsilon > 0$) oder ansteigt ($\Delta\varepsilon < 0$)? Die berichtigte Schußweite $x^0 + \Delta x^0$ ergibt sich nach dem Sinussatz zu

$$\frac{x^0}{\sin(|\omega^0| - \Delta\varepsilon)} \cdot \sin|\omega^0| = x^0 \cdot \frac{\sin|\omega^0|}{\sin|\omega^0| - \Delta\varepsilon\cos\omega^0} = x^0(1 + \Delta\varepsilon \operatorname{ctg}|\omega^0|),$$

also ist für die Berichtigung Δx^0:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \operatorname{ctg}|\omega^0| \cdot \Delta\varepsilon. \tag{11''}$$

Dabei hat man die absolute Erhöhung ω_0 der Seelenachse gegen die Horizontale beibehalten. Ändert man ω_0 mit Rücksicht auf den Geländewinkel so, daß die relative Erhöhung der Seelenachse gegen die Visierlinie unverändert bleibt, so ist $\Delta\omega_0 = -\Delta\varepsilon$, also nach (11) die Änderung der Schußweite in der Horizontalen:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = (-\operatorname{ctg}|\omega^0| + \operatorname{tg}\omega_0)\,\Delta\varepsilon.$$

Dazu kommt die nach (11″) zu berechnende Änderung für Neigung der Visierlinie; demnach ist für die Änderung der Schußweite in der Visierlinie:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\operatorname{tg}\omega_0 \cdot \Delta\omega_0. \tag{11'''}$$

Gegen einen steigenden Fesselballon schießt man also mit beibehaltener relativer Erhöhung zu kurz, wenn man gegen seinen Ankerplatz richtig eingeschossen war.

§ 45. Geneigter Geschützstand

Ein Geschützrohr kann Drehungen um drei Achsen ausführen. Eine Drehung um eine senkrechte Achse, wodurch dem Rohr die Seitenrichtung gegeben wird, nennen wir Schwenken. Eine Drehung um die waagerechte Achse (Schildzapfenachse), wodurch dem Rohr die Höhenrichtung gegeben wird, nennen wir Kippen. Eine Drehung um eine Achse, die zu den beiden anderen senkrecht ist, nennen wir Neigen. Im allgemeinen soll keine Neigung vorhanden sein. Eine vorhandene Neigung wird durch Libelle ermittelt und durch Ausgleichen des Geschützstandes beseitigt. Wo das nicht oder nicht schnell genug möglich ist, muß man Erhöhung und Seitenrichtung mit Rücksicht auf die Neigung berichtigen. Welche Fehler entstehen nun, wenn eine kleine Neigung um den Winkel σ vorhanden ist?

Die Ebene des Winkels ω_0 zwischen Seelenachse und horizontaler Visierlinie (x-Achse) bilde den kleinen Winkel σ mit der Ebene xz. Auf der Einheitskugel um O bilden also die Ebene des Winkels ω_0, die horizontale xy-Ebene, die vertikale Ebene durch die Seelenachse ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit einem Winkel $\pi/2 - \sigma$ zwischen der Hypotenuse ω_0 und der horizontalen Kathete, die mit ι bezeichnet sei [vgl. Abb. 29]. Die andere Kathete ist die wahre Erhöhung der Seelenachse über der Horizontalen. Bezeichnet man sie mit $\omega_0 - \Delta\omega_0$, so ergibt das rechtwinklige Dreieck:

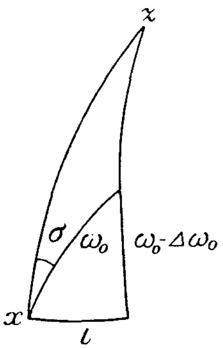

Abb. 29

$$\sin(\omega_0 - \Delta\omega_0) = \sin\omega_0 \cdot \cos\sigma\,,$$

also

$$\Delta\omega_0 = \operatorname{tg}\omega_0 \cdot \frac{\sigma^2}{2}\,.$$

Diese kleine Größe zweiter Ordnung ist zu vernachlässigen. Außerdem aber ist die Vertikalebene der Seelenachse gegen die Vertikalebene durchs Ziel (die xz-Ebene) gedreht um den Winkel ι nach der Seite der Neigung. Um den Winkel ι weicht also die Linie Geschütz—Schuß von der Linie Geschütz—Ziel ab. Diese Seitenabweichung ist zu berechnen aus:

$$\operatorname{tg}\iota = \operatorname{tg}\omega_0 \cdot \sin\sigma\,;$$

oder, da ι und σ klein sind, aus

$$\iota = \operatorname{tg}\omega_0 \cdot \sigma\,.$$

Ist auch ω_0 klein, so hat man einfach:

$$\iota = \omega_0 \cdot \sigma\,,$$

in Bogenmaß. Nimmt man ω_0 und σ in Graden, ι in Teilstrichen*), d. h. setzt man bzw. $\frac{\pi}{180}\omega_0$, $\frac{\pi}{180}\sigma$, $\frac{\pi}{3200}\iota$ für ω_0, σ, ι, so erhält man $\iota = \frac{8\pi}{81}\omega_0 \cdot \sigma$, also die bekannte Näherungsformel:

$$\iota = \tfrac{1}{3}\,\omega_0 \cdot \sigma\,.$$

Das ist die Korrektur in Teilstrichen, die man wegen des schiefen Geschützstandes am Seitenvisier vornehmen muß und zwar nach der Seite des höherstehenden Rades.

§ 46. Bewegter Geschützstand

Beim Schießen von einem (Luft-, Feld-, Wasser-) Fahrzeug kommt zu der Abschußgeschwindigkeit die Fahrgeschwindigkeit nach Größe und Richtung hinzu. Die vektorielle Zusammenfügung beider Geschwindig-

*) Sechzehntel Zentesimalgrade.

keiten erfolgt am besten in einem Koordinatensystem, das von Flug- und Schußrichtung unabhängig ist. Es seien v_x, v_y, v_z die Komponenten der Schuß-, $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ die Komponenten der Fahrgeschwindigkeit in einem solchen System (z. B. x-Achse waagerecht nach Osten, y-Achse waagerecht nach Süden, z-Achse senkrecht nach oben), dann sind $v_x + \mathfrak{v}_x$, $v_y + \mathfrak{v}_y$, $v_z + \mathfrak{v}_z$ die Komponenten der Geschwindigkeit, mit der der Schuß als abgefeuert anzusehen ist, die also der Berechnung der Schußbahn zugrunde zu legen sind.

§ 47. Änderungen von g. Regen

Zu den Schußbahnelementen gehört auch g und man kann daher auch den Einfluß von Änderungen von g auf x^0, t^0, ... aufsuchen. Gemeint sind hier solche Änderungen von g, wenn eine andere geographische Breite oder eine andere Höhe über dem Meeresspiegel zu berücksichtigen sind als diejenigen, die der Schußtafel zugrunde liegen. Das kann Fehler von $^1/_4\%$ ausmachen. Vor allem aber wirken auch Regen (Schnee, Hagel) außer als Erhöhung des Luftwiderstandes noch als senkrechter Druck auf das Geschoß, als scheinbare Vergrößerung von g. Ist G das Geschoßgewicht, $G + \Delta G$ das Geschoßgewicht, wenn man das Geschoß dem Regen aussetzt, z. B. auf einer Federwaage, so ergibt sich Δg aus:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta G}{G}\,.$$

Zur Ermittlung von Δx^0 und Δt^0 differenzieren wir

$$x \operatorname{tg} \omega_0 - z = Z = g \cdot \frac{Z}{g}\,,$$

wo Z/g nach der § 43 gemachten Annahme von g unabhängig ist, und erhalten:

$$\Delta x \cdot \operatorname{tg} \omega_0 - \Delta z = \dot{Z}\,\Delta t + \Delta g \cdot \frac{Z}{g}\,.$$

Setzen wir hierin

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}}\,, \qquad \dot{Z} = \dot{x} \operatorname{tg} \omega_0 - \dot{z}\,, \qquad Z = x \operatorname{tg} \omega_0 - z\,, \qquad \dot{z} = -\dot{x} \operatorname{tg}|\omega^0|\,,$$
$$z = 0\,, \qquad \Delta z = 0\,, \qquad x = x^0\,,$$

so bekommt man:

$$\frac{\dot{x}^0}{x^0}\,\Delta t^0 = \frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{-\operatorname{tg} \omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|} \cdot \frac{\Delta g}{g} \tag{13}$$

zur Berechnung von Δx^0 und Δt^0.

Von schräg fallendem Regen ist auf diese Weise nur die Vertikalkomponente berücksichtigt. Fällt der Regen schräg von vorn unter einem Winkel α' gegen die Vertikale, so gibt er mit g zusammen eine Resultante

$g + \Delta g$, die schräg nach hinten unter einem Winkel $\Delta\varepsilon$ gegen die Vertikale geneigt sei.

Für $\Delta\varepsilon$ ergibt sich $\operatorname{tg}\Delta\varepsilon = \frac{\Delta g \cdot \operatorname{tg}\alpha'}{g + \Delta g}$, also annähernd

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta g}{g}\,\alpha'. \tag{14}$$

Der Schuß erfolgt jetzt, wie unter einer schräg nach hinten gerichteten Beschleunigung $g + \Delta g$, also wie unter der absoluten Erhöhung $\omega_0 + \Delta\varepsilon$ auf einem um $\Delta\varepsilon$ ansteigenden Gelände. Also ergibt sich nach (11''') für die Verkürzung der Schußweite:

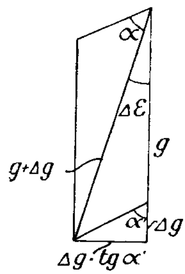

Abb. 30

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\operatorname{tg}\omega_0 \cdot \frac{\Delta g}{g}\,(\alpha' + \operatorname{ctg}|\omega^0|)\,. \tag{15}$$

Fällt Regen schräg von hinten, so ist $-\alpha'$ für α' zu setzen.

Fällt Regen schräg von rechts unter einem Winkel α'' gegen die Vertikale, so gibt er mit g zusammen eine Resultante $g + \Delta g$, die schräg nach links unter einem Winkel σ gegen die Vertikale geneigt sei. Für σ ergibt sich

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\Delta g \cdot \operatorname{tg}\alpha''}{g + \Delta g}, \qquad \text{also annähernd} \qquad \sigma = \frac{\Delta g}{g} \cdot \alpha''. \tag{16}$$

Der Schuß erfolgt also wie unter einer schräg nach links gerichteten Beschleunigung $g + \Delta g$; die Ebene der Schußbahn wird um den Winkel σ gegen die Vertikale geneigt. Die Änderung der horizontalen Schußweite erfolgt also wie bei senkrecht fallendem Regen.

§ 48. Superposition. Endliche Störungen. Andere Elemente

Ändern sich mehrere Elemente zugleich, so addieren sich die dadurch verursachten Änderungen nach dem Prinzip der Superposition kleiner Größen. So folgen aus (6), (7), (11') die Formeln:

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\,\Delta\omega_0 - \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\frac{\Delta w_0}{w_0}\,,$$

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\,\Delta\omega_0 - \left[(n-2)\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right) - 2\,\frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right]\frac{\Delta v_0}{v_0}\,.$$

Daraus erhält man die bei unveränderter Schußweite x^0 erforderliche Änderung der Erhöhung ω_0 für Änderung von w_0 bzw. v_0, indem man $\Delta x_0 = 0$ setzt, das ergibt:

$$\Delta\,\omega_0 = \frac{\sin(|\omega^0| - \omega_0)\cos\omega_0}{\cos 2\,\omega_0 \cdot \cos\omega^0} \cdot \frac{\Delta w_0}{w_0}\,,$$

$$\Delta\,\omega_0 = \left[(n-2)\,\frac{\sin(|\omega^0| - \omega_0)\cos\omega_0}{\cos 2\,\omega_0 \cdot \cos\omega^0} - \operatorname{tg} 2\,\omega_0\right] \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}\,.$$

Das sind Majevskis Formeln (6) und (8), der aber $(|\omega^0| - \omega_0)\sin 1'$ für $\sin(|\omega^0| - \omega_0)$ und $\omega_0 \sin 1'$ für ω_0 setzt. Diese und ähnliche Formeln ergeben sich also aus den bereits abgeleiteten, ohne daß man auf die ursprünglichen Formeln § 43 (1) für x und z zurückgeht.

Das angewandte Prinzip der Superposition kleiner Größen setzt voraus, daß die Änderungen Δx^0, $\Delta\,\omega_0$ usw. wie kleine Größen behandelt werden können, neben denen Produkte und Potenzen von ihnen zu vernachlässigen sind. In der Tat sind diese Größen bei der Herleitung der Formeln (4), (5), ... wie Differentiale behandelt worden. Sind sie größer, so muß man die Taylorschen Entwicklungen anwenden, z. B.:

$$\Delta x = \dot{x}\,\Delta t + \frac{\partial x}{\partial w_0} \cdot \Delta w_0 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\ddot{x}\,(\Delta t)^2 + 2\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial w_0}\Delta t\,\Delta w_0 + \frac{\partial^2 x}{\partial w_0^2}(\Delta w_0)^2 + \cdots\right] + \cdots \text{ usw.}$$

Wir haben bisher nur die Änderungen des Aufschlagortes in Betracht gezogen. Für die Änderungen der übrigen Endelemente v^0, ω^0, t^0 sind entsprechende Formeln, z. B. für Δt^0 aus (4) abzuleiten; aber diese sind von geringerer Bedeutung. Änderungen der Flugzeit t^0 infolge von Tageseinflüssen wären zwar für das Schießen mit Zeitzünder wichtig, man müßte dann aber auch die Änderungen im Abbrennen des Zündsatzes infolge von Tageseinflüssen kennen und berücksichtigen. Von der Berücksichtigung dieser zwei Arten von Einflüssen: Änderung der Flugzeit und Änderung der Brenndauer, ist die wirksame Zünderstellung abhängig. Da man die Änderungen der Flugzeit errechnen kann, kann man die Änderungen im Zünderbrennen erschießen. Das ist notwendig, da Laboratoriumsversuche von den Verhältnissen beim Schusse zu stark abweichen. Die erforderliche Schußzahl wird, infolge der notwendigen Mittelbildungen, um so größer sein, je unregelmäßiger der Zündsatz abbrennt. Ein langsam brennender Zündsatz ist in dieser Hinsicht ungünstiger als ein schnell brennender, da bei ihm schon kleine Fehler in der Dichte oder Länge (z. B. beim Zündereinstellen) große Fehler in der Brenndauer nach sich ziehen. Eine größere Präzision im Bz-Feuer und Berücksichtigung der Tageseinflüsse hierbei erfordert also schnell brennende Zündsätze oder mechanische Zeitzünder.

Die abgeleiteten Formeln beziehen sich auf das Schießen gegen Ziele im Geschützniveau $z = 0$. Für einen beliebigen Punkt x, z folgen an Stelle von (4), (5), (10), (11), (13) aus (1) die folgenden Formeln:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta \dfrac{w_0}{v_0}}{\dfrac{w_0}{v_0}} t\right) - \operatorname{tg}\omega_0 \cdot \Delta\omega_0 + \frac{\Delta \dfrac{v_0^2}{w_0}}{\dfrac{v_0^2}{w_0}}, \tag{17}$$

$$\frac{\Delta z}{x} = \operatorname{tg}\omega \cdot \frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta \dfrac{w_0}{v_0}}{\dfrac{w_0}{v_0}} t\right) + \Delta\omega_0 + \frac{\Delta \dfrac{v_0^2}{w_0}}{\dfrac{v_0^2}{w_0}} \operatorname{tg}\omega_0 - \left(\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{z}{x}\right) \frac{\Delta \dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}{\dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}. \tag{18}$$

In diesen Formeln sind als aus Schußtafeln bekannt anzusehen die Elemente der durch das Ziel x, z gehenden Schußbahn, von Tageseinflüssen abgesehen, also die Größen v_0, w_0, ω_0, x, z, t, $\dot{x}$, $\operatorname{tg}\omega$, g. Ferner sind bekannt die Änderungen infolge der Tageseinflüsse Δv_0, Δw_0, Δg. Da nun die korrigierte Schußbahn durch das Ziel gehen soll, so muß $\Delta x = 0$, $\Delta z = 0$ sein und man erhält aus (17) und (18) durch Elimination von

$$\frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta \dfrac{w_0}{v_0}}{\dfrac{w_0}{v_0}} t\right)$$

die Formel

$$(1 + \operatorname{tg}\omega \cdot \operatorname{tg}\omega_0)\,\Delta\omega_0 = \frac{\Delta \dfrac{v_0^2}{w_0}}{\dfrac{v_0^2}{w_0}} (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega_0) + \left(\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{z}{x}\right) \frac{\Delta \dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}{\dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}$$

für die erforderliche Änderung der Erhöhung ω_0, und durch Elimination von $\Delta\omega_0$:

$$(1 + \operatorname{tg}\omega \cdot \operatorname{tg}\omega_0)\,\frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta \dfrac{w_0}{v_0}}{\dfrac{w_0}{v_0}} t\right) = -(1 + \operatorname{tg}^2\omega_0)\,\frac{\Delta \dfrac{v_0^2}{w_0}}{\dfrac{v_0^2}{w_0}}$$

$$+ \operatorname{tg}\omega_0 \cdot \left(\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{z}{x}\right) \frac{\Delta \dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}{\dfrac{v_0^2 g}{w_0^2}}$$

für die Änderung der Zünderstellung Δt, soweit dieselbe von der Flugzeit abhängt. Diese Formeln wären anzuwenden beim Schießen gegen Gebirgsziele und Luftziele, sobald man diesem Schießen auch im übrigen den entsprechenden Grad von Genauigkeit geben kann.

Eine andere Anwendung der Formeln (17), (18) ist die folgende. Setzt man für x, z, t, $\operatorname{tg}\omega$ die der Schußbahn entsprechenden Funktionen von $\dot{x}$, z. B. vermittels der Siaccischen Formeln, so liefern (17), (18) eine benachbarte Schußbahn, entsprechend den Änderungen $\Delta\omega_0$, Δv_0, Δw_0, Δg. Das kann erstens für $\Delta\omega_0 = 0$ benutzt werden, um eine Schußtafel auf andere Werte von v_0, w_0, g, z. B. für ein anderes Geschoß, umzurechnen. Nimmt man z. B. nur w_0 als verändert an, so folgt aus (17) und (18):

$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta w_0}{w_0} = \frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta w_0}{w_0} t\right), \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Delta(x \operatorname{tg}\omega_0 - z)}{x} + \frac{(x \operatorname{tg}\omega_0 - z)}{x} \cdot 2\frac{\Delta w_0}{w_0} \\ &\qquad = \frac{\dot{x}}{x}\left(\Delta t + \frac{\Delta w_0}{w_0} t\right) \cdot (\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega)\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Da man für die drei Größen Δx, Δz, Δt nur zwei Gleichungen hat, kann man noch eine dritte lineare Gleichung willkürlich hinzunehmen; nimmt man z. B.

$$\frac{\Delta t}{t} = -\frac{\Delta w_0}{w_0}, \tag{21}$$

so folgt

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{\Delta w_0}{w_0} \tag{22}$$

und

$$\frac{\Delta(x \operatorname{tg}\omega_0 - z)}{x \operatorname{tg}\omega_0 - z} = -2\frac{\Delta w_0}{w_0}. \tag{23}$$

Gleichung (22) gilt aber auch für jeden Wert $x + dx$, es ist also auch

$$\frac{\Delta(x + dx)}{x + dx} = -\frac{\Delta w_0}{w_0},$$

also auch

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\Delta w_0}{w_0}. \tag{24}$$

Aus (23) folgt ebenso

$$\frac{\Delta(dx \cdot \operatorname{tg}\omega_0 - dz)}{dx \cdot \operatorname{tg}\omega_0 - dz} = -2\frac{\Delta w_0}{w_0}. \tag{25}$$

Beachten wir, daß $dz/dx = \operatorname{tg}\omega$ ist, so folgt aus (24), (25):

$$\frac{\Delta(\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega)}{\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega} = -\frac{\Delta w_0}{w_0}. \tag{26}$$

Die vier Gleichungen (21), (22), (23), (26) besagen nichts anderes, als daß man die Siaccische Tabelle der Funktionen D, T, J, A, gültig für ein Normalgeschoß und normales Luftgewicht, durch Multiplikation mit dem reziproken Geschoßfaktor c bzw. Luftgewichtsverhältnis (bzw. bei A dessen Quadrat) auf ein beliebiges Geschoß und beliebiges Luftgewicht anwendbar macht. (21) z. B. besagt bei Änderung des Geschoßfaktors c, daß $\Delta c\, t = 0$, $c\, t = \text{const}$ bleibt.

Die Formeln (17), (18) liefern aber auch, indem man nur $\Delta\,\omega_0 \neq 0$ nimmt, eine Schußbahnschwenkung. Ordnet man die gleichzeitig erreichten Punkte zweier Schußbahnen einander zu, d. h. nimmt man $\Delta\,t = 0$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\,x}{x} &= -\operatorname{tg}\omega_0 \cdot \Delta\,\omega_0\,, \\ \frac{\Delta\,z}{x} &= \Delta\,\omega_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Über diese Schußbahnschwenkung, die auch schon in den Formeln § 18 (7) ausgedrückt ist, s. Kap. X, § 53.

Für die Berücksichtigung der Tageseinflüsse beim Schießen ist es notwendig, daß die anzubringenden Verbesserungen vorweg ermittelt und tabellarisch oder graphisch dargestellt werden. Die Ermittlung nach den aufgestellten Formeln durch Rechnung genügt dabei nicht, sondern bietet hierfür nur die Grundlage. Ergänzung durch Schießversuche ist aus folgenden Gründen notwendig: Betrachten wir z. B. die Formel § 43 (6) im Hinblick auf eine Luftgewichtsänderung:

$$\frac{\Delta\,x^0}{x^0} = -\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\frac{\Delta\,\delta}{\delta}\,.$$

Die zusammengehörigen Werte von x^0, ω_0, ω^0 liefert die Schußtafel, aber nur zum kleinsten Teil erschossen, größtenteils auf Grund von Näherungsmethoden errechnet, also mit den Unsicherheiten dieser Methoden behaftet. Andererseits ist aber die obige Formel selbst nur aus den Näherungsannahmen (1) entsprungen. Zusammengenommen darf man also die Formel selbst nur als Annäherung ansehen und kann sie durch eine empirische Formel der Art

$$\frac{\Delta\,x^0}{x^0} = -\lambda \cdot \frac{\Delta\,\delta}{\delta} \tag{28}$$

ersetzen, in der λ ein durch Schießversuche zu ermittelnder von x^0 abhängiger Faktor ist, der näherungsweise den Wert

$$1 - \frac{\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}$$

hat.

Eine andere Fehlerquelle ist die unregelmäßige Veränderung des Luftgewichts δ mit der Höhe (s. Kap. XII). Die entsprechenden Mängel haften der Berücksichtigung der übrigen Einflüsse an.

Um die Änderung von v_0 zu berücksichtigen, muß man diese aus den Änderungen der Elemente berechnen, von denen sie abhängt. Das ist eine Aufgabe der inneren Ballistik (s. Kap. XV). Oder man ermittelt $\Delta\,v_0$ auf Grund von einigen gut beobachteten Probeschüssen nach § 43 (7).

§ 49. Wind

Es wehe Wind von der Geschwindigkeit w horizontal, den Komponenten $\mathrm{w}' = \mathrm{w} \cos \widehat{\mathrm{w}x}$ in der Schußrichtung und $\mathrm{w}'' = \mathrm{w} \sin \widehat{\mathrm{w}x}$ quer zur Schußrichtung. In bezug auf den bewegten Luftraum seien die Anfangselemente $v_0 + \Delta v_0$, $\omega_0 + \Delta \omega_0$, während sie in bezug auf den festen v_0, ω_0 sind. Ist w, also Δv_0, $\Delta \omega_0$ klein, dann ist die Änderung der Schußweite im bewegten Luftraum Δx^0 zu berechnen aus § 13 (7) und (11):

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \left[2 - n\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\right] \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0} + [\operatorname{ctg}|\omega^0| - \operatorname{tg} \omega_0] \Delta \omega_0 . \qquad (29)$$

Ferner wird der bewegte Luftraum gegen den festen um $\mathrm{w} \cdot t^0$ in der Windrichtung verschoben, also um $\mathrm{w}' \cdot t^0$ in der Schußrichtung und um $\mathrm{w}'' \cdot t^0$ quer zur Schußrichtung; und die Schußebene ist gegen die xz-Ebene gedreht um den Winkel

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathrm{w}''}{\dot{x}_0 + \mathrm{w}'} , \qquad (30)$$

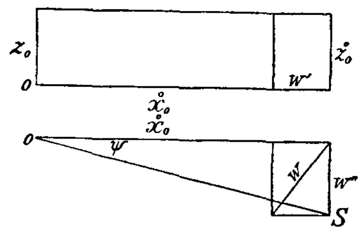

Abb. 31

Δv_0, $\Delta \omega_0$ sind zu berechnen aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $OS = \sqrt{(\dot{x}_0 + \mathrm{w}')^2 + \mathrm{w}''^2}$ und $\dot{z}_0$, also aus

$$(v_0 + \Delta v_0)^2 = (\dot{x}_0 + \mathrm{w}')^2 + \mathrm{w}''^2 + \dot{z}_0^2, \qquad (31)$$

und aus

$$\operatorname{tg}(\omega_0 + \Delta \omega_0) = \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{(\dot{x}_0 + \mathrm{w}')^2 + \mathrm{w}''^2}} . \qquad (32)$$

Da nach Annahme w, also auch w′ und w″ klein gegen v_0 sind, folgt aus (30) $\psi = \frac{\mathrm{w}''}{\dot{x}_0}$, aus (31) $v_0 \Delta v_0 = \dot{x}_0 \mathrm{w}'$, also $\Delta v_0 = \mathrm{w}' \cdot \cos \omega_0$, und aus (32) folgt

$$\frac{\Delta \omega_0}{\cos^2 \omega_0} = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0 \sqrt{1 + 2\frac{\mathrm{w}'}{\dot{x}_0}}} - \operatorname{tg} \omega_0 = -\operatorname{tg} \omega_0 \cdot \frac{\mathrm{w}'}{\dot{x}_0} .$$

Demnach wird die Schußversetzung in der Schußrichtung nach (7) und (11)

$$\mathrm{w}' \left\{t^0 - \frac{x^0}{v_0}\left[2 - n\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{\operatorname{tg}|\omega^0|}\right)\right] \cos \omega_0 + \frac{x^0}{v_0} (\operatorname{ctg}|\omega^0| - \operatorname{tg} \omega_0) \sin \omega_0\right\}$$

und quer zur Schußrichtung

$$\mathrm{w}'' \left\{t^0 - \frac{x^0}{\dot{x}_0}\right\} .$$

Setzt man diese Schußversetzungen bzw. gleich $\cos \widehat{\mathrm{w}x} \cdot A$ und $\sin \widehat{\mathrm{w}x} \cdot B$, so wird

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathrm{w}\left\{t^0 - \frac{x^0}{\dot{x}_0}\left[1 - (n-1)\frac{\sin(\omega_0 + \omega^0)}{\sin \omega^0}\cos\omega_0\right]\right\}, \\ B &= \mathrm{w}\left\{t^0 - \frac{x^0}{\dot{x}_0}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

und es ergibt sich:

Bei gegebener Windstärke und allen Windrichtungen wird der Schuß nach dem Umfang einer Ellipse versetzt, deren große Halbachse A in der Schußrichtung, deren kleine Halbachse B quer zur Schußrichtung liegt, wo A und B der Windgeschwindigkeit w proportional sind, aber von der Windrichtung nicht abhängen.

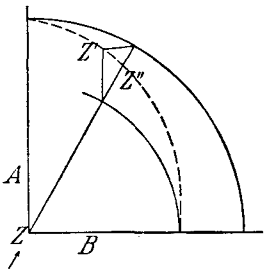

Abb. 32

Die wichtigste in A und B vorkommende Größe $t^0 - \frac{x^0}{\dot{x}_0}$ ist Null auf der Parabel [s. § 14 (40)], bedeutet also den „Zeitverlust", der auf der Schußweite x^0 infolge des Luftwiderstandes eintritt. Die Größe $\frac{x^0}{v_0}(n-1)\frac{\sin(\omega_0+\omega^0)}{\sin\omega^0}$ hat für Flachbahnen näherungsweise den Wert $\frac{x^0}{v_0}(n-1)\left(1 - \frac{\omega_0}{|\omega^0|}\right)$, ist dann also klein und nur bei größeren Windstärken und Entfernungen zu berücksichtigen. Kann man sie vernachlässigen, so gilt der einfachere Satz: Die Windversetzung ist gleich Windgeschwindigkeit mal Zeitverlust.

Die ersten Glieder $\mathrm{w}' \cdot t^0$, $\mathrm{w}'' \cdot t^0$ bedeuten die Versetzung eines Fahrzeugs mit oder ohne Kraftantrieb, das ebensolange wie das Geschoß (t^0 sec) der Strömung (w', w'') ausgesetzt ist. Die zweiten Glieder rühren davon her, daß dem Geschoß, im Gegensatz zum Fahrzeug eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit erteilt worden ist. Diese Glieder wären dieselben bei einem schwerefreien Schuß, z. B. einem Torpedoschuß mit Niveaueinstellung. Das dritte Glied tritt infolge der Krümmung der Schußbahn auf, hängt ab von der Schußweite x^0, kann erschossen oder theoretisch bestimmt und den Schußtafeln eingefügt werden. Zu dem Zwecke macht man gewisse vereinfachte Angaben über die Schußbahnen, die mit einer Berichtigung (§ 43) darauf hinauslaufen, die Bahnen als „Grenzbahnen" anzunehmen (§ 18). Bedenkt man noch, daß bei allen diesen Betrachtungen die Korrekturen wie Differentiale behandelt werden, so wird man keine übertriebenen Erwartungen an die Genauigkeit dieser Formeln stellen dürfen. Immerhin sind sie in vielen Fällen ausreichend (s. z. B. Prescott, Phil. Mag. 1917). Die Herleitung obiger Formeln setzt auch voraus, daß das Geschoß kugelförmig ist, oder daß es, wenn es ein Langgeschoß ist, sich mit der Längsseite relativ zum Windraum so einstellt, wie sonst zum windstillen Raum. Die aus der Nichterfülltheit dieser Bedingung entstehende Abweichung aufzufinden gilt (s. z. B. Kritzinger, Schuß und Schall, S. 110) für ein „recht schwieriges Problem der Ballistik der Zukunft". Bei dem Grade der Annäherung, den man obigen Formeln nur beilegen darf, ist das nicht der Fall. Ist nämlich $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ die Ellipse, auf deren Umfang ein Kugelgeschoß bei gegebenem $\dot{x}_0$ durch alle Winde derselben Stärke nach obigen Formeln versetzt wird, so wird diese Ellipse für ein Langgeschoß desselben Widerstandes, wie folgt, deformiert: Der momentane Luftwiderstand (§ 7) wird geändert um einen Faktor $1 + h\,\alpha^2$, wo α der Stellungswinkel des Geschosses gegen den Windraum ist. Hierbei ist

$$\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{w}''}{\dot{x} \pm \mathrm{w}} \doteq \frac{\mathrm{w}''}{\dot{x}} \doteq \frac{\mathrm{w}''}{x^0 : t^0},$$

also proportional der seitlichen Versetzung y, in Einklang mit (33). Einer relativen Änderung des Widerstandes prop. y^2 entspricht aber eine relative Änderung der Schußweite auch prop. y^2 (§ 43). Demnach geht die Ellipse annähernd über in eine leicht konstruierbare, von der Ellipse wenig abweichende eiförmige Kurve $\left(\frac{x\,(1 - k \cdot y^2)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$, wo k eine empirisch zu bestimmende, von dem Schuß abhängende Konstante ist*).

Ist w nicht klein gegen v_0, so muß man Δx^0 nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von Δv_0 und $\Delta \omega_0$ entwickeln und für Δv_0 und $\Delta \omega_0$ ihre genauen Werte nach (31), (32) einsetzen. Die Glieder $\mathrm{w}'\, t^0$ und $\mathrm{w}''\, t^0$ bleiben unverändert, das Glied $\mathrm{w}'' \frac{x^0}{\dot{x}_0}$ in der Querversetzung wird nach (30) ermittelt. Der obige Satz gilt dann nur noch annähernd.

§ 50. Höhenwind

Wir haben bisher angenommen, daß der Wind in den vom Geschoß durcheilten Höhen gleichmäßig weht, daß also w nach Größe und Richtung unabhängig von z ist. Das ist im allgemeinen nicht der Fall. Es sei daher jetzt $\mathrm{w}(z)$ der Betrag des Vektors der Windgeschwindigkeit in der Höhe z. Bezeichnen wir mit P_z, P^z zwei Punkte der Flugbahn von gleicher Höhe z, der erste auf dem aufsteigenden, der zweite auf dem absteigenden Aste gelegen. Die Schußversetzung auf der Schußbahn $P_z P^z$ ist nach obigem bei gleichmäßiger Windgeschwindigkeit gleich dem Vektor mit den Komponenten

---

*) Siehe des Verfassers „Flugbahn-Störungen, Theorie und Praxis" Heerestechnik. Bd. 2 (1924) S. 48.

$$\mathrm{w}'\cdot G\,(z) = \mathrm{w}'\cdot\left(t^z - t_z - \frac{x^z - x_z}{\dot{x}_z}\left[1 - (n-1)\,\frac{\sin\,(\omega_z + \omega^z)}{\sin\,\omega^z\cdot\sec\,\omega_z}\right]\right),$$

$$\mathrm{w}''\cdot F\,(z) = \mathrm{w}''\cdot\left(t^z - t_z - \frac{x^z - x_z}{\dot{x}_z}\right),$$

wo $F\,(z)$ und $G\,(z)$ Funktionen von z bezeichnen. Der vektorielle Unterschied der Schußversetzungen auf den Schußbahnen $P_z P^z$ und $P_{z+dz}\,P^{z+dz}$ hat also die Komponenten

$$\mathrm{w}'\cdot G\,(z+dz) - \mathrm{w}'\cdot G\,(z) = \mathrm{w}'\cdot dG\,(z)\,,$$

$$\mathrm{w}''\cdot F\,(z+dz) - \mathrm{w}''\cdot F\,(z) = \mathrm{w}''\cdot dF\,(z)\,.$$

Das gilt zunächst für den Fall, daß w nach Größe und Richtung unabhängig von z ist. Ändert sich nunmehr w oberhalb der Höhe $z + dz$, so werden die Schußbahn $P_{z+dz}\,P^{z+dz}$ und der oberhalb der Höhe $z + dz$ verlaufende Teil der Schußbahn $P_z P^z$ in derselben Weise beeinflußt, wie aus der Superposition kleiner Größen folgt. Demnach bleibt der vektorielle Unterschied der Schußversetzungen beider Bahnen unverändert, er hat nämlich die Komponenten $\mathrm{w}'\,(z)\,dG\,(z)$ und $\mathrm{w}''\,(z)\,dF\,(z)$. Aus solchen Unterschieden von Schußversetzungen setzt sich aber die gesamte Schußversetzung der Bahn $P_0 P^0$ zusammen, d. h. sie hat die Komponenten

$$\int_{z_*}^{0} \mathrm{w}'\,(z)\cdot dG\,(z)\,,\quad \int_{z_*}^{0} \mathrm{w}''\,(z)\,dF\,(z) \tag{34}$$

und für die Bahn $P_z P^z$ hat die Schußversetzung die Komponenten

$$\int_{z_*}^{z} \mathrm{w}'\,(z)\cdot dG\,(z)\,,\quad \int_{z_*}^{z} \mathrm{w}''\,(z)\,dF\,(z)\,. \tag{35}$$

Wir wollen den Wert dieser Integrale in der Weise abschätzen, daß wir eine mittlere Höhe z_m zwischen 0 und z_* aufsuchen, vermittels deren sich dieselben in der Form (34) darstellen lassen. Dann ist also die Windversetzung so zu berechnen, wie für konstanten Wind, den „ballistischen" Wind, wenn man den Wind nimmt, der in der mittleren Höhe z_m weht. Dazu müssen zunächst die Funktionen $F\,(z)$ und $G\,(z)$ durch z ausgedrückt werden, zuvörderst

$$F\,(z) = (t^z - t_z) - \frac{x^z - x_z}{\dot{x}_z}\,.$$

Wir beschränken uns auf Bögen, für die die Größe g/w_* klein ist und längs denen die Größe $v\,w'/w$ den Anfangswert $v_0\,w_0'/w_0 = n$ (nahezu) beibehält. Ferner verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Bahngipfel und führen die normierten Größen ξ, ζ, τ, $\gamma = g/w_*$ des § 17 ein. Dann gelten nach § 19 (11), (12), (15), (16), wenn dort $\omega_0 = 0$ gesetzt wird, die Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \tau - \tfrac{1}{2}\tau^2 + \frac{n}{6}\tau^3 + \cdots, \\
-\frac{1}{\gamma}\zeta &= \tfrac{1}{2}\tau^2 - \tfrac{1}{6}\tau^3 + \frac{2n-1}{24}\tau^4 + \cdots, \\
-\frac{1}{\gamma}\zeta &= \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{3}\xi^3 + \frac{4-n}{12}\xi^4 + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

die konvergent, nämlich durch die Ausdrücke § 20 (29) summierbar sind. Die zu berechnende Funktion F wird jetzt

$$F(\zeta) = (\tau^\zeta - \tau_\zeta) - \frac{\xi^\zeta - \xi_\zeta}{\dot{\xi}_\zeta}.$$

Nun lassen sich bekanntlich durch Reihenumkehrung τ und ξ in konvergente Potenzreihen nach $\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}$ entwickeln, deren erste Glieder lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= \sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}} + \frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}\right)^2 + \frac{4+3n}{36}\left(\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}\right)^3 + \cdots, \\
\xi &= \sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}\right)^2 + \frac{3n-2}{36}\left(\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}\right)^3 + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ferner wird, wie sich aus (36) ergibt,

$$\dot{\xi} = 1 - \tau + \frac{n}{2}\tau^2 + \cdots, \tag{38}$$

also

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\dot{\xi}} &= 1 + \tau + \frac{2-n}{2}\tau^2 + \cdots \\
&= 1 + \sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}} + \frac{7-3n}{6}\left(\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}}\right)^2 + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Setzt man für die Wurzel ihren positiven Wert, so erhält man durch diese Formeln die Werte: τ^ζ, ξ^ζ, $\frac{1}{\dot{\xi}^\zeta}$; setzt man den negativen Wert ein, so erhält man τ_ζ, ξ_ζ, $\frac{1}{\dot{\xi}_\zeta}$. Demnach wird jetzt, $\sqrt{\frac{-2\zeta}{\gamma}} = \sqrt{}$ gesetzt:

$$\tau^\zeta - \tau_\zeta = 2\sqrt{} + \frac{4+3n}{18}\sqrt{}^3 + \cdots,$$

$$\xi^\zeta - \xi_\zeta = 2\sqrt{} + \frac{3n-2}{18}\sqrt{}^3 + \cdots,$$

$$\frac{\xi^\zeta - \xi_\zeta}{\dot{\xi}_\zeta} = 2\sqrt{} - 2\sqrt{}^2 + \frac{40-15n}{18}\cdot\sqrt{}^3.$$

Damit ergibt sich

$$F(\zeta) = -\frac{4\,\zeta}{\gamma} + (n-2)\,\gamma^3 + \cdots. \tag{40}$$

Die Windgeschwindigkeits-Komponente w″ kann man durch Messung in verschiedenen Höhen und Interpolation als ganze Funktion von ζ ausdrücken:

$$\mathrm{w}'' = a + b\,\zeta + \cdots.$$

Wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{4}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{-\zeta} + \cdots, \qquad \varepsilon = -\frac{6\,n+12}{\sqrt{2}}$$

setzt, wird nun die Schußversetzung für die Bahn $P_0 P^0$, soweit sie von w″ herrührt:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_0^{\zeta_*}(a+b\zeta+\cdots)\left(-\frac{4}{\gamma}+\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{-\zeta}+\cdots\right)d\zeta = -\frac{4}{\gamma}\,a\,\zeta_*\\ -\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\,a\cdot\tfrac{2}{3}\cdot(-\zeta_*)^{3/2}-\frac{4}{\gamma}\,b\,\frac{\zeta_*^2}{2}+\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\,b\cdot\tfrac{2}{5}(-\zeta_*)^{5/2}+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Nähme man statt dessen w″ in der mittleren Höhe ζ_m, so bekäme man:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_0^{\zeta_*}(a+b\zeta_m+\cdots)\left(-\frac{4}{\gamma}+\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\sqrt{-\zeta}+\cdots\right)d\zeta = -\frac{4}{\gamma}\,a\cdot\zeta_*\\ -\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\,a\cdot\tfrac{2}{3}(-\zeta_*)^{3/2}-\frac{4}{\gamma}\,b\,\zeta_m\,\zeta_*-\frac{\varepsilon}{\gamma\sqrt{\gamma}}\,b\cdot\tfrac{2}{3}(-\zeta_*)^{3/2}\zeta_m+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Die Forderung der Übereinstimmung der niedrigsten Glieder in (41) und (42) ergibt also

$$\zeta_m = \tfrac{1}{2}\,\zeta_*\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{30}\cdot\sqrt{-\frac{\zeta_*}{\gamma}}+\cdots\right). \tag{43}$$

Will man also eine von der speziellen Schußbahn unabhängige Bestimmung von ζ_m haben, so muß man $\zeta_m = \frac{1}{2}\,\zeta_*$, d. h. den Wind in halber Schußbahnhöhe nehmen. Der begangene Fehler ist dann um so kleiner, je kleiner $\frac{\varepsilon}{30}\cdot\sqrt{-\frac{\zeta_*}{\gamma}}$ ist. Für das quadratische Luftwiderstandsgesetz ($n=2$) ist $\varepsilon = 0$; in diesem Fall ist also mit größerer Annäherung $\zeta_m = \frac{1}{2}\,\zeta_*$.

Wir müssen jetzt die Untersuchung auf den Teil der Windkorrektur $\int \mathrm{w}'\,dG$ ausdehnen. Statt dessen betrachten wir den Ausdruck $\mathrm{w}'\,\frac{d(G-F)}{d\zeta}$. Für kleine ω wird dieser gleich $(n-1)$ mal

$$\mathrm{w}' \frac{\xi^\zeta - \xi_\zeta}{\xi_\zeta} \cdot \left(1 + \frac{\omega_\zeta}{\omega^\zeta}\right) \cdot$$

Nun wird $\omega \doteq \operatorname{tg} \omega = \frac{d\zeta}{d\xi}$ und

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d\zeta}{d\xi} = \xi + \xi^2 + \cdots = \gamma + \tfrac{2}{3} \gamma^2 + \cdots,$$

also
$$\frac{\omega_\zeta}{\omega^\zeta} = \frac{-\gamma + \frac{2}{3}\gamma^2 + \cdots}{+\gamma + \frac{2}{3}\gamma^2 + \cdots} = -1 + \tfrac{4}{3}\gamma + \cdots.$$

Man erhält also:

$$\mathrm{w}' \frac{d(G-F)}{d\zeta} = \tfrac{8}{3}\,\mathrm{w}'\,(n-1)\,\gamma^2 + \cdots. \tag{44}$$

Also gilt auch hier, wie oben, der Schluß, daß $\zeta_m = \frac{1}{2}\zeta_*$ zu nehmen ist und der Fehler von der Ordnung $\sqrt{\frac{-\zeta_*}{\gamma}}$ wird.

Zusammenfassend bekommen wir also den Satz: Bei der Berechnung der Windkorrektur trägt man der Veränderung des Windes mit der Höhe am besten Rechnung, indem man sie wie für einen mit der Höhe unveränderlichen Wind berechnet und dabei den in halber Schußhöhe wehenden Wind nimmt.

Da der Satz seiner Natur nach nur eine Annäherung ergeben kann, kann man die ursprünglichen einschränkenden Annahmen, daß $v\,w'/w$ wenig veränderlich ist und γ und ω klein sind, fallen lassen; der Satz gibt dann immer noch die beste Annäherung, die in so einfacher Weise erreichbar ist.

Falsch dagegen ist es, die Windversetzung einfach den Zeiten proportional zu setzen, in denen das Geschoß die betreffenden Schichten durchfliegt, wie es z. B. Kritzinger (Schuß und Schall, S. 120) tut; denn das Geschoß verhält sich nicht wie ein Fahrzeug, wie wir oben gesehen haben. Falsch ist es ferner, anzunehmen (Kritzinger, S. 120), daß die Schußbahn durch eine Trennungslinie in $^2/_3$ Schußhöhe in zwei Teile zerfällt, auf die gleiche Zeiten kommen. Im luftleeren Raum muß diese Linie in $^3/_4$ Schußhöhe gezogen werden. Da nämlich $z_{**} = \frac{1}{4} z_*$ die Schußhöhe des oberen Viertels und t^{00} die zugehörige Schußzeit ist, so folgt aus $z = \frac{1}{8} g t^{0^2}$ und $z_{**} = \frac{1}{8} g t^{00^2}$, daß $t^{00} = \frac{1}{2} t^0$ sein muß. Einer solchen Bahn können Bahnen im Luftraum durch Vergrößerung der Querschnittsbelastung beliebig nahe kommen (§ 8). Als der ballistische Wind wurde noch 1917 — ohne Begründung — der Wind in $^2/_3$ Schußhöhe genommen. Im September 1918 habe ich (Art. Monatshefte) angegeben, daß besser $^1/_2$ Schußhöhe zu nehmen ist; den Beweis dafür in der 1. Auflage meiner Ballistik veröffentlicht, die 1921 gedruckt wurde. Ende 1921 glaubt Becker (Technik und Wehrmacht) aus Versuchsergebnissen das Unzulängliche jedes derartig genommenen ballistischen Windes nachweisen zu können. Von einem Näherungsverfahren darf man nicht mehr verlangen, als seiner Herleitung entspricht. Entwickelt man unter den obigen Voraussetzungen die Höhe des ballistischen Windes nach steigenden Potenzen der Schußhöhe, so wird der erste Koeffizient $^1/_2$, ist also im Gegensatz zu den folgenden von der speziellen Schußbahn und Windrichtung unabhängig. Man kann sich daher die Windschichtung durch eine „lineare" ersetzt denken, wie man ein Bogenelement als geradlinig annimmt. Bei sehr unregelmäßigen Schichtungen oder sehr großen Höhen muß das Näherungsverfahren versagen; aber für die gewöhnlichen Fälle ist es den älteren und unbegründeten Regeln dieser Art vorzuziehen. Durch Berücksichtigung zunächst der zweiten Glieder läßt es sich verbessern und tritt dann mit den schärferen Verfahren durch Integration längs der Schußbahn eher in Konkurrenz, denen es durch Einfachheit, also Anwendbarkeit und vor allem dadurch überlegen ist, daß es die Kenntnis des Windes nur in 2 Höhen erfordert. Im Feldkriege kann man selten mehr verlangen.

§ 51. Graphische Hilfsmittel

Wir nehmen jetzt an, daß für ein bestimmtes Geschütz, ein bestimmtes Geschoß und eine bestimmte Ladung die Schußversetzungen infolge Wind, Änderungen von Luftgewicht und Anfangsgeschwindigkeit ermittelt und etwa tabellarisch dargestellt sind. Für die praktische Berücksichtigung dieser Tageseinflüsse soll nun im folgenden ein graphisches Verfahren abgeleitet werden.

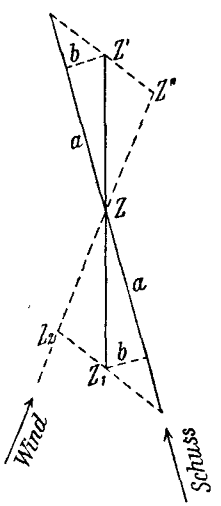

Abb. 33

Die Windkorrektur, infolge ihrer Größe die wichtigste, ist etwas umständlicher als die anderen, weil sie nicht nur die Entfernung, sondern auch die Seite betrifft. Wird nach dem Punkte Z geschossen, so wird der Schuß z. B. nach Z' versetzt (Abb. 33). Man müßte nach Z_1 schießen, um Z zu treffen. Für jede Windrichtung und -stärke werden die zwei Komponenten a und b der Versetzung nach der Schußrichtung und quer zur Schußrichtung in Tabellen angegeben. Diese Zerlegung ist unpraktisch. Man kann vielmehr die Versetzung ZZ' in zwei solche Komponenten zerlegen, daß diese bei derselben Windstärke ihre Größe, unabhängig von der Windrichtung, beibehalten. Bei gegebener Windstärke besteht nämlich die Schußversetzung ZZ' aus zwei Versetzungen, erstens ZZ'' in der Windrichtung, zweitens $Z''Z'$ in der zur Windrichtung symmetrischen Richtung. Z. B. zur Windrichtung: „halb rechts von hinten" ist symmetrisch: „halb links von hinten" usw. Beide Versetzungen hängen in ihrer Größe nur von der Windstärke ab, sie haben nämlich die Werte:

$$ZZ'' = \frac{A + B}{2}\,, \qquad Z''Z' = \frac{A - B}{2}\,,$$

nach einem bekannten Satze über die Ellipse mit den Halbachsen A und B (s. Abb. 32). Kennt man zu jeder Windstärke und Zielentfernung die große Versetzung ZZ'' und die kleine Versetzung $Z''Z'$, so verfährt man so (Abb. 33): Man trägt die große Versetzung entgegen der Windrichtung von Z nach Z_2 an; darauf die kleine Z_2Z_1 in der symmetrischen Richtung (nach Augenmaß). Dabei ist selbst bei der geringsten Aufmerksamkeit kein Irrtum möglich. Nach Z_1 ist Richtung und Entfernung zu nehmen.

Man braucht also ein Instrument, das zu jeder Zielentfernung und Windstärke die beiden Windkorrekturen liefert. Das kann z. B. durch ein durchsichtiges Zelluloidlineal erfolgen, von dem Abb. 34 ein Stück

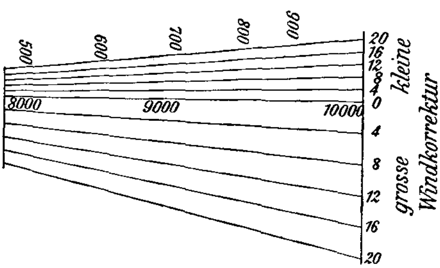

Abb. 34

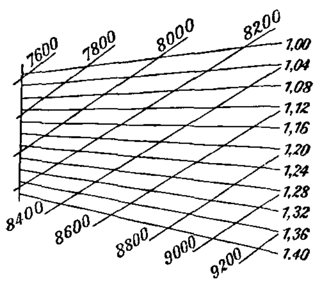

Abb. 35

darstellt (Maßstab 1 : 25000). Man legt es mit der Mittellinie 0 — 0 durch das Ziel und entnimmt ihm mittels Zirkel (am besten einem dreispitzigen) die große Korrektur einerseits, die kleine anderseits der Mittellinie an der durch das Ziel gehenden Stelle. Nur die zu den Windgeschwindigkeiten $w = 4$, 8, 12, 16, 20 m/sec gehörigen Korrekturen sind direkt zu entnehmen, die andern durch Halbieren und Vierteln genau genug nach Schätzung.

Nach dem so gefundenen Punkte Z_1 wird mit dem Lineal gleich die Seitenrichtung genommen, während die Entfernung noch korrigiert werden muß. Deshalb braucht das Windlineal keine oder nur eine rohe Entfernungsskala zu enthalten; dagegen ist Angabe der Geschoßflughöhe nötig, da nach § 50 der in der halben Geschoßflughöhe herrschende Wind genommen werden muß. Man trägt sie an den Stellen ein, wo sie eine ganze Zahl Hektometer beträgt. Um die Entfernung gleich für Luftgewicht korrigiert abzulesen, schlage ich einen Maßstab vor, auf dem die Teilstriche entsprechend dem Luftgewicht auseinander- oder zusammengerückt sind. Die zu den Luftgewichten 1,00 bis 1,40 gehörigen Maßstäbe können auf einem Zelluloidlineal vereinigt werden (s. Abb. 35). Man liest auf der durch das betreffende Luftgewicht gehenden Geraden ab. Diese Gerade kann auch durch einen Faden markiert werden, der vom Nullpunkt der Skala ausgeht und am Ende derselben bei dem betreffenden Tagesluftgewicht in einer Kerbe festgeklemmt wird. In der Zeichnung sind nur die Luftgewichte 1,00, 1,04, 1,08, ..., 1,40 und die zugehörigen Ablesegeraden verzeichnet, und auf den Ablesegeraden nur die um 200 m differierenden Entfernungen, was bei der wirklichen Ausführung auf 50 m (= 2 mm) zu verengen ist.

Die Veränderung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann man z. B. in der Weise berücksichtigen, daß man den Nullpunkt des Luftgewichtslineals verschiebbar einrichtet (s. Abb. 36). Die Zahlen $+12$, $+8$, $+4$, ± 0, -4, -8, -12 bedeuten die Geschwindigkeits*stufe*, so daß die Stufe ± 0 die Geschwindigkeit v_0 ist und die Stufen ± 12 den größten in Betracht kommenden Werten von Δv_0 entsprechen. Der Schieber wird so eingestellt, daß die Tagesgeschwindigkeitsstufe in der Mittellinie des Lineals liegt. Der auf die Feuerstellung im Batterieplan aufzulegende Linealnullpunkt liegt dann auf derjenigen Schräglinie, die der betreffenden Zielentfernung entspricht. Nur die zu 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, ... gehörigen Schräglinien sind verzeichnet. Für andere Entfernungen genügt Schätzung nach Augenmaß, da die Linien sehr dicht zusammenliegen. Größen, die kleiner sind, als daß sie noch in der Zeichnung zum Ausdruck gebracht werden können, braucht man nicht zu berücksichtigen. Hat man eine Zielentfernung x^0 unter Berücksichtigung aller Korrekturen außer der von v_0 erschossen, so ergibt Anlegen des Lineals und Verschieben des Nullpunktes vermittels des Schiebers, so daß die Entfernung x^0 abgelesen wird, die Geschwindigkeitsstufe. Dabei können die Stufenzahlen 0, ± 4, ± 8, ± 12 verschiedenartiger Geschütze so in Übereinstimmung bezeichnet werden, daß die von *einem* erschossene Stufe auch für die anderen maßgebend ist, sofern nicht verschiedenartige *lokale* Einflüsse mitwirken.

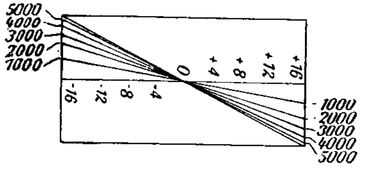

Abb. 36

Kommen mehrere Ladungen in Betracht, so wird man am besten für jede ein Windlineal und ein Luftgewichtslineal anfertigen.

Was die Genauigkeit angeht, so ist folgendes zu sagen. Auf dem Batterieplan im Maßstab 1 : 25000 kann man die Entfernung Batterie—Ziel im allgemeinen nicht genauer als bis auf 25 m genau abgreifen. Man braucht daher bei den an der Entfernung anzubringenden Korrekturen über dieses Genauigkeitsmaß nicht hinauszugehen. Das hat erst dann Zweck, wenn man den Maßstab des Batterieplanes so vergrößert, daß die Entfernung genauer abgegriffen werden kann. Das kommt wohl nur für ortsfeste Batterien in Frage. Das beschriebene Linealverfahren hält dann in bezug auf Genauigkeit der Korrekturen genau Schritt mit der Genauigkeit der Entfernungsablesung.

Dieses Tageseinflußgerät zeichnet sich durch Einfachheit nicht nur vor dem noch 1918 geübten (s. z. B. Ludendorff, Kriegserinnerungen, S. 464) primitiven und unzulänglichen Tabellenverfahren, sondern vor allen mir an der Front bekannt gewordenen Verfahren aus, die zum Teil ernsthafter Kritik nicht Stand hielten. Die um die Mitte 1918 von der Gen.-Insp. d. Art.-Schießschulen aufgestellten Anforderungen betreffen mehr die Art der Ausführung, als das Wesen der Konstruktion, und sind, wenn das Gerät nur sonst richtig durchdacht ist, von jedem geschickten Mechaniker erfüllbar.

Zehntes Kapitel

Schußbahnschwenkungen

§ 52. Eingliedrige (starre) Schwenkung

Betrachtet man die Schußbahn zur Erhöhung ω_0 wie eine starre Kurve und schwenkt sie in ihrer Ebene um den Winkel $\varDelta\,\omega_0$, so ist die erhaltene Kurve nur eine rohe Annäherung an die Schußbahn mit der Erhöhung $\omega_0 + \varDelta\,\omega_0$. Bei dieser Schwenkung geht jeder Punkt P in einen andern $\overline{P}$ über, derart, daß OP in der Länge unverändert bleibt, in der Richtung sich um $\varDelta\,\omega_0$ ändert. Ist $\varDelta\,\omega_0$ klein, so kann der Bogen $P^0\overline{P}^0$ als gerad-

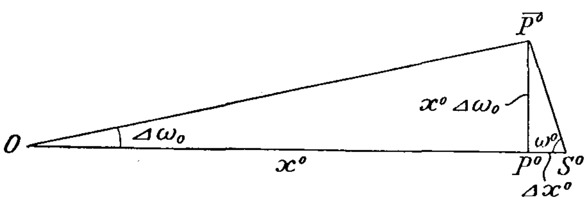

Abb. 37

linig und gleich $x^0\varDelta\,\omega_0$ angesehen werden. Ist S^0 der Endpunkt der geschwenkten Bahn, so kann man auch $\overline{P}^0S^0$ als geradlinig und $\angle\ P^0S^0\overline{P}^0 = |\omega^0|$ annehmen. Setzt man $P^0S_0 = \varDelta\,x^0$, so wird demnach (Abb. 37) $\varDelta\,x^0 : x^0\varDelta\,\omega_0 = \operatorname{ctg}|\omega^0|$ oder

$$\frac{\varDelta\,x^0}{x^0} = \operatorname{ctg}|\omega^0|\cdot\varDelta\,\omega^0 \qquad [\text{vgl. } \S\,44\,(11'')]\,. \tag{1}$$

Dieses Ergebnis der oft angewandten starren Schwenkung steht in Widerspruch mit der ebenfalls gebräuchlichen Formel § 43 (11′) und mit der besseren Formel § 43 (11).

Bei Annahme starrer Schußbahnschwenkung liefert eine Schußtafel der Werte ω_0, x^0 punktweise die ganze Schußbahn, indem man ω_0, x^0 als Polarkoordinaten, die Anfangstangente als Koordinatenachse nimmt.

Insbesondere erhält man den Gipfel P_* zur Erhöhung ω_0 daraus, daß für die Schußweite OP_* die Anfangs- und Enderhöhung zusammen gleich ω_0 sind; eine bekannte, aber nach obigem nur sehr rohe Näherungskonstruktion.

§ 53. Zweigliedrige Schußbahnschwenkungen

Die in § 18 ausführlich untersuchten Grenzbahnen lassen nach § 18 (7) die Darstellung zu

$$x \sec \omega_0 = X(t), \qquad x \operatorname{tg} \omega_0 - z = Z(t), \tag{2}$$

wo die rechten Seiten von der Erhöhung ω_0 unabhängige Funktionen der Zeit t sind. Diese Bahnen lassen sich in der aus Abb. 38 ersichtlichen Form

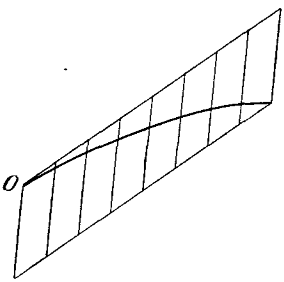

Abb. 38

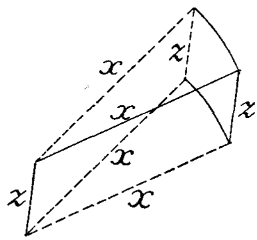

Abb. 39

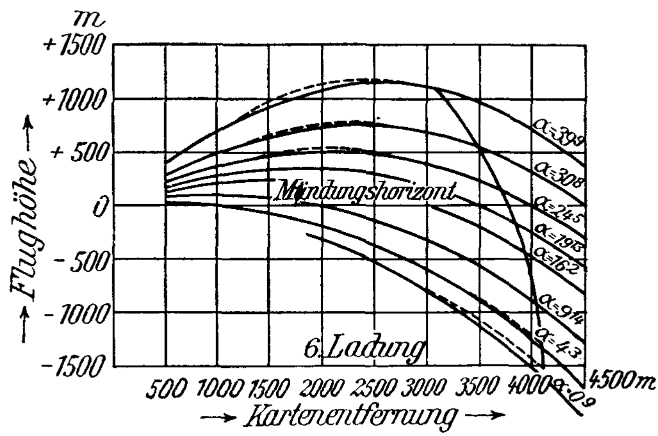

Abb. 40

schwenken. Die zur selben Zeit t gehörigen Punkte verschiedener Bahnen, z. B. die Sprengpunkte gleich tempierter Geschosse liegen auf dem Kreise

$$x^2 + (z + Z)^2 = X^2 \tag{3}$$

mit dem Halbmesser $X(t)$ und dem Mittelpunkt $x = 0$, $z = -Z(t)$ (Abb. 39). Daß diese Schwenkungen gute Näherungen geben, ist aus der Abb. 40 ersichtlich. Die ausgezogenen Linien sind die für die 10,5-cm-Gebirgshaubitze L/12 von Krupp für die 6. Ladung geltenden, die gestrichelten sind die durch die angegebene Schwenkung aus der für $\omega_0 = 16^2/_{16}$ Grad abgeleiteten.

Auch die durch die Siaccischen Näherungsformeln definierten Bahnen sind Grenzbahnen der eben besprochenen Art.

Die Siaccischen Formeln (vgl. § 36) für $\omega_m = \omega_0$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{\mathsf{B}}\left[T(u) - T(u_0)\right], \\ x \sec\omega_0 &= \frac{1}{\mathsf{B}}\left[D(u) - D(u_0)\right], \\ \operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega &= \frac{1}{\mathsf{B}}\sec\omega_0\left[J(u) - J(u_0)\right], \\ x\operatorname{tg}\omega_0 - z &= \frac{1}{\mathsf{B}^2}\left[A(u) - A(u_0) - J(u_0)\{D(u) - D(u_0)\}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ergeben, wenn man sich u aus der ersten ausgerechnet in die zweite und vierte eingesetzt denkt, daß $x \sec\omega_0$ und $x\operatorname{tg}\omega_0 - z$ bloß von t, nicht von ω_0 abhängen.

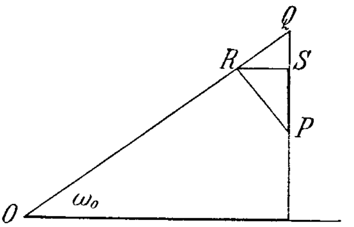

Abb. 41

Die Formeln in § 43, aus denen wir (11′) folgerten, nämlich

$$x = \frac{v_0^2}{w_0}\,\varphi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right),$$

$$\frac{v_0^2}{w_0}\,\varphi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right)\operatorname{tg}\omega_0 - \frac{v_0^2\,g}{w_0^2\cos^2\omega_0}\,\psi\left(\frac{w_0}{v_0}\,t\cos\omega_0\right),$$

ergeben eine Schwenkung, indem man Punkte der alten und der geschwenkten Schußbahn mit demselben $t\cdot\cos\omega_0$ einander zuordnet. Bei der Schwenkung bleibt x und $(x\operatorname{tg}\omega_0 - z)\cdot\cos^2\omega_0$ unverändert, d. h. jeder Punkt verschiebt sich so auf seiner Ordinate, daß das Stück PS konstant bleibt (Abb. 41).

§ 54. Mehrgliedrige Schwenkungen

Die in § 40 bei der Entwicklung der Siacci-Reihen erster Art abgeleiteten Formeln

$$\left.\begin{aligned} x\sec\omega_0 &= D - g\,(B - A)\sin\omega_0, \\ x\operatorname{tg}\omega_0 - z &= gA \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ergeben die erste Weiterbildung der oben behandelten Schußbahnschwenkung (Abb. 38). Diese neue Schwenkung stellt die Abb. 42 dar, in der

$$OR = x\,,\quad RP = z\,,\quad OQ = D\,,\quad TP = g\cdot B\,,\quad UT = g\cdot A$$

ist. Bei der Schwenkung bewegen sich T, U auf den Schenkeln des rechten Winkels mit dem Scheitel Q. Der Punkt P beschreibt die Isochrone, den Ort der Sprengpunkte gleich tempierter Geschosse, eine zyklische Kurve 4. Ordnung, wie man aus der Abb. 42 wie folgt ersieht. Die ähnlichen Dreiecke URO, UQT ergeben

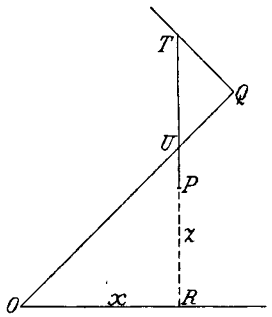

Abb. 42

$$RU\cdot UT = OU\cdot UQ$$

oder

$$RU\cdot(RT - RU) = OU\cdot(OQ - OU)\,,$$

also

$$RU\cdot RT - RU^2 = OU\cdot OQ - OU^2\,,$$

d. h.

$$OR^2 + RU\cdot RT = OU\cdot OQ\,.$$

Setzt man hier die obigen Werte ein, so bekommt man für x und z die Gleichung 4. Grades:

$$[x^2 + (z + g\,A)\,(z + g\cdot B)]^2 = D^2\,[x^2 + (z + g\cdot A)^2]\,.$$

Die Schwenkung läßt sich durch einen Mechanismus verwirklichen: Der Stab TU gleitet mit je einem Stift in T und in U in zwei Schlitzen längs QT, QU und wird durch eine Führung wie in der Abb. 41 senkrecht geführt.

Für $c' = 0$ ist außerdem $B = A$ und man erhält die Siacci-Formeln für die Grenzbahnen; die obige Gleichung 4. Ordnung reduziert sich auf eine Kreisgleichung, die Punkte T, U fallen in Q zusammen, die Schwenkung nach Abb. 42 geht in die nach Abb. 38 über.

In bezug auf die Veränderliche v_0 repräsentiert eine Schußbahn eine ganze Schar von solchen, da man auf ihr den Anfangspunkt verlegen kann.

Demnach ist aus einer einzigen Schußbahn, zugehörig zu v_0, w_0, ω_0, mit hinreichend großer Anfangsgeschwindigkeit jede beliebige durch Schwenkungen, Verlegungen des Anfangspunktes und Transformationen (angenähert) zu gewinnen. Hierin besteht die Bedeutung der Siaccischen Tabellen der Funktionen D, T, J, A, in denen deshalb alle Schußbahnen (angenähert) enthalten sind.

Elftes Kapitel

Die Schußbahn als nichtebene Kurve

§ 55. Einleitung

Wir haben bisher die Schußbahn als ebene Kurve betrachtet und behandelt. Diese Annahme ist nur so lange berechtigt, als Geschoßachse und Bahntangente in einer senkrechten Ebene liegen und der Luftwiderstand eine in dieser Ebene liegende Resultante hat. Bei einem rotierenden Geschoß wird diese Symmetrie dadurch aufgehoben, daß der Luftwiderstand hebend auf den Geschoßkopf wirkt, dieses Drehmoment sich mit dem der Rotation um die Längsachse zusammensetzt und diese Achse aus der Schußebene seitwärts aufwärts herausgedreht wird. Damit ist die sogenannte konische Pendelung eingeleitet, der Luftwiderstand bekommt eine seitliche Komponente, die Schußbahn wird uneben, das Geschoß weicht seitlich ab. Die Ursache dieser Seitenabweichung wurde in dieser Weise zuerst von Magnus*) qualitativ richtig erkannt. Analytisch ist die konische Pendelung rotierender Langgeschosse mehrfach behandelt worden. Die Ergebnisse stimmen nicht überein, eine neue Behandlung ist erforderlich.**) Hier soll eine Darstellung der Pendelung gegeben werden für den Fall, daß der Winkel $|\alpha|$ zwischen Geschoßachse und Bahntangente wie eine kleine Größe behandelt werden kann. Diese Beschränkung ist erstens für die Praxis vorläufig zulässig und ausreichend, denn nur soweit dieser Winkel klein ist, hat die Schußbahn die für ein Zielschießen erforderliche Regelmäßigkeit und Genauigkeit. Sie ist zweitens theoretisch naturgemäß, da die Lösung unter dieser Annahme jedenfalls den ersten Schritt für eine Lösung bei nicht kleinem $|\alpha|$ darstellt. Anderseits werden einige in früheren Arbeiten übliche vereinfachende Annahmen hier nicht gemacht, weil sie für die mathematische Natur des Problems nicht wesentlich sind. So wird die Beschränkung auf Flachbahnen und große Geschwindigkeiten oder Steilbahnen und kleine Geschwindigkeiten fallen gelassen, und es wird kein spezielles Luftwiderstandsgesetz angenommen. Das Problem wird auf ein mathematisch sehr einfaches zurückgeführt, nämlich auf die Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen. Die Koeffizienten der betreffenden Gleichung hängen in einfacher Weise von dem Geschoß, seiner Bewegung und dem Luftwiderstand ab und sind sogar bis auf einen, der langsam veränderlich ist, konstant.

*) Abhandl. der Kgl. Preuß. Akad. d. Wissenschaften, Berlin 1852.

**) Vgl. Encyclopédie des sciences mathématiques, tome IV, vol. 6, p. 68ff.

Eine Übersicht über die verschiedenen Ergebnisse siehe z. B. in Cranz, Ballistik, 1896, S. 258.

Die obige Behandlung fand ich im Sommer 1916 in Kurland, trug sie erstmalig Sommer 1918 in einer Vorlesung über Ballistik vor und veröffentlichte sie im Sommer 1919 in den Artilleristischen Monatsheften.

Die Beschränkung auf kleine $|\alpha|$ hat weiter den Vorteil, daß das Problem der Rotation und das der Translation des Geschosses, sonst untrennbar verbunden, sich getrennt lösen lassen, wenigstens im ersten Grade der Annäherung, praktisch ziemlich weitreichend. Von den drei Koordinaten eines Schußbahnpunktes erweist sich infolge der Pendelung schon im Anfangsgliede der Entwicklung nach der Zeit nur die seitliche beeinflußt. In bezug auf diese Seitenabweichung sagt die Encyclopédie (a. a. O. S. 70): „La théorie de la dérivation des projectiles présente encore des lacunes fondamentales", und Siacci (Balistique, 1892, S. 123) sagt: „Les difficultés analytiques que l'on rencontre dans le calcul de la dérivation, comparées à sa petitesse et à ses anomalies, ont fait renoncer à la déterminer pour les applications pratiques." Der einzig beachtliche Ansatz in dieser Richtung besteht in den Majevskischen Funktionen M und B*) für den Grundriß der Schußbahn, die den Siaccischen Funktionen J und A für den Aufriß der Schußbahn analog sind. Aber die Herleitung dieser Funktionen ist von Vernachlässigungen begleitet, deren Tragweite man nicht übersieht. Wir leiten daher diese Funktionen auf einem neuen, und zwar sehr einfachen Wege her. Dabei wird sich eine Berichtigung derselben ergeben. Der Vergleich mit der Erfahrung liefert uns dann eine Bestätigung.

§ 56. Die Differentialgleichung für die konische Pendelung

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- x, y, z rechtwinklige Koordinaten, Anfangspunkt in einem beliebigen Bahnpunkt, der als Anfangspunkt der Bahn genommen wird; x positiv vorwärts, y positiv rechts, z positiv aufwärts;
- ξ, η, ζ rechtwinklige mit x, y, z gleichsinnige Koordinaten, fest im Geschoß, Anfangspunkt im Schwerpunkt; ζ-Achse mit Geschoßachse zusammenfallend; zu Beginn der Bewegung sollen y- und η-Achse, sowie $(x\,z)$-Ebene und $(\xi\,\zeta)$-Ebene zusammenfallen;
- $|\alpha|$ Winkel zwischen Geschoßachse und Bahntangente;
- δ Winkel der Bahntangente gegen die z-Achse;
- $\delta - \vartheta$ Winkel der ζ-Achse des Geschosses gegen die z-Achse, ϑ klein;
- ψ Winkel der senkrechten Geschoßmittelebene gegen ihre Anfangslage, die $x\,z$-Ebene, positiv nach rechts, klein;
- φ Winkel, um den sich das Geschoß um seine Achse von $t = 0$ an gedreht hat, also Winkel der ξ-Achse mit der senkrechten Geschoß-Mittelebene oder der η-Achse mit dem horizontalen Radius des Geschoßquerschnittes, positiv bei Rechtsdrall;

*) Majevski, Lösung der Probleme des direkten und indirekten Schießens. Deutsch von Klußmann. Berlin 1886. S. 13 u. 14.

m die Masse des Geschosses;
ω Winkel der x-Achse mit der Tangente des Aufrisses der Schußbahn auf die xz-Ebene;
$\bar{\omega}$ Winkel der x-Achse mit der Tangente des Grundrisses der Schußbahn in der xy-Ebene;
p, q, r Drehgeschwindigkeiten bzw. um die ξ, η, ζ-Achse, positiv bei Drehung bzw. im Sinne $\zeta\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\xi$;
A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente des Geschosses in bezug auf die Achsen ξ, η, ζ;
W_ξ, W_η, W_ζ die Komponenten des Widerstandes $W = mw$ in Richtung der ξ-, η-, ζ-Achse;
mh die Querkomponente von W, senkrecht zur ζ-Achse;
h_x, h_y, h_z die Komponenten von h in Richtung der x-, y-, z-Achse.

Die Geschwindigkeiten p, q, r drücken sich durch die Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ der Eulerschen Winkel φ, ψ, $\delta - \vartheta$ bekanntlich so aus*):

$$\left.\begin{aligned} p &= -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\delta\cos\varphi\,, \\ q &= \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\delta\sin\varphi\,, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Daraus folgt umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -p\sin\varphi + q\cos\varphi\,, \\ \dot{\psi}\sin\delta &= p\cos\varphi + q\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

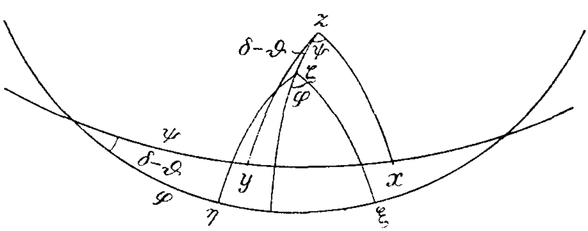

Abb. 43

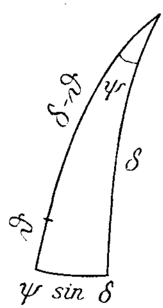

Abb. 44

Auf der Einheitskugel um den Anfangspunkt, in dem sich in dem betrachteten Zeitmoment auch der Geschoßschwerpunkt befindet, ist $\psi\sin\delta$ der Bogen eines Parallelkreises, ϑ der Bogen eines Meridians, wenn man die xy-Ebene als Äquatorebene nimmt (s. Abb. 43). Durch diese beiden Größen wird die momentane Lage der Geschoßachse gegen die Bahntangente bestimmt. Daher fassen wir $\psi\sin\delta$ und ϑ zu dem komplexen Winkel (Abb. 44)

$$\psi\sin\delta + i\vartheta = \alpha \tag{3}$$

*) Siehe z. B. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 1, S. 565.

zusammen. Dann ergibt sich

$$\dot{\alpha} = \dot{\psi} \sin \delta + i\, \dot{\vartheta} = (p + i\, q)\,(\cos \varphi - i \sin \varphi)\,,$$

und daraus

$$\ddot{\alpha} = (\dot{p} + i\, \dot{q})\,(\cos \varphi - i \sin \varphi) - i\,(p + i\, q)\,(\cos \varphi - i \sin \varphi)\,(r - \dot{\psi} \cos \delta)\,.$$

Der absolute Betrag $|\alpha|$ des Winkels α ist der Winkel Geschoßachse—Bahntangente.

Die Bewegungsgleichungen für das rotierende Geschoß bestehen jetzt erstens aus den drei Translationsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{w}{v}\,\dot{x} - h_x, \\ \ddot{y} &= -\frac{w}{v}\,\dot{y} - h_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{w}{v}\,\dot{z} - h_z - g\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Zweitens aus den drei Rotationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,\dot{p} + (B - C)\,q\,r + L &= 0\,, \\ B\,\dot{q} + (C - A)\,r\,p + M &= 0\,, \\ C\,\dot{r} + (A - B)\,p\,q + N &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Momente L, M, N drücken sich durch die Komponenten W_ξ, W_η, W_ζ und durch die Koordinaten des Widerstandspunktes die mit ξ, η, ζ bezeichnet seien, wie folgt aus:

$$\left.\begin{aligned} L &= \zeta W_\eta - \eta W_\zeta\,, \\ M &= \xi W_\zeta - \zeta W_\xi\,, \\ N &= \eta W_\xi - \xi W_\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ist wegen der Symmetrie des Geschosses $B = A$; ferner liege der Widerstandspunkt auf der Geschoßachse, also ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, also

$$L = \zeta W_\eta, \qquad M = -\zeta W_\xi, \qquad N = 0\,.$$

Folglich $C\,\dot{r} = 0$, also $r = \mathrm{const}$, d. h. die Drehgeschwindigkeit eines Geschosses um seine Achse ist konstant.*)

Die Gleichungen (5) für p und q werden jetzt:

$$\left.\begin{aligned} A\,\dot{p} + (A - C)\,q\,r + \zeta W_\eta &= 0\,, \\ A\,\dot{q} + (C - A)\,p\,r - \zeta W_\xi &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

---

*) Müßte man bei großen Drehgeschwindigkeiten r die Reibung mit der Luft berücksichtigen, so würde r nicht konstant sein, sondern langsam abnehmen. Dann würde auch die obige Annahme, daß der Widerstandspunkt auf der Geschoßachse liegt, nicht zutreffen (vgl. § 7).

Mit 1 und i zusammengesetzt ergeben sie:

$$A(\dot p + i\dot q) - (A - C)\, i\, r\, (p + i\, q) + \zeta\, (W_\eta - i W_\xi) = 0$$

oder mit $\cos\varphi - i \sin\varphi$ multipliziert und α eingeführt:

$$A\, \ddot\alpha + i\, (C\, r - A\, \dot\psi \cos\delta)\, \dot\alpha + \zeta\, (W_\eta - i W_\xi) \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 0\,.$$

Diese Gleichung läßt noch eine Vereinfachung zu. Die Querkomponente von W ist $W\,|\alpha|$ (s. § 7 S. 22), deren Komponenten sind $W\psi\sin\delta$ und $W\vartheta$, also die Querkomponente komplex $W\alpha$. Die Komponenten von ϑ nach ξ und η sind $-\vartheta\cos\varphi$, $-\vartheta\sin\varphi$, die von $\psi\sin\delta$ sind $-\psi\sin\delta\sin\varphi$, $+\psi\sin\delta\cos\varphi$ (s. Abb. 45); also ist

$$-W_\xi = W\,(-\vartheta\cos\varphi - \psi\sin\delta\sin\varphi)\,,$$

$$-W_\eta = W\,(-\vartheta\sin\varphi + \psi\sin\delta\cos\varphi)\,.$$

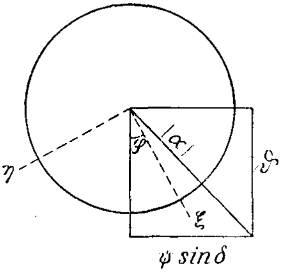

Abb. 45

Demnach wird

$$-W_\eta + i W_\xi = W\,\vartheta\,(-\sin\varphi + i\cos\varphi) + W\,\psi\sin\delta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

also

$$-(W_\eta - i W_\xi)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = W\,(\psi\sin\delta + i\,\vartheta) = W\,\alpha\,.$$

Dadurch vereinfacht sich die Differentialgleichung für α zu:

$$A\,\ddot\alpha + i\,(C\,r + A\,\dot\psi\cos\delta)\,\dot\alpha - \zeta\, W\,\alpha = 0\,.$$

Da nach Voraussetzung $|\alpha|$, also ψ und $\dot\psi$ klein sind, kann $\dot\psi\cos\delta$ zunächst fortgelassen werden. Ferner können in ζW die von $|\alpha|$ abhängigen Teile, die mindestens zweiter Ordnung in $|\alpha|$ sind (s. § 7) fortgelassen werden. So wird die Gleichung für α:

$$A\,\ddot\alpha + i\,C\,r\,\dot\alpha - \zeta\, W\alpha = 0\,. \tag{8}$$

Die Dämpfung, der Koeffizient von $\dot\alpha$, ist proportional der Drehgeschwindigkeit r und dem Quotienten aus Längs- und Quer-Trägheitsmoment. Nach Integration der Gleichung für α kann man die zunächst fortgelassenen Glieder in ζW und im Koeffizienten von $\dot\alpha$ als Funktionen der Zeit hinzufügen und daraus eine zweite verbesserte Lösung für α gewinnen. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen, so daß $\alpha\,(t)$ mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden kann.

§ 57. Die Integration

Zum Zwecke der Integration transformieren wir die Gleichung § 56 (8) für α vermittels der Substitution:

$$\alpha = e^{-i\frac{C\,r}{2\,A}t + \gamma}\,, \quad \dot\alpha = \alpha\left(-i\frac{C\,r}{2\,A} + \dot\gamma\right), \quad \ddot\alpha = \alpha\ddot\gamma + \alpha\left(-i\frac{C\,r}{2\,A} + \dot\gamma\right)^2 \tag{9}$$

in

$$\ddot\gamma + \dot\gamma^2 = \delta^2\,.$$

Das ist eine **Riccatische** Gleichung für $\dot{\gamma}$, worin

$$\dot{\delta} = \frac{i\sqrt{\varDelta}}{2A}, \qquad \varDelta = C^2 r^2 - 4A\zeta W \tag{10}$$

ist. Setzen wir $\dot{\gamma} = \dot{\delta} + \dot{\varepsilon}$, so erhalten wir für $\dot{\varepsilon}$ die Iterationsformel

$$-\dot{\varepsilon} = \frac{\ddot{\delta} + \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^2}{2\dot{\delta}}$$

und daraus für $\dot{\gamma}$ den Ausdruck

$$\dot{\gamma} = \dot{\delta} - \frac{\ddot{\delta}}{2\dot{\delta}} + \frac{\dddot{\delta}}{(2\dot{\delta})^2} - \frac{\overset{4}{\delta}}{(2\dot{\delta})^3} - 3\frac{\ddot{\delta}^2}{(2\dot{\delta})^3} + \frac{\overset{5}{\delta}}{(2\dot{\delta})^4} + 12\frac{\ddot{\delta}\dddot{\delta}}{(2\dot{\delta})^4} - \cdots.$$

Die Koeffizienten sind aus einer Rekursionsformel bestimmbar, sie sind alle ganz, beim Nenner $(2\dot{\delta})^n$ vom Vorzeichen $(-1)^n$, beim Zähler $\overset{n+1}{\delta}$ vom Werte $(-1)^n$. Die Konvergenz dieses Ausdrucks ist gesichert, da die Funktion W, infolgedessen auch ζW und $\varDelta$ nur numerisch gegeben sind [vgl. die Bemerkungen zu den Reihenentwicklungen in § 19]. Wir können sogar $\varDelta$ oder $\dot{\delta}$ zonenweise durch eine solche Funktion von t mit jedem gewünschten Genauigkeitsgrade approximieren, daß der Ausdruck für $\dot{\gamma}$ abbricht. Zu dem Zweck approximieren wir $\varDelta^{-1/4}$ durch eine lineare Funktion der Zeit.*) Dadurch wird

$$\frac{d^2\dot{\delta}^{-1/2}}{dt^2} = 0, \quad \text{d. h. } 2\dot{\delta}\dddot{\delta} - 3\ddot{\delta}^2 = 0$$

und infolgedessen die **Riccati**-Gleichung integriert durch

$$\dot{\gamma} = \dot{\delta} - \frac{\ddot{\delta}}{2\dot{\delta}} = \frac{\pm i\sqrt{\varDelta}}{2A} - \frac{\dot{\varDelta}}{4\varDelta}. \tag{11}$$

Denn es wird

$$\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 = \dot{\delta}^2 - \frac{2\dot{\delta}\dddot{\delta} - 3\ddot{\delta}^2}{4\dot{\delta}^2}.$$

Demnach wird

$$\alpha = e^{-i\frac{Cr}{2A}t \pm i\int\frac{\sqrt{\varDelta}}{2A}dt - \int\frac{\dot{\varDelta}}{4\varDelta}dt};$$

also sind

$$\frac{e^{-i\int\sigma\,dt}}{\sqrt[4]{\varDelta}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{-i\int\tau\,dt}}{\sqrt[4]{\varDelta}} \tag{12}$$

partikuläre Lösungen für α, wenn σ und τ die Wurzeln $\dfrac{Cr \pm \sqrt{\varDelta}}{2A}$ der folgenden Gleichung sind:

$$A\sigma^2 - Cr\sigma + \zeta W = 0. \tag{13}$$

*) Es entspricht dies dem einfachsten integrablen Fall der **Riccatischen** Gleichung.

Die allgemeine Lösung für die betreffende Zone ist dann

$$\alpha = \frac{\varkappa e^{-i\int \sigma dt} + \lambda e^{-i\int \tau dt}}{\sqrt[4]{\Delta}}. \tag{14}$$

Aus ihr ergibt sich die spezielle Lösung dieser Zone, indem man $\varkappa$ und λ so bestimmt, daß α und $\dot{\alpha}$ gegebene Anfangswerte haben.

Die Drehgeschwindigkeit r ist groß und infolge günstiger Geschoßform und Gewichtsverteilung ist jedenfalls anfänglich ζW nicht sehr groß. Daher ist anfangs $\frac{\Delta}{4A^2} = \frac{C^2 r^2}{4A^2} - \frac{\zeta W}{A}$ von $\frac{C^2 r^2}{4A^2}$ nicht sehr verschieden, also

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{Cr}{2A} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ groß und etwas kleiner als } \frac{Cr}{A}, \\ \sigma &= \frac{Cr}{2A} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ klein und etwas größer als } \frac{\zeta W}{Cr}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Mit wachsendem ζW nimmt τ ab, σ zu. Hat σ den Wert $\frac{2\zeta W}{Cr}$ und τ den Wert $\frac{Cr}{2A}$ erreicht, so ist $\sigma = \tau$, $C^2 r^2 = 4A\zeta W$, $\Delta = 0$. Diesen Zeitpunkt nennen wir die Stabilitätsgrenze und Δ die Stabilitätsdiskriminante. Nur im Gebiete der Stabilität $\Delta > 0$ läßt sich $\Delta^{-1/4}$ durch lineare Funktionen der Zeit zonenweise approximieren, gilt also die Formel (14) für α.

Es kann ζ, also ζW Null und negativ werden*), wenn der Schwerpunkt weit vorn liegt, oder wenn der Sog am Boden stark wirkt. Dann bleibt Δ positiv und die Bewegung bleibt stabil, α klein, die Geschoßachse nahe der Bahntangente: der Sog wirkt stabilisierend. Andererseits ist es aber unerwünscht, den Widerstand durch starken Sog infolge ungünstiger Bodenform zu vergrößern. Mit günstiger Bodenform muß man also Kopflastigkeit des Geschosses zu verbinden suchen, um möglichste Stabilität zu erreichen. Aluminiumzünder sind deshalb für die Stabilität ungünstiger als Messingzünder.

§ 58. Geometrischer Verlauf der Pendelung

Um uns von der Bewegung in einem bestimmten Moment, z. B. zur Zeit $t = 0$, ein Bild zu machen, wählen wir jetzt ein Zeitintervall so klein, daß innerhalb desselben ζW, also Δ sich nicht merklich ändert. Dann können für σ, τ, Δ ihre Anfangswerte $\sigma_0, \tau_0, \Delta_0$ gesetzt werden. Bestimmt

*) Bei kleinen Geschwindigkeiten scheint dies nach den Kummerschen Versuchen (s. § 7) nicht der Fall zu sein; für große Geschwindigkeiten ist es nicht festgestellt.

man nun $\varkappa$ und λ so, daß α und $\dot\alpha$ die gegebenen Anfangswerte α_0 und $\dot\alpha_0$ annehmen, so erhält man aus § 57 (14):

$$\alpha = A\,\frac{\alpha_0\,\tau_0 - i\,\dot\alpha_0}{\sqrt{\Delta_0}}\,e^{-i\sigma_0 t} - A\,\frac{\alpha_0\,\sigma_0 - i\,\dot\alpha_0}{\sqrt{\Delta_0}}\,e^{-i\tau_0 t}\,. \tag{16}$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung ist eine oskulierende Annäherung an die wirkliche Bewegung im Zeitpunkt $t = 0$.

Insbesondere ist im Bahnanfang, falls das Geschoß ungestört ist,

$$\psi_0 \sin\delta_0 = 0\,, \qquad \vartheta_0 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \alpha_0 = 0\,. \tag{17}$$

Ferner ist $\dot\delta_0 = \dot\vartheta_0$ und $\dot\psi_0 = 0$. Nun ist im Anfang

$$d\delta = d\vartheta = \frac{ds}{\varrho}\,,$$

wenn das Geschoß zunächst mit Erhaltung der Achsenrichtung fliegt, also ist wegen § 10 (14)

$$\dot\vartheta_0 = \frac{v_0}{\varrho_0} = \frac{g\sin\delta_0}{v_0}\,. \tag{18}$$

Demnach wird

$$\dot\alpha_0 = \dot\psi_0\sin\delta_0 + i\,\dot\vartheta_0 = \frac{i\,g\sin\delta_0}{v_0} \tag{19}$$

und der Ausdruck für α wird

$$\alpha = A_0\{e^{-i\sigma_0 t} - e^{-i\tau_0 t}\}\,, \tag{20}$$

wenn zur Abkürzung $\dfrac{A\,g\sin\delta_0}{\sqrt{\Delta_0}\cdot v_0} = A_0$ gesetzt wird. Hieraus läßt sich die momentane Pendelung im Anfang erkennen.

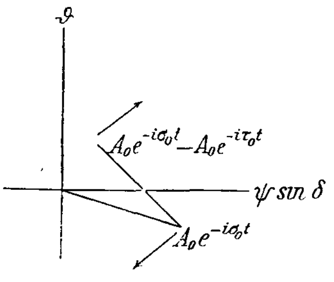

Abb. 46

Der Punkt $A_0\,e^{-i\sigma_0 t}$ beschreibt im System mit der ϑ- und $\psi\sin\delta$-Achse einen Kreis mit dem Radius A_0 um den Nullpunkt (s. Abb. 46) im Sinne des Uhrzeigers, beginnend im Punkte A_0, einen Umlauf vollendend in der Zeit $2\pi/\sigma_0$. Der Punkt $A_0\,e^{-i\tau_0 t}$ beschreibt einen ebensolchen Kreis in der Zeit $2\pi/\tau_0$. Die Umlaufszeit $2\pi/\sigma_0$ ist groß, die andere $2\pi/\tau_0$ klein*). Die zur ersten gehörige Geschoßpendelung heiße Präzession, die zur zweiten gehörige Nutation. Aus beiden ist die Gesamtpendelung zusammengesetzt.

---

*) $\dfrac{2\pi}{\tau_0}$ ist wegen (15) anfänglich etwas größer als $\dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{2\pi}{r} = \dfrac{A}{C}\cdot\dfrac{\text{Drallänge}}{v_0}$, die Winkelgeschwindigkeit σ_0 der Präzession anfänglich etwas größer als $\dfrac{\zeta W}{C r}$, damit wird ein bekanntes Ergebnis präzisiert; s. z. B. Cranz, Ballistik 1896, S. 511

Die Nutation ist vom Luftwiderstande anfänglich fast unabhängig, da die Drehgeschwindigkeit τ_0 nahezu Cr/A ist. Bei der Gesamtpendelung beschreibt α einen Kreis vom Radius A_0 im Nullpunkt längs der positiven ϑ-Achse beginnend, dessen Mittelpunkt langsam auf einem Kreise vom Radius A_0 um den Nullpunkt wandert. Die Radien beider Kreise wachsen, weil A_0 wächst. Die Umlaufszeit der Nutation wächst, die der Präzession nimmt ab. Nach einer Nutationspendelung kommt die Geschoßachse immer wieder, aber mit der Zeit in abnehmendem Maße in die Nähe der Bahntangente. Da der Mittelpunkt der Nutationskreise nur langsam weiterrückt, bleiben die Nutationskreise lange Zeit größtenteils rechts der Bahntangente. Die praktisch wichtigen Schußbahnen reichen über dieses Gebiet kaum hinaus.

In jedem Bahnpunkt wird, solange α klein und die Bewegung stabil ist, dieselbe durch die Formel (16) beschrieben, wenn man den betrachteten Bahnpunkt zum Anfangspunkt der Koordinaten und der Zeit nimmt. Die Bewegung kann vom Bahnanfang an diesen allgemeineren Charakter haben, wenn nämlich durch das Bucken des Rohres ein Drehstoß auf die Achse des Geschosses ausgeübt wird. Dann ist nämlich $\dot{\alpha}_0 \neq (i\, g/v_0) \sin \delta_0$, $\dot{\psi}_0 \neq 0$, und folglich im Bahnanfang auch $\alpha_0 \neq 0$ (s. Kap. XIV). Die Werte von α_0, $\dot{\alpha}_0$ treten zu den übrigen Anfangselementen als neue Anfangselemente hinzu. Daß in der Tat $\alpha_0 \neq 0$ ist, wird sich weiter unten ergeben.

§ 59. Die Siacci-Majevskischen Translationsgleichungen mit Berücksichtigung der Seitenabweichung

Aus [s. § 58 (18)]

$$\dot{\vartheta}_0 = \frac{g \sin \delta_0}{v_0}$$

folgt der Anfang der Entwicklung von ϑ nach t

$$\vartheta = \frac{g \sin \delta_0}{v_0}\, t + \cdots.$$

Aus $\dot{\psi}_0 = 0$ und der Gleichung § 56 (8) für α, die am Anfang wegen (17), (18) übergeht in:

$$\ddot{\psi}_0 \sin \delta_0 = \frac{C\,r}{A}\, \dot{\vartheta}_0\,, \qquad \ddot{\vartheta}_0 = 0\,,$$

folgt ebenso:

$$\psi = \frac{C\,r}{A}\, \frac{g}{v_0}\, \frac{t^2}{2} + \cdots.$$

Die Querkomponente $h = w\,|\alpha|$ der Verzögerung w durch den Luftwiderstand zerfällt in die zwei Komponenten $w\vartheta$ und $w\psi \sin \delta$ senkrecht zur Geschoßachse, also nach den Koordinatenrichtungen in die drei Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} h_x &= \quad w\,\vartheta \sin\delta\,, \\ h_y &= -\, w\,\psi \sin\delta\,, \\ h_z &= -\, w\,\vartheta \cos\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Von den drei Translationsgleichungen § 56 (4):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{w}{v}\,\dot{x} - h_x\,, \\ \ddot{y} &= -\frac{w}{v}\,\dot{y} - h_y\,, \\ \ddot{z} &= -\frac{w}{v}\,\dot{z} - h_z - g \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ergibt die erste unter Einführung von $\dot{x}$ als unabhängiger Veränderlicher und Benutzung von

$$dt = \frac{d\dot{x}}{\ddot{x}}\,, \qquad t = \int \frac{d\dot{x}}{\ddot{x}}\,, \tag{T}$$

$$d\dot{x} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}\,dx - h_x\,dt = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}\,dx - h_x\frac{d\dot{x}}{\ddot{x}} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}\,dx - \frac{w \sin\delta}{\ddot{x}}\,\vartheta\,d\dot{x}\,,$$

also

$$x = \int \frac{\dot{x}}{\ddot{x}}\left(1 + \frac{w\cos\delta}{\ddot{x}}\,\vartheta\right) d\dot{x}\,. \tag{D}$$

Das erste Glied der Entwicklung von x nach $\dot{x}$ oder nach t bleibt also von ϑ unbeeinflußt; ϑ beeinflußt erst das zweite Glied.

Die erste und dritte Translationsgleichung (22) ergeben:

$$\ddot{z}\,\dot{x} - \dot{z}\,\ddot{x} = h_x\,\dot{z} - (h_z + g)\,\dot{x}\,,$$

d. h.

$$d\,\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = h_x\,\frac{\dot{z}\,dt}{\dot{x}^2} - (h_z + g)\,\frac{dt}{\dot{x}}\,,$$

integriert

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{tg}\omega_0 &= \int \left\{h_x\,\frac{\dot{z}}{\dot{x}} - (h_z + g)\right\} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}} \\ &= \int \left\{-g + w\,\vartheta\left(\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\sin\delta - \cos\delta\right)\right\} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{J}$$

$$z - x\operatorname{tg}\omega_0 = \int\!\!\int \left\{-g + w\,\vartheta\left(\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\cos\delta + \sin\delta\right)\right\} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}} \cdot \frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{\ddot{x}}\,; \tag{A}$$

die unter dem Integral stehenden Glieder mit ϑ beeinflussen also das Anfangsglied nicht.

Die erste und zweite Translationsgleichung (22) ergeben ebenso

$$\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x} = h_x\,\dot{y} - h_y\,\dot{x}\,,$$

$$d\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = h_x\,\frac{\dot{y}\,dt}{\dot{x}^2} - h_y\,\frac{dt}{\dot{x}}\,,$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - \operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 = \int\left\{h_x\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - h_y\right\}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}} = \int\left\{\vartheta\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\cos\delta + \psi\sin\delta\right\}\frac{w}{\ddot{x}}\cdot\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}\,, \tag{M}$$

wenn mit $\tilde{\omega}_0$ der Anfangswert von $\tilde{\omega}$ bezeichnet wird.

Nimmt man also $\tilde{\omega}_0 = 0$, so folgt

$$y = \int\int\left\{\vartheta\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\cos\delta + \psi\sin\delta\right\}\frac{w}{\ddot{x}}\,\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}\,dx\,. \tag{B}$$

Die Formeln (T), (D), (J), (A) sind als Verbesserung der Siaccischen, die Formeln (M), (B) als Verbesserung der Majevskischen anzusehen. Aus einer ersten Lösung für $\alpha = 0$ erhält man eine zweite, genauere durch Einführung von ϑ und ψ als Funktionen der Zeit usw.

Benutzt man die Taylorsche Entwicklung

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 + t\left(\frac{d\operatorname{tg}\tilde{\omega}}{dt}\right)_0 + \cdots = \dot{\tilde{\omega}}_0\,t + \cdots\,,$$

so folgt aus (M), wenn man im Integranden die Elemente der ebenen Bahn einsetzt:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \int(-\dot{\tilde{\omega}}_0\,t\,\vartheta\operatorname{ctg}\delta - \psi)\,\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} + \cdots = \int\left(\dot{\tilde{\omega}}_0\cdot\frac{g\cos\delta_0}{v_0}\,t^2 + \frac{C\,r}{A}\cdot\frac{g}{v_0}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}\,dt + \cdots$$
$$= -\left(\dot{\tilde{\omega}}_0\cos\delta_0 + \frac{C\,r}{2\,A}\right)\cdot\frac{g}{v_0}\cdot\frac{\ddot{x}_0}{\dot{x}_0}\,\frac{t^3}{3} + \cdots\,,$$

also

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_0 = 0\,,\qquad \text{d. h.}\qquad \dot{\tilde{\omega}}_0 = 0\,,$$

also

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{C\,r}{2\,A}\cdot\frac{g\sin\delta_0}{v_0}\,w_0\cdot\frac{t^3}{3} + \cdots\,,\\ y &= \frac{C\,r}{A}\cdot\frac{g\,w_0\sin\delta_0}{v_0}\cdot\frac{t^4}{24} + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wenn also das Geschoß ungestört die Bahn beginnt, ist die Seitenabweichung in erster Annäherung der vierten Potenz der Schußzeit proportional.

Dieses Ergebnis beruht auf den Annahmen, daß $\vartheta_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ ist. Wir wollen jetzt auch die Annahme verfolgen, daß $\psi_0 \neq 0$ ist; d. h. am Bahnanfang bilde die senkrechte Geschoßmittelebene einen Winkel ψ_0 mit der senkrechten Berührungsebene der Bahn, das ist mit der $x\,z$-Ebene.

In diesem Falle folgt durch Einsetzen von $\frac{\dot y}{\dot x} = \dot\omega_0\, t + \cdots$ in den Integranden von (M): $\frac{\ddot y}{\dot x} = -\psi_0 \cdot \frac{\ddot x_0}{\dot x_0}\, t + \cdots$. Vergleicht man dies mit $\frac{\dot y}{\dot x} = \dot\omega_0\, t + \cdots$, so ergibt sich jetzt $\dot\omega_0 \neq 0$. Der Grundriß der Bahn berührt zwar die x-Achse, aber die Anfangskrümmung ist nicht Null. Durch Integration erhält man, wenn noch $\dot x \doteq \dot x_0$ gesetzt wird,

$$y = -\psi_0\, \ddot x_0 \frac{t^2}{2} + \cdots = \psi_0\, w_0 \cos\omega_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \cdots; \tag{24}$$

also: die Seitenabweichung ist angenähert proportional der *zweiten* Potenz der Schußzeit, wenn das Geschoß schräg gestellt die Bahn beginnt. Der Vergleich mit der Erfahrung in § 61 wird ergeben, daß in der Tat $\psi_0 \neq 0$ ist, daß also die Entwicklung (24) und nicht (23) gilt.

§ 60. Dieselben Gleichungen vereinfacht

Wenn $\psi_0 \neq 0$ ist, wird auch das Anfangsglied von y nach (24) durch ϑ nicht beeinflußt. Setzt man deshalb angenähert $\vartheta = 0$, also nach (21)

$$h_x = 0\,, \qquad h_z = 0\,, \qquad h_y = h\,,$$

so werden die Translationsgleichungen einfacher:

$$\left.\begin{aligned} \ddot x &= -\frac{w}{v}\,\dot x\,, \\ \ddot y &= -\frac{w}{v}\,\dot y - h\,, \\ \ddot z &= -\frac{w}{v}\,\dot z - g\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Diese Gleichungen ergeben einerseits für den Aufriß der Bahn in der xz-Ebene*):

$$t = \int \frac{d\dot x}{\ddot x} = T(\dot x) - T(\dot x_0)\,, \tag{T}$$

$$x = \int \frac{\dot x\, d\dot x}{\ddot x} = D(\dot x) - D(\dot x_0)\,, \tag{D}$$

$$\operatorname{tg}\omega_0 - \operatorname{tg}\omega = \int \frac{g\, d\dot x}{\dot x\, \ddot x} = J(\dot x) - J(\dot x_0)\,, \tag{J}$$

$$x \operatorname{tg}\omega_0 - z = \iint \frac{g\, d\dot x}{\dot x\, \ddot x}\, \frac{\dot x\, d\dot x}{\ddot x} = A(\dot x) - A(\dot x_0) - J(\dot x_0)\{D(\dot x) - D(\dot x_0)\}, \tag{A}$$

---

*) Der Aufriß der Bahn ist also angenähert die ebene Bahn, die man erhält, wenn man die Querkomponente des Luftwiderstandes vernachlässigt.

wo T, D, J, A die Siaccischen Funktionen sind; andererseits genau so für den Grundriß der Bahn in der xy-Ebene:

$$\operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 - \operatorname{tg}\tilde{\omega} = \int \frac{h\,d\dot{x}}{x\,\ddot{x}} = M(\dot{x}) - M(\dot{x}_0)\,, \tag{M}$$

$$x\operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 - y = \iint \frac{h\,d\dot{x}}{\dot{x}\,\ddot{x}}\,\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{\ddot{x}} = B(\dot{x}) - B(\dot{x}_0) - M(\dot{x}_0)[D(\dot{x}) - D(\dot{x}_0)]\,. \tag{B}$$

Näherungsweise ist

$$M(\dot{x}) = \frac{(h)}{g}\,J(\dot{x})\,, \qquad B(\dot{x}) = \frac{(h^2)}{g^2}\,A(\dot{x})\,,$$

wenn (h), (h^2) geeignete Mittelwerte von h und h^2 sind. Dadurch ergibt sich eine näherungsweise Ableitung des Grundrisses aus dem Aufriß der Bahn.

M und B entsprechen den von Majevski so bezeichneten Funktionen, wenn man $\ddot{x}$ wie in den Siaccischen Formeln durch $\dot{x}$ ausdrückt und h in noch zu erörternder Weise bestimmt. Um die Formel für $x\operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 - y$ in die von Majevski*) überzuführen, muß man zunächst setzen [vgl. § 31 (2), (5)]:

$$\dot{x}\sec\omega_0 = u\,, \qquad -\ddot{x} = \mathsf{B}\,w(u)\cos\omega_0\,.$$

Dann wird

$$x\operatorname{tg}\tilde{\omega}_0 - y = \iint \frac{h\,du}{\mathsf{B}\,u\,w(u)}\cdot\frac{u\,du}{\mathsf{B}\,w(u)}$$

und dieser Ausdruck wird dem entsprechenden bei Majevski gleich, wenn man h proportional $\mathsf{B}^2\sec^2\omega_0/u$ setzt; dabei darf aber der Proportionalitätsfaktor nicht mehr von ω_0 abhängen, sondern nur vom Geschoß und seinem anfänglichen Bewegungszustand.

Eine oskulierende Approximation erforderte aber $\mathsf{B} = 1$ (s. § 31). Will man also den Anfangswert von h richtig finden, so müßte man $\mathsf{B} = 1$ setzen. Das ergäbe $h\cdot u$ proportional $\sec^2\omega_0$. Wir werden statt dessen weiter unten (§ 61) finden, daß $h\cdot u$ proportional $\cos\omega_0$ ist.

§ 61. Vergleich mit der Erfahrung

Die Richtungskosinusse der Schmiegungsebene der Bahn im Punkte x, y, z sind proportional

$$(\dot{y}\,\ddot{z} - \ddot{y}\,\dot{z}) : (\dot{z}\,\ddot{x} - \ddot{z}\,\dot{x}) : (\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y})\,;$$

die Krümmung an der Stelle (x, y, z) ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{(\dot{y}\,\ddot{z} - \ddot{y}\,\dot{z})^2 + (\dot{z}\,\ddot{x} - \ddot{z}\,\dot{x})^2 + (\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y})^2}}{v^3}$$

*) Siehe z. B. Enc. d. sc. math. IV. 6. S. 72 (1). Bei Majevski, a. a. O., fehlt der Faktor $\sec^2\omega_0$.

und die Windung, wenn h klein gegen g ist

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\varrho^2 \begin{vmatrix} \dot x & \dot y & \dot z \\ \ddot x & \ddot y & \ddot z \\ \dddot x & \dddot y & \dddot z \end{vmatrix}}{(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)^3} = \frac{\begin{vmatrix} \dot x & \dot y & \dot z \\ 0 & h & g \\ 0 & \dot h & \dot g \end{vmatrix}}{v^2 g^2 \cos^2 \omega} = \frac{\dot h}{g \dot x}.$$

Insbesondere ist im Anfangspunkt:

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 & \dot x_0 = v_0 \cos \omega_0 & \ddot x_0 = - w_0 \cos \omega_0 \\ y_0 = 0 & \dot y_0 = 0 & \ddot y_0 = - h_0 \\ z_0 = 0 & \dot z_0 = v_0 \sin \omega_0 & \ddot z_0 = - w_0 \sin \omega_0 - g, \end{array}$$

also sind die Richtungskosinusse proportional

$$\dot z_0 h_0 : \dot x_0 g : - \dot x_0 h_0;$$

die Krümmung ergibt sich zu

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\dot z_0^2 h_0^2 + \dot x_0^2 g^2 + \dot x_0^2 h_0^2}}{v_0^3};$$

die Windung zu

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\dot h_0}{g \dot x_0}.$$

Nun läßt sich erfahrungsgemäß die Seitenabweichung für kleine und mittlere Entfernungen dadurch ausgleichen, daß man der Aufsatzstange eine seitliche Neigung gibt, aber ihre rechtwinklige Stellung zur Seelenachse beibehält.*) Bezeichnet man mit σ den Winkel der Ebene Seelenachse—Aufsatzstange mit der senkrechten Ebene $y = 0$, so bestimmen die drei Richtungen Seelenachse, Visierlinie, x-Achse ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Katheten die Erhöhung ω_0 und der Winkel ι sind, um den die Visierlinie gegen die x-Achse gedreht ist. Genau dasselbe Dreieck erhält man unter der Annahme, daß die Bahn eine ebene Kurve ist, deren Ebene den Winkel σ mit der vertikalen xz-Ebene bildet (s. Abb. 47). Dann ist ι die „scheinbare" Seitenabweichung infolge der Verdrehung der Schußbahn. Die Tatsache, daß man die Seitenabweichung durch Schrägstellen des Aufsatzes nahezu ausgleichen kann, ist also gleichbedeutend mit den Tatsachen, daß **erstens** die Bahn nahezu eben, die Windung, also $\dot h$ nahezu Null, h nahezu konstant ist, und daß **zweitens** die Anfangsschmiegungsebene der Bahn um einen

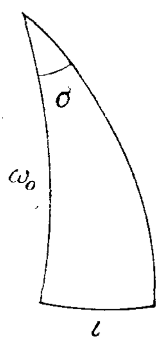

Abb. 47

*) Diese Tatsache hatte ich 1894 aus den Schußtafeln der Feldartillerie, die damals noch nicht den seitlich geneigten Aufsatz hatte, abgeleitet und nebst dem daraus für die Anfangsschmiegungsebene weiter unten abgeleiteten Satz der Kgl. Preuß. Versuchsanstalt in Spandau mitgeteilt.

von der Erhöhung nahezu unabhängigen Winkel gegen die Vertikalebene geneigt ist. Der Kosinus dieses Winkels ist nach obigem:

$$\frac{g\,\dot{x}_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 g^2 + \dot{x}_0^2 h_0^2 + \dot{z}_0^2 h_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0^2}{g^2}\left(1 + \frac{\dot{z}_0^2}{\dot{x}_0^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0^2}{g^2 \cos^2 \omega_0}}}\,;$$

also sein Tangens gleich $h_0/g \cos \omega_0$. Da dieser von der Erhöhung ω_0 unabhängig sein soll, muß h_0 proportional $\cos \omega_0$ sein. Nun folgt aus

$$h = h_y = w\,\psi \sin \delta$$

für den Anfangswert

$$h_0 = w_0\,\psi_0 \sin \delta_0 = w_0\,\psi_0 \cos \omega_0\,,$$

also ergibt sich noch, daß ψ_0 von δ_0 unabhängig sein muß.

Für die Entscheidung zwischen den zwei Fällen des § 59 genügt es schon zu wissen, daß $\operatorname{tg} \sigma = h_0/g \cos \omega_0$ einen von Null verschiedenen Wert hat, denn daraus folgt auch $\psi_0 \neq 0$, d. h. das Geschoß verläßt schräg gestellt das Rohr und diese Schrägstellung bedingt hauptsächlich die Seitenabweichung, denn infolge derselben wird die Seitenabweichung annähernd der zweiten statt der vierten Potenz der Zeit proportional. Wäre es technisch möglich, $\psi_0 = 0$ zu machen, so würde die Seitenabweichung außerordentlich verringert.

Soweit h als konstant angesehen werden kann, läßt sich die Schußbahn noch genauer beschreiben. Setzt man nämlich:

$$g^2 + h^2 = G^2\,, \qquad G > 0\,,$$

$$\frac{y\,g - z\,h}{G} = Y\,,$$

$$\frac{y\,h + z\,g}{G} = Z\,,$$

so werden durch diese rechtwinklige Koordinatentransformation, die eine Drehung um die x-Achse um den Winkel $\operatorname{arc\,tg} \frac{h}{g}$ bedeutet, die Bahngleichungen

$$\ddot{x} = -\frac{w}{v}\,\dot{x}\,,$$

$$\ddot{Y} = -\frac{w}{v}\,\dot{Y}\,,$$

$$\ddot{Z} = -\frac{w}{v}\,\dot{Z} - G\,,$$

d. h. die Schußbahn verläuft in der schrägen xZ-Ebene wie die eines nicht rotierenden Geschosses unter dem Einfluß einer **schrägen** Erdbeschleunigung G. Genauer erhält man aber die Lage der Bahn, wenn man die ebene Schußbahn $x \sec \omega_0 = v_0 t + \cdots$, $x \operatorname{tg} \omega_0 - z = \frac{1}{2} g t^2 + \cdots$ um die Anfangstangente $x \operatorname{tg} \omega_0 - z = 0$ um den Winkel σ dreht. Zu dem Zweck machen wir erstens die Transformation:

$$\begin{aligned} -x \sin \omega_0 + z \cos \omega_0 &= Z\,, \\ x \cos \omega_0 + z \sin \omega_0 &= X\,, \end{aligned}$$

zweitens die Transformation:

$$\begin{aligned} y \cos \sigma - Z \sin \sigma &= Y \\ y \sin \sigma + Z \cos \sigma &= \mathfrak{Z}\,. \end{aligned}$$

Da die Schußbahn in der Y-Ebene verläuft, so ist für sie $Y = 0$, $y = Z \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} \sigma \cos \omega_0 \cdot \frac{1}{2} g t^2 + \cdots$. Das bestätigt die zweite Entwicklung aus § 59 und ergibt zugleich $\psi_0 w_0 = g \operatorname{tg} \sigma$. Da man σ aus den Schußtafeln ableiten kann, ist hierdurch ψ_0 bestimmt.

Wir wollen den Satz, daß die Bahn annähernd eine ebene Kurve ist, deren Ebene mit der vertikalen einen von der Erhöhung unabhängigen Winkel σ bildet, für die französische 75 mm-Feldkanone, Modell 1897, nachprüfen. Unter Zugrundelegung eines Winkels $\sigma = 1^0\,20'\,34''$ sind die Abweichungen berechnet und in der vierten Spalte der folgenden Tafel zusammengestellt; die fünfte Spalte enthält die Fehler.

Schußweite	Erhöhung ω_0		Abweichung Schußtafel	Abweichung berechnet	Fehler	
km	Grad	Min.	m	m	m	Teilstriche
1	1	6	0,4	0,449 rund 0,4	0	0
2	2	43	2,2	2,220 „ 2,2	0	0
3	4	46	6,5	5,836 „ 6,0	0,5	0,16
4	7	16	14,9	11,950 „ 12,0	2,9	0,70
5	10	19	29,5	20,96 „ 21,0	8,5	1,70

Der Fehler ist also bis etwa 3000 m Schußweite unmerklich und überschreitet erst zwischen 4000 und 5000 m einen Teilstrich. Der Satz ist also in der Tat bei kleinen und mittleren Entfernungen mit einer praktisch völlig ausreichenden Genauigkeit richtig.

Die anfängliche Schrägstellung des Geschosses wird nicht durch den Luftwiderstand, sondern dadurch veranlaßt, daß das Geschoß durch das Bocken des Rohres eine aufwärts kippende Bewegung erhält, die sich im Moment, in dem das Geschoß das Rohr verläßt, nach dem Kreiselgesetz in einer seitlichen Drehung äußert, nach rechts bei Rechtsdrall, um so stärker, je größer r ist; in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Heydenreich.*) Der Drehwinkel $\psi_0 \sin \delta_0$ muß proportional der das Bocken verursachenden waagerechten Rückstoßkomponente, also proportional $\sin \delta_0$ sein; in Übereinstimmung mit dem obigen empirischen Ergebnis, daß ψ_0 von δ_0 nicht abhängt.

*) Siehe z. B. Encyclopédie, a. a. O. S. 65.

Die Tatsache der anfänglichen Schrägstellung des Geschosses haben wir oben aus der Verdrehung der Anfangsschmiegungsebene erschlossen. Zu demselben Ergebnis kommen wir durch Vergleich der beiden Reihenentwicklungen, die wir im § 59 für die Seitenabweichung y gaben, mit den Schußtafeln, die y^0 dem Quadrate der Zeit proportional geben: $y^0 = k \cdot t^{02}$ (Charbonnier) oder mit anderen empirischen Formeln für die Seitenabweichung. Deren gibt es mehrere. Zunächst gilt nach Haupt eine empirische Formel der Art:

$$y = \mu_0 (\omega_0 - \omega)\, t\,,$$

wo μ_0 eine mit ω_0 etwas veränderliche Größe ist.

Setzt man darin

$$\omega_0 - \omega = \frac{g\, \dot{x}_0}{v_0^2}\, t + \cdots,$$

so erhält man $y = \mu_0 \cos \omega_0 \frac{g}{v_0}\, t^2 + \cdots$. Das stimmt mit unserer Formel (24) überein und ergibt für μ_0 den Anfangswert: $\mu_0 = \frac{1}{2}\, \psi_0 \frac{w_0}{g}\, v_0$.

Die Formel von Hélie:

$$y^0 = \mathfrak{A}\, \dot{z}_0^2\,,$$

wo $\mathfrak{A}$, der sogenannte Ablenkungswert, eine von ω_0 unabhängige Größe ist, gibt nach Einsetzen von $\dot{z}_0 = \frac{1}{2} g t^0 + \cdots$ den Ausdruck $y^0 = \mathfrak{A} \frac{g^2}{4}\, t^{02} + \cdots$; in bezug auf t^0 in Übereinstimmung mit der unsrigen, in bezug auf $\mathfrak{A}$ ergibt der Vergleich: $\mathfrak{A} = \frac{2\, w_0}{g^2}\, \psi_0 \cos \omega_0$, so daß nur für Flachschüsse $\mathfrak{A}$ als unabhängig von ω_0 anzusehen ist. $\mathfrak{A}$ ist empirisch ermittelt, also ergibt sich auch hieraus wieder ψ_0. Nach Prescott*) ist y^0 proportional $\lambda\, x^0 - e^{\lambda\, x^0} + 1$, d. h. proportional $x^{02} + \cdots$ oder also proportional $t^{02} \cdots$. Der Proportionalitätsfaktor kann natürlich nicht durch die Anfangselemente $\dot{x}_0$, $\dot{z}_0$ allein ausgedrückt werden, da die Abweichung noch vom Geschoß abhängt. Geschosse, völlig gleich nach Form, Gewicht und Anfangsgeschwindigkeit, haben verschiedene Seitenabweichungen, wenn ihre Massenverteilung verschieden ist.

Durch die vorstehenden Vergleiche ist die Richtigkeit der Formel

$$y = \frac{1}{2}\, \psi_0\, w_0 \sin \delta_0 \cdot t^2 + \cdots$$

erhärtet worden. Damit ergibt sich auch $h_0 = - \ddot{y}_0 - \frac{w_0}{v_0}\, \dot{y}_0 = - \psi_0 w_0 \sin \delta_0$, der Anfangswert von h, wie oben. Um auch über die anfängliche Ver-

*) Phil. Mag. London Bd. 34 (1917) S. 338, Gleichung (13).

änderung von $h = \psi w \sin\delta$ etwas aussagen zu können, berücksichtigen wir, daß $\dot{h} = \dot{\psi}\cdot(w\cdot\sin\delta) + \psi\cdot\frac{d}{dt}(w\cdot\sin\delta)$ anfänglich sehr klein bleibt. Da nun $\frac{d}{dt}(w\cdot\sin\delta)$ anfänglich den endlichen Wert [aus § 19 (21), (22) durch Differentiation abzuleiten]

$$\dddot{x}_0 = \frac{w_0^2}{v_0}\left(n + (n-1)\frac{g}{w_0}\sin\omega_0\right)\cos\omega_0$$

hat, während ψ_0 nach Voraussetzung klein erster Ordnung ist, so folgt, daß auch $\dot{\psi}_0$ klein erster Ordnung ist. Da auch $h\ddot{x} = \psi w \sin\delta\cdot\ddot{x}$ anfangs klein erster Ordnung ist, so gilt dasselbe für $\dot{h}\dot{x} + h\ddot{x}$. Demnach ist die Größe $h\dot{x}$ nur langsam veränderlich. Man kann also angenähert setzen

$$h\dot{x} = h_0\dot{x}_0,$$

d. h.

$$h = -\psi_0 w_0 \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}}\sin\delta_0$$

oder, wenn man $\dot{x} = u\cos\omega_0$, $\dot{x}_0 = u_0\cos\omega_0$ einführt:

$$h = -\psi_0 w_0 \frac{u_0}{u}\cos\omega_0 .$$

Und es leuchtet ein, daß, wenn man überhaupt mit einer gewissen Annäherung h umgekehrt proportional u setzen kann, dann der Proportionalitätsfaktor den oben angegebenen Wert haben muß. In den Formeln (M) und (B) ist also für h in zweiter Annäherung der obige Wert $\psi_0 w_0 \frac{v_0}{\dot{x}}\cos^2\omega_0$ zu setzen. Nunmehr kann man auch das zweite Glied der Entwicklung von h nach t angeben. Aus $y = \frac{1}{2}h_0 t^2 + \cdots$ und $\ddot{y} + \frac{w}{v}\dot{y} = -h$ folgt nämlich $-h = h_0\left(1 + \frac{w_0}{v_0}t\right) + \cdots$.

§ 62. Hauptgleichungen und Quadraturen

Für den Grundriß der Schußbahn fanden wir das Formelsystem § 60 (M), (B) als Seitenstück zu dem Formelsystem für den Aufriß. Ebenso gibt es nun auch das Seitenstück zu den Formeln § 13 (30) und zur Hauptgleichung, wovon wir im folgenden Kapitel Gebrauch zu machen haben. Aus den drei Gleichungen § 60 (25) erhält man zunächst durch Komposition mit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ und Berücksichtigung von $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=v^2$, $\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=v\dot{v}$, $\operatorname{tg}\omega=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, $\operatorname{tg}\tilde{\omega}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$:

$$\dot{v}=-w-\frac{g\operatorname{tg}\omega+h\operatorname{tg}\tilde{\omega}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}}},$$

alsdann durch Komposition mit $-\dot{z}$, 0, $\dot{x}$ und mit $-\dot{y}$, $\dot{x}$, 0:

$$\dot{x}\dot{\omega}=-g\cos^2\omega,$$
$$\dot{x}\dot{\tilde{\omega}}=-h\cos^2\tilde{\omega}.$$

Und aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$-dt=\frac{v}{w}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}}}{w}d\dot{x}=\frac{\dot{x}}{g}d\operatorname{tg}\omega=\frac{\dot{x}}{h}d\operatorname{tg}\tilde{\omega}.$$

Diese zwei Gleichungen bilden das Hauptgleichungspaar für den räumlichen Geschwindigkeitsriß. Aus den letzten Formeln erhält man durch Multiplikation mit 1, bzw. $\dot{x}$, bzw. $\dot{z}$, bzw. $\dot{y}$:

$$t=\int\frac{\dot{x}}{g}d\operatorname{tg}\omega=\int\frac{\dot{x}}{h}d\operatorname{tg}\tilde{\omega},$$
$$x=\int\frac{\dot{x}^2}{g}d\operatorname{tg}\omega=\int\frac{\dot{x}^2}{h}d\operatorname{tg}\tilde{\omega},$$
$$z=\int\frac{\dot{x}^2}{g}\operatorname{tg}\omega\, d\operatorname{tg}\omega,\qquad y=\int\frac{\dot{x}^2}{h}\operatorname{tg}\tilde{\omega}\, d\operatorname{tg}\tilde{\omega}.$$

Wenn also der Geschwindigkeitsriß bekannt ist, d. h. die zwei Gleichungen zwischen $\dot{x}$, ω, $\tilde{\omega}$, dann ist die Auffindung der Schußbahn auf Quadraturen zurückgeführt.

§ 63. Geschützneigung und Seitenabweichung

Für eine seitliche Neigung des Geschützes um den Winkel σ fanden wir nach Abb. 29 in § 45:

$$\operatorname{tg}\iota=\operatorname{tg}\omega_0\sin\sigma,$$

während das Dreieck Abb. 47 in § 61 für die Neigung der Schußbahnebene ergibt:

$$\operatorname{tg}\iota=\sin\omega_0\operatorname{tg}\sigma.$$

Bei kleinem σ und nicht zu großem ω_0 ist daher in beiden Fällen

$$\iota=\omega_0\,\sigma,$$

d. h. durch Geschützneigung oder schiefe Schildzapfenachse kann die Seitenabweichung auf kleinen und mittleren Entfernungen gerade ausgeglichen werden. Auf große Entfernungen schießt man mit indirekter

Beobachtung, braucht also keinen Ausgleich. Eine Neigung der Schildzapfenachse ist zweckmäßig bei unabhängiger Visierlinie und namentlich dann leicht herzustellen, wenn diese Achse, wie z. B. beim russischen Feldgeschütz, von der Radachse verschieden ist. Übrigens handelt es sich nur um sehr kleine Neigungswinkel. Auch beim Schießen gegen Luftziele ist dieser Ausgleich, wenn auch weniger genau, noch zu empfehlen, da dadurch wenigstens der Hauptteil der Seitenabweichung beseitigt wird.

Zwölftes Kapitel

Kosmische Ballistik

§ 64. Ältere Ansätze

Das Luftgewicht hängt von der Höhe, also bei einer gegebenen Schußbahn von irgendeinem Element derselben, z. B. von $\operatorname{tg} \omega$ ab. Demnach kann man der Veränderung desselben Rechnung tragen, indem man in den Differentialgleichungen für den Geschoßfaktor c eine passende Funktion von $\operatorname{tg} \omega$ einsetzt. Zu dem angegebenen Zwecke macht zuerst Sparre eine solche Substitution. Aber die Einführung von $\operatorname{tg} \omega$ in c findet sich schon bei Borda, Legendre und Français, wenn auch nur, um die Gleichungen integrabel zu machen (vgl. § 28). Da von diesen Verfahren die späteren als natürliche Weiterbildung erscheinen, mögen sie hier kurz berührt werden.

Setzt man wieder zur Abkürzung $\operatorname{tg} \omega = p$, so folgt aus § 13 (30)

$$g = - \dot{x} \frac{dp}{dt} = - \dot{x}^2 \frac{dp}{dx}.$$

Differentiation nach der neuen Variablen p ergibt

$$2 \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dp} \frac{dp}{dx} + \dot{x}^2 \frac{d^2p}{dx\,dp} = 0,$$

also

$$\frac{d^2p}{dx\,dp} = -2 \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{2\,w \cos \omega}{v^2 \cos^2 \omega} = \frac{2\,c}{\cos \omega},$$

wenn man das Newtonsche Gesetz $w = c v^2$ zugrunde legt. Demnach erhält man eine integrable Gleichung, z. B. für die Substitution $c = c_0 \dfrac{\cos \omega}{\cos \omega_0}$ (Borda). Denn das gibt:

$$\frac{d}{dp} \frac{dp}{dx} = \frac{2\,c_0}{\cos \omega_0}, \qquad \text{also} \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{2\,c_0}{\cos \omega_0} (p - p_0) + p_0',$$

wenn $\dfrac{dp}{dx} = p'$ gesetzt wird. Daraus folgt durch eine zweite Integration:

$$p - p_0 = \frac{p_0'}{2\,c_0 \cdot \sec \omega_0} \left(e^{\frac{2\,c_0\,x}{\cos \omega_0}} - 1 \right) \tag{1}$$

und, wegen $p = \frac{dz}{dx}$, durch eine dritte

$$z = p_0 x + \frac{p_0'}{2 c_0 \cdot \sec \omega_0} \left(\frac{e^{\frac{2 c_0 x}{\cos \omega_0}} - 1}{c_0 \cdot \sec \omega_0} - x \right). \tag{2}$$

Das ist in Übereinstimmung mit den Formeln § 20 (30), (31) für den Fall $n = 2$. In der Tat ist das Bordasche Gesetz

$$w = c_0 \cdot \frac{\cos \omega}{\cos \omega_0} \cdot v^2$$

zu schreiben

$$- \ddot{x} = c_0 \cdot \sec \omega_0 \cdot \dot{x}^2 \tag{3}$$

oder

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0} = \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^2,$$

wie oben § 20 (31) für

$$\frac{\nu - 2}{\nu - 1} = 2.$$

Legendre und Français verbessern die Bordasche Substitution bzw. durch die folgenden:

$$c = c_0 \cdot \frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{und} \quad c = c_0 \cdot \frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{2} p^2\right)(1 + p^2)}}, \tag{4}$$

in denen α aus der Forderung bestimmt wird, daß für $p = p_0$, $c = c_0$ sein muß. Diese Substitutionen liefern zwar integrable Fälle, aber der Änderung des Luftgewichtes mit der Höhe tragen sie keine Rechnung.

In welcher Weise das durch eine derartige Substitution erreicht werden kann, zeigt z. B. St. Robert so: Da die Abhängigkeit des Luftgewichtes δ von der Höhe z durch die Formel $\delta = \delta_0 (1 - \varepsilon z)$ gegeben ist [§ 9], hat man noch für eine gegebene Schußbahn die Höhe z durch p oder durch ω auszudrücken. Da z mit dem sehr kleinen Koeffizienten ε multipliziert wird, genügt es, wenn z näherungsweise durch ω ausgedrückt wird. Ein solcher Ausdruck ist z. B.

$$z = z_* \left(1 - \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \omega_0}\right), \quad \text{besser} \quad z = z_* \left(1 - \frac{\sin \omega}{\sin \omega_0}\right)\left(1 - \frac{\sin \omega}{\sin \omega^0}\right),$$

der an den Stellen $\omega = \omega_0$, $\omega = 0$ genau, an der Stelle $\omega = \omega^0$ angenähert (bzw. ebenfalls genau) richtig ist, also eine interpolatorische Approximation darstellt. Majevski führt die Rechnung für das kubische Gesetz $w = c\, v^3$ durch und kommt zu sehr unhandlichen Formeln.

§ 65. Der Bernoullische Fall

Man kann aber das Hauptresultat sogar für das allgemeine Bernoullische Gesetz, das jetzt

$$w = c_0 (1 - \varepsilon z) v^n$$

wird, und eine geeignete Darstellung von z durch ω fast ohne Rechnung ableiten. Die Hauptgleichung § 13 (28) wird nämlich jetzt:

$$\frac{g}{c_0} \cdot \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^{n+1}} = (1 - \varepsilon z) \frac{d\omega}{\cos^{n+1}\omega},$$

ergibt also, wenn $\frac{g}{c_0} = \varkappa^n$, $\quad \frac{n\, d\omega}{\cos^{n+1}\omega} = d\Omega$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{\dot{x}}{\varkappa}\right)^{-n} - \left(\frac{\dot{x}_0}{\varkappa}\right)^{-n} = \int_{\omega}^{\omega_0} (1 - \varepsilon z)\, d\Omega . \tag{5}$$

Durch diese Formel, in der das Integral über den gegebenen Schußbahnbogen von O bis P zu erstrecken ist, erhält man den Wert von $\dot{x}$ in der für veränderliches Luftgewicht berichtigten Schußbahn an der Stelle mit der Neigung ω. Und zu $\dot{x}$ findet man die Werte der übrigen Schußbahnelemente x, z, s, t durch die Formeln § 13 (30).

Die Änderung, die $\left(\frac{\dot{x}}{\varkappa}\right)^{-n}$ infolge der Berücksichtigung der Luftgewichtsabnahme erleidet, beträgt also

$$\int_{\omega}^{\omega_0} - \varepsilon z\, d\Omega .$$

Wir wollen diese Änderung insbesondere für die Endgeschwindigkeit $\dot{x}^0$, also das Integral $-\varepsilon \int_{\omega^0}^{\omega_0} z\, d\Omega$ berechnen. Zu dem Zwecke stellen wir z als Funktion von Ω durch Vermittlung einer Variablen σ durch die folgenden Gleichungen angenähert dar:

$$z = z_* (1 - \sigma^2),$$
$$\Omega = a\sigma + b\sigma^2 .$$

Für $z = z_*$ ist $\sigma = 0$, also auch $\Omega = 0$, also auch $\omega = 0$. Für $z = 0$ wird $\sigma = \pm 1$, und soll $\Omega = \Omega_0$ bzw. $\Omega = \Omega^0$ werden. Das ergibt $a = \frac{\Omega_0 - \Omega^0}{2}$, $b = \frac{\Omega_0 + \Omega^0}{2}$. Nun wird

$$-\varepsilon \int_{\Omega^0}^{\Omega_0} z\, d\Omega = -\varepsilon \int_{-1}^{+1} z_* (1 - \sigma^2)(a + 2b\sigma)\, d\sigma = -\varepsilon \tfrac{2}{3} z_* \cdot 2a = -\varepsilon \int_{\Omega^0}^{\Omega_0} \tfrac{2}{3} z_*\, d\Omega .$$

Hätte man statt des variablen Luftgewichtes $\delta_0(1 - \varepsilon z)$ das konstante Luftgewicht $\delta_0(1 - \varepsilon \frac{2}{3} z_*)$, das in $\frac{2}{3}$ der Gipfelhöhe z_* gilt, angenommen*), so würde die Änderung von $\left(\frac{\dot{x}^0}{\varkappa}\right)^{-n}$ denselben Wert haben.

Hierzu sind einige Bemerkungen zu machen. Bezeichnen wir die Schußbahn für das Luftgewicht δ_0 mit $\Phi(0)$, für das Luftgewicht $\delta_0(1 - \varepsilon z)$ mit $\Phi(\varepsilon z)$, für das Luftgewicht $\delta_0(1 - \varepsilon \frac{2}{3} z_*)$ mit $\Phi(\frac{2}{3} \varepsilon z_*)$, dann heißt der bewiesene Satz: $\dot{x}$ hat denselben Wert in den zu ω^0 gehörenden Punkten auf $\Phi(\varepsilon z)$ und auf $\Phi(\frac{2}{3} \varepsilon z_*)$. Dieser Satz gilt aber nur angenähert, da die zwischen z und ω angenommene Beziehung nur angenähert richtig ist. Die zu ω^0 gehörenden Punkte beider Schußbahnen sind nur angenähert die Endpunkte. Also gilt auch angenähert: $\dot{x}^0$, also auch v^0 hat denselben Wert auf beiden Schußbahnen.

Wir wollen die Beschränkung aufheben, die in der Annahme

$$z = z_*(1 - \sigma^2)$$

lag. Wir wollen aber daran festhalten, daß z eine Funktion von ω ist, die im Intervall $\omega_0 \geqq \omega \geqq 0$ von 0 bis z_* steigt und im Intervall $0 \geqq \omega \geqq \omega^0$

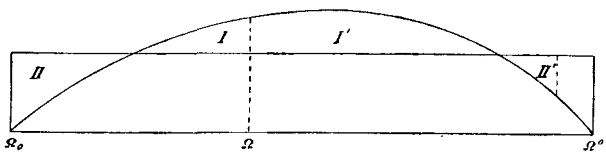

Abb. 48

von z_* bis 0 fällt. z, als Funktion von Ω betrachtet, muß also, wegen $\frac{d\Omega}{d\omega} > 0$, wie in Abb. 48 dargestellt, verlaufen.

Nun gilt für den Inhalt $\int\limits_{\Omega^0}^{\Omega_0} z\,d\Omega$ des von der Kurve und der Ω-Achse gebildeten Segments bekanntlich der Satz, daß er annähernd gleich $\frac{2}{3}$ des Produktes aus Basis $\Omega_0 - \Omega^0$ und Höhe z_* ist**). Demnach ist der obige Satz für $\dot{x}^0$ von der besonderen Darstellung des z durch ω ganz unabhängig. Für die oben gewählte Beziehung zwischen z und Ω wird die Kurve in Abb. 48 eine Parabel und der Inhaltssatz gilt genau.

Auf den beiden Schußbahnen $\Phi(\varepsilon z)$ und $\Phi(\frac{2}{3} \varepsilon z_*)$ hat $\dot{x}_0$ denselben Wert und $\dot{x}^0$ annähernd denselben Wert. Wie steht es mit den Zwischen-

---

*) Majevski findet statt dessen $\frac{2}{3 + \operatorname{tg}^2 \omega_0} \cdot z_*$, was an der unzweckmäßigen Darstellung von z durch ω und der ungenauen Annahme $\omega^0 = -\omega_0$ liegt.

**) Vgl. z. B. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen (Leipzig 1911), S. 211.

werten $\dot{x}$? Der Unterschied von $\left(\frac{\dot{x}}{\varkappa}\right)^{-n}$ auf beiden Schußbahnen wird $-\varepsilon \cdot \int_{\Omega}^{\Omega_0} (z - \frac{2}{3} z_*)\, d\Omega$. Das Integral bedeutet den Unterschied der Segmente I — II (bzw. I + I′ — II — II′) in Abb. 48, ist also anfangs bis in die Nähe des Scheitels negativ, dann positiv. Also gilt annähernd der Satz:

In Punkten mit gleichem ω ist auf dem aufsteigenden (absteigenden) Aste $\dot{x}$ auf der Schußbahn $\Phi(\varepsilon z)$ kleiner (größer) als auf der Schußbahn $\Phi(\frac{2}{3} \varepsilon z_*)$. Berechnet man also die Endelemente x^0, s^0, t^0 für beide Schußbahnen nach den Formeln § 13 (30), so sind die Integranden für die Schußbahn $\Phi(\varepsilon z)$ kleiner auf dem ansteigenden, größer auf dem absteigenden Aste als für die Schußbahn $\Phi(\frac{2}{3} \varepsilon z_*)$. Daraus kann man annähernd schließen, daß die Endelemente für beide Schußbahnen gleich werden. Die Endelemente für die Schußbahn $\Phi(\varepsilon z)$ erhält man also aus den Endelementen für die Schußbahn $\Phi(0)$, indem man an ihnen Korrekturen nach Gleichung § 43 (4) anbringt, wo $\frac{\Delta w_0}{w_0} = -\frac{2}{3} \varepsilon z_*$ zu setzen ist. Dabei kann man z_* z. B. nach der Näherungsformel (s. § 16)

$$z_* = \frac{x^0}{8} (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} |\omega^0|)$$

berechnen.

§ 66. Lösung durch Variation

Das Verfahren des § 65 ist seit langem in praktischem Gebrauch*); eine theoretische Begründung fehlte bisher. Die vorstehenden Entwicklungen ließen sich durch Abschätzung der Fehler noch verschärfen. Wichtiger ist es jedoch, die Beschränkung auf das Bernoullische Gesetz aufzuheben. Gleichzeitig wollen wir auch noch den Einfluß der Änderung von g nach Größe und Richtung infolge der Geschoßhöhe und der geographischen Breite mitberücksichtigen, während wir den Einfluß der Coriolisbeschleunigung lieber durch das Verfahren des § 5 ermitteln.

Mit g bezeichnen wir die scheinbare Schwerebeschleunigung am Anfang der Schußbahn. Im Punkte $P(x, y, z)$ hat sie sich dann geändert: erstens infolge der Ortsveränderung um eine Beschleunigung mit den Komponenten [§ 4 (2)] $-\frac{x}{R} g$, $-\frac{y}{R} g$, $+\frac{2z}{R} g$; zweitens infolge der veränderten Zentrifugalbeschleunigung um eine Beschleunigung, deren Komponenten § 4 (4) angegeben sind. Im ganzen kommt also hinzu eine Beschleunigung mit den Komponenten:

---

*) S. Enc. des sciences math. IV. 6. S. 55.

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x &= -\frac{x}{R}g + \nu^2\mu_x\,,\\ \lambda_y &= -\frac{y}{R}g + \nu^2\mu_y\,,\\ \lambda_z &= \frac{2z}{R}g + \nu^2\mu_z\,,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo

$$\mu_x = x\,(1-\cos^2\Lambda\cos^2\Gamma) - \tfrac{1}{2}\,y\sin 2\Lambda\cos^2\Gamma + \tfrac{1}{2}\,z\cos\Lambda\sin 2\Gamma\,,$$
$$\mu_y = -\tfrac{1}{2}\,x\sin 2\Lambda\cos^2\Gamma + y\,(1-\sin^2\Lambda\cos^2\Gamma) + \tfrac{1}{2}\,z\sin\Lambda\sin 2\Gamma\,,$$
$$\mu_z = \tfrac{1}{2}\,x\cos\Lambda\sin 2\Gamma + \tfrac{1}{2}\,y\sin\Lambda\sin 2\Gamma + z\cos^2\Gamma\,.$$

Die Komponente λ_x ersetzen wir durch eine $\lambda_x\dfrac{ds}{dx}$ in der Richtung ds, und zwei in den Richtungen der y- und z-Achse, die gleich sind $-\lambda_x\dfrac{dy}{dx}$, $-\lambda_x\dfrac{dz}{dx}$; denn die drei Komponenten von $\lambda_x\dfrac{ds}{dx}$ nach den drei Achsen erhält man durch Multiplikation mit bzw. $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$.

Fassen wir nun die gesamten Beschleunigungen, soweit sie in die s-, y-, z-Richtung fallen, in den Bezeichnungen δw, δh, δg zusammen, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\delta w &= w - w_0 + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}}\left[-\frac{x}{R}g + \nu^2\mu_x\right],\\ \delta h &= -\frac{y}{R}g + \nu^2\mu_y - \operatorname{tg}\tilde{\omega}\left[-\frac{x}{R}g + \nu^2\mu_y\right],\\ \delta g &= -\frac{z}{R}g + \nu^2\mu_z - \operatorname{tg}\omega\left[-\frac{x}{R}g + \nu^2\mu_z\right].\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Damit sind die Änderungen von w, h, g für jeden Schußbahnpunkt gegeben, und es sind nunmehr die Änderungen der Schußbahnelemente x, y, z, t, ω, $\tilde{\omega}$, die hierdurch verursacht werden, zu ermitteln. Wir bezeichnen diese Änderungen oder Variationen mit δx, δy usw. und nennen die neue Schußbahn die variierte. δx z. B. bedeutet also den Unterschied der x-Koordinaten eines Punktes der ursprünglichen und des entsprechenden Punktes der variierten Schußbahn. Es muß daher festgesetzt werden, was unter „entsprechenden" Punkten beider Schußbahnen verstanden werden soll. Wir setzen fest, entsprechende Punkte sind solche, in denen die Tangenten gleiche Winkel mit der x-Achse bilden. Da der Kosinus dieses Winkels gleich ist

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}}}\,,$$

so bleibt diese Größe beim Übergang von der Schußbahn zu der variierten unverändert, d. h. es ist $\delta(\mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}) = 0$.

Zur Abkürzung werde die Größe

$$h \,\mathrm{tg}\,\tilde{\omega} + g\,\mathrm{tg}\,\omega = k \tag{8}$$

gesetzt. Dann ergibt das Hauptgleichungspaar (§ 62):

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{w}{g} \cdot \frac{d\,\mathrm{tg}\,\omega}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}}} = \frac{w}{h} \cdot \frac{d\,\mathrm{tg}\,\tilde{\omega}}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}}}$$

durch Zusammensetzung zunächst:

$$k \cdot d\,\lg \dot{x} = w \cdot d\,\lg \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}}\,.$$

Also durch Variation:

$$d\,\lg(\dot{x} + \delta\dot{x}) - d\,\lg \dot{x} = \delta\frac{w}{k} \cdot d\,\lg \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}}\,,$$

oder

$$d\,\lg\left(1 + \frac{\delta\dot{x}}{\dot{x}}\right) = \frac{\delta\dfrac{w}{k}}{\dfrac{w}{k}} \cdot d\,\lg \dot{x}\,,$$

oder integriert:

$$\frac{\delta\dot{x}}{\dot{x}} = \int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\delta\dfrac{w}{k}}{\dfrac{w}{k}}\,\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}\,. \tag{9}$$

Ferner ergeben die Gleichungen:

$$-dt = \frac{\dot{x}}{g}\,d\,\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\dot{x}}{h}\,d\,\mathrm{tg}\,\tilde{\omega}$$

durch Zusammensetzung:

$$-\tfrac{1}{2}\,d\,(\mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}) = \frac{k}{\dot{x}}\,dt = \frac{k}{\dot{x}^2}\,dx = \frac{k}{\dot{x}^2\,\mathrm{tg}\,\tilde{\omega}}\,dy = \frac{k}{\dot{x}^2\,\mathrm{tg}\,\omega}\,dz$$
$$= \frac{k}{\dot{x}^2\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}}}\,ds\,.$$

Also durch Variation:

$$\left(\frac{k}{\dot{x}} + \delta\frac{k}{\dot{x}}\right) d\,(t + \delta t) - \frac{k}{\dot{x}} \cdot dt = 0,$$

d. h.

$$\delta\frac{k}{\dot{x}} \cdot dt + \frac{k}{\dot{x}} \cdot d\,\delta t + \delta\frac{k}{\dot{x}} \cdot d\,\delta t = 0\,,$$

$$\delta t = -\int\limits_0 \frac{\delta \frac{k}{\dot{x}}}{\frac{k}{\dot{x}} + \delta \frac{k}{\dot{x}}} \, dt\,. \tag{10}$$

Ebenso:

$$\left.\begin{aligned}
\delta s &= -\int\limits_0 \frac{\delta \frac{k}{\dot{x}^2}}{\frac{k}{\dot{x}^2} + \delta \frac{k}{\dot{x}^2}} \, ds\,, \\
\delta x &= -\int\limits_0 \frac{\delta \frac{k}{\dot{x}^2}}{\frac{k}{\dot{x}^2} + \delta \frac{k}{\dot{x}^2}} \, dx\,, \\
\delta y &= -\int\limits_0 \frac{\delta \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \tilde{\omega}}}{\frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \tilde{\omega}} + \delta \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \tilde{\omega}}} \, dy\,, \\
\delta z &= -\int\limits_0 \frac{\delta \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \omega}}{\frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \omega} + \delta \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg} \omega}} \, dz\,.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In den Integranden kommen die Variationen von $\operatorname{tg} \omega$ und $\operatorname{tg} \tilde{\omega}$ vor. Das Problem ist also auf Quadraturen zurückgeführt, sobald diese Variationen bekannt sind. Für diese hat man

$$\delta(\operatorname{tg}^2 \omega + \operatorname{tg}^2 \tilde{\omega}) = 0$$

und

$$\frac{d \operatorname{tg} \omega}{g} = \frac{d \operatorname{tg} \tilde{\omega}}{h}\,.$$

Setzt man $\operatorname{tg} \omega = P \cdot \cos \Phi$, $\operatorname{tg} \tilde{\omega} = P \cdot \sin \Phi$, so kommt:

$$\frac{\cos \Phi \cdot dP - \sin \Phi \cdot P \cdot d\Phi}{g} = \frac{\sin \Phi \cdot dP + \cos \Phi \cdot P \cdot d\Phi}{h}$$

also

$$d \lg P = \operatorname{tg}(\Phi + \Psi)\, d\Phi\,,$$

wenn

$$\frac{g}{h} = \operatorname{tg} \Psi$$

gesetzt wird. Wegen $\delta P = 0$ folgt nun:

$$\delta \operatorname{tg}(\Phi + \Psi)\, d\Phi = 0\,,$$

also

$$\operatorname{tg}(\Phi + \delta\Phi + \Psi + \delta\Psi)\, d(\Phi + \delta\Phi) = \operatorname{tg}(\Phi + \Psi)\, d\Phi\,;$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Variablen Φ auf der gegebenen Schußbahn, der abhängigen Variablen $\Phi + \delta\Phi$ auf der variierten Schußbahn, während Ψ und $\delta\Psi$ längs der gegebenen Schußbahn bekannt sind. Ist diese Differentialgleichung nach irgendeiner der bekannten Methoden [vgl. Kapitel V] integriert, so ist $\delta\Phi$ bekannt und damit auch

$$\left.\begin{aligned} \delta \operatorname{tg}\omega &= P\cdot[\cos(\Phi + \delta\Phi) - \cos\Phi]\,,\\ \delta \operatorname{tg}\tilde{\omega} &= P\cdot[\sin(\Phi + \delta\Phi) - \sin\Phi]\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

§ 67. Kleine Änderungen

Die bisherigen Formeln sind so abgeleitet, daß sie auch für *endliche* Variationen gelten. Nehmen wir jetzt an, was meistens zutrifft, daß die Variationen wie kleine Größen behandelt werden dürfen, so ergeben sich wesentliche Vereinfachungen. Man erhält nämlich aus § 66 (9), (10), (11), wenn in den Integranden nur die Glieder erster Ordnung in den Variationen mitgenommen werden:

$$\left.\begin{aligned} \delta \lg \dot{x} &= \int\limits_{x_0} \delta \lg \frac{w}{k}\, d \lg \dot{x}\,,\\ \delta t &= -\int\limits_0 \delta \lg \frac{k}{\dot{x}}\, dt\,,\\ \delta s &= -\int\limits_0 \delta \lg \frac{k}{\dot{x}^2}\, ds\,,\\ \delta x &= -\int\limits_0 \delta \lg \frac{k}{\dot{x}^2}\, dx\,,\\ \delta y &= -\int\limits_0 \delta \lg \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg}\tilde{\omega}}\, dy\,,\\ \delta z &= -\int\limits_0 \delta \lg \frac{k}{\dot{x}^2 \operatorname{tg}\omega}\, dz\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Und die Gleichung $\delta[\operatorname{tg}(\Phi + \Psi)\, d\Phi] = 0$ ergibt:

$$\operatorname{tg}(\Phi + \Psi)\, d\,\delta\Phi + \frac{\delta\Phi + \delta\Psi}{\cos^2(\Phi + \Psi)}\, d\Phi = 0\,; \tag{14}$$

das ist eine **lineare** Differentialgleichung für $\delta\Phi$. Also:

$$-\delta\Phi = e^{-\int\limits_0 \frac{2\,d\Phi}{\sin(2\Phi+2\Psi)}} \int\limits_0 e^{\int\limits_0 \frac{2\,d\Phi}{\sin(2\Phi+2\Psi)}} \frac{2\,\delta\Psi}{\sin(2\Phi+2\Psi)}\,d\Phi\,. \quad (15)$$

Schließlich wird

$$\left.\begin{aligned} \delta \operatorname{tg}\omega &= -P\sin\Phi\cdot\delta\Phi = -\operatorname{tg}\tilde{\omega}\cdot\delta\Phi\,,\\ \delta \operatorname{tg}\tilde{\omega} &= P\cos\Phi\cdot\delta\Phi = \operatorname{tg}\omega\cdot\delta\Phi\,. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Die Variationen von $\lg k$ berechnet man am einfachsten aus

$$k = P\cdot\sin(\Phi+\Psi)\cdot\sqrt{g^2+h^2}\,. \quad (17)$$

Im Hinblick auf die Kompliziertheit des Problems sind diese Formeln als überraschend einfach zu bezeichnen. Die unter den Integranden vorkommenden Bestandteile der Variationen von δw, δg, δh sind von verschiedenen Größenordnungen. Es sind erstens der von der Luftgewichtsabnahme herrührende Teil von δw, zweitens die von der Schwereabnahme herrührenden Teile von der Ordnung $1/R$, drittens (evtl.) die von der Coriolisbeschleunigung herrührenden Teile von der Ordnung ν, viertens die von der Zentrifugalbeschleunigung herrührenden Teile von der Ordnung ν^2. Die Änderung des Luftgewichtes übt den bei weitem stärksten Einfluß aus, und ist in vielen Fällen zu berücksichtigen, wo die übrigen Einflüsse noch vernachlässigt werden können. Wir wollen deshalb diesen Fall noch besonders betrachten.

§ 68. Bloße Luftgewichtsänderung

Nehmen wir also $\delta k = 0$ und entsprechend dem St. Robertschen Gesetz der Luftgewichtsabnahme

$$\frac{\delta w}{w} = -\varepsilon z \quad (18)$$

an, so ist $\delta\dot{x}$ aus der Formel

$$\frac{\delta\dot{x}}{\dot{x}} = -\varepsilon\int\limits_{\dot{x}_0} z\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} \quad (19)$$

zu berechnen. Wenden wir hierauf zur Berechnung von $\dot{x}^0$ den oben benutzten Näherungssatz für Segmentinhalte an, so erhalten wir

$$\frac{\delta\dot{x}^0}{\dot{x}^0} = -\tfrac{2}{3}\varepsilon z_*\lg\frac{\dot{x}^0}{\dot{x}_0}\,. \quad (20)$$

Denselben Wert bekommen wir aber, wenn wir $\frac{\delta w}{w} = -\frac{2}{3}\varepsilon z_*$ annehmen, d. h. die Geschwindigkeiten $\dot{x}^0$ in den zu ω^0 gehörenden Punkten haben auf den Schußbahnen $\Phi(\varepsilon z)$ und $\Phi(\frac{2}{3}\varepsilon z_*)$ annähernd dieselben Werte.

Für die Zwischenwerte der $\dot{x}$ auf beiden Schußbahnen schließen wir jetzt wie am Schluß von § 65, indem wir dort lg $\dot{x}$ für Ω setzen: In entsprechenden Punkten der aufsteigenden (absteigenden) Äste ist der Wert von $\dot{x}$ auf der Schußbahn $\Phi\,(\varepsilon z)$ kleiner (größer) als auf der Schußbahn $\Phi\,(\frac{2}{3}\,\varepsilon\, z_*)$.

Infolgedessen können wir wie früher für die Elemente t^0, x^0, y^0, z^0, s^0 schließen, daß dieselben auf diesen beiden Schußbahnen annähernd gleiche Werte haben. Damit ist das erwähnte praktische Verfahren von neuem, und zwar ohne Zugrundelegung eines speziellen Luftwiderstandsgesetzes begründet.

Kann man für größere Geschoßhöhen nicht mehr $\delta w/w = -\varepsilon z$ annehmen, sondern muß man $\delta w/w$ als empirisch gegebene Funktion von z nehmen, so kann die Berechnung des Integrals

$$\frac{\delta \dot{x}}{\dot{x}} = \int\limits_{\dot{x}_0} \frac{\delta w}{w}\,\frac{d\,\dot{x}}{\dot{x}}$$

z. B. so erfolgen:

Es sei $\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ eine fallende geometrische Reihe vom Quotienten q, dann ist

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i}{\dot{x}_i} = q - 1\,,$$

also

$$\int \frac{\delta w}{w} \cdot \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = (q-1) \sum_{i=0}^{n} \frac{\delta w_i}{w_i}\,.$$

Als entsprechende Punkte der gegebenen und der variierten Schußbahn nahmen wir bisher solche mit gleichem $\mathrm{tg}^2\,\omega + \mathrm{tg}^2\,\tilde{\omega}$. Man kann statt dessen auch $\dot{x}$ oder auch v wählen. Lezteres muß man beim senkrechten oder fast senkrechten Schuß, für den $\sin\omega = \pm 1$, $\cos\omega = \frac{\pi}{2} \mp \omega$ ist. Dann kann man die Formeln § 12 (27) direkt variieren und erhält z. B.

$$\delta s = \int \frac{\delta w \cdot v\, dv}{(w \pm g)^2} \quad \text{usw.}$$

§ 69. Lösung durch Iteration

Wir können aber auch direkt an die in § 10 (1) aufgestellten Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{w}\,, \qquad \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v} \tag{21}$$

anknüpfen. Hier ist jetzt die Schwere $\mathfrak{g}$ nach Größe und Richtung eine Funktion des Geschoßortes $\mathfrak{r}$ und die Widerstandsfunktion $\mathfrak{w}$ hängt, außer von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, ihrem Betrage nach auch noch vom Geschoßort $\mathfrak{r}$ ab. An Stelle der Ausdrücke § 10 (2) tritt also jetzt

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\,(\mathfrak{r})\,, \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{w}\,(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})\,. \tag{22}$$

Es ist jetzt nicht mehr möglich, zuerst die erste der Gleichungen (21) zu lösen und danach durch Quadraturen die Bahnkurve $\mathfrak{r}(t)$ zu ermitteln. Die beiden Differentialgleichungen (21) sind jetzt gekoppelt und nur gleichzeitig lösbar. Das hindert aber nicht, die praktischen Lösungsmethoden des V. Kapitels auf die kosmische Ballistik zu übertragen. Vor allem die Methoden, die den tempierten Hodographen [vgl. § 25] benützen, können unverändert herangezogen werden. Nur muß die Bestimmung der Geschoßbahn nach § 26 gleichzeitig Schritt für Schritt vorangetrieben werden. Da sich Schwere und Geschoßwiderstand vergleichsweise nur langsam mit der Geschoßhöhe ändern, können im allgemeinen während eines Integrationsschrittes diese Abhängigkeiten vernachlässigt werden. Es genügt also, die Veränderlichkeit von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{w}$ wegen der Geschoßhöhe nach jedem Integrationsschritt zu berücksichtigen.

Oft läßt sich die Widerstandsfunktion genau genug in der Form

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}) = c(\mathfrak{r})\,\overline{\mathfrak{w}}(\mathfrak{v}) \tag{23}$$

darstellen. Hier rührt z. B. die Ortsabhängigkeit von der Veränderlichkeit des Luftgewichtes her. Führt man an Stelle der Zeit t eine neue Zeitvariable τ ein durch

$$c(\mathfrak{r})\,dt = d\tau\,, \tag{24}$$

so geht Gleichung (21) über in

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\tau} = \bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) + \overline{\mathfrak{w}}(\mathfrak{v})\,, \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\,. \tag{25}$$

Hier bedeutet

$$\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) = \frac{\mathfrak{g}(\mathfrak{r})}{c(\mathfrak{r})}$$

eine fiktive Schwerebeschleunigung. Mit wachsender Höhe nehmen $|\mathfrak{g}|$ und c beide ab, c aber stärker als $|\mathfrak{g}|$. Daher wächst $|\bar{\mathfrak{g}}|$ mit der Geschoßhöhe. Auch die Differentialgleichungen (25) sind noch immer gekoppelt. Diese Koppelung verschwindet erst in den beiden in § 13 betrachteten Grenzfällen.

Ist nämlich die Bahn nahezu widerstandsfrei (Lösungen der ersten Klasse), so geht (25) im Grenzfall über in

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2} = \frac{\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}{c(\mathfrak{r})}\,. \tag{26}$$

Das ist also jetzt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in $\mathfrak{r}$. Ihre Lösung liefert $\mathfrak{r}(\tau)$ und $\mathfrak{v}(\tau) = c\,\dfrac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$. Durch Quadratur der Formeln (24) ergibt sich dann der Zusammenhang mit t. Dieser Fall ist praktisch von Interesse bei den Gipfelbogen der Fernbahnen. Die Bahn kann gedeutet werden als Parabel mit schwach veränderlichem Parameter. Sie ist also symmetrisch bezüglich des Gipfels, solange die Richtung von $\mathfrak{g}$ fest ist.

Ist die Bahn nahezu schwerefrei (Lösungen der zweiten Klasse), so geht (25) im Grenzfall über in

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\tau} = \overline{\mathfrak{w}}\,(\mathfrak{v})\,.$$

Hier sind also die Überlegungen des § 15 anwendbar, mit dem Unterschied, daß aus § 15 (45) nicht t, sondern τ hervorgeht. Nachträgliche Quadratur von (24) liefert dann wieder t als Funktion von τ. Mit geringen Abänderungen sind auch die Methoden des VII. Kapitels, also auch die Siaccischen Formeln, übertragbar. Steilbahnen mit geringer Gesamtkrümmung spielen bei der Flakartillerie eine Rolle.

Dreizehntes Kapitel

Der Drall

§ 70. Zweck. Konstanter und progressiver Drall

Die Geschoßwirkung am Ziel wächst, wenn man die Geschoßmasse vergrößert. Wollte man dies ohne Vergrößerung des Kalibers erreichen, so mußte man von Kugel- zu Langgeschossen übergehen. Das bringt einen weiteren Vorteil mit sich, da nach § 7 (16) die Verzögerung durch den Luftwiderstand der Querschnittsbelastung umgekehrt proportional ist, also bei gleichem Kaliber durch Vergrößerung des Gewichtes verkleinert wird. Um Langgeschossen die erforderliche Stabilität beim Fluge durch die Luft zu geben, mußte man ihnen eine Drehwucht um die Längsachse erteilen. Dies geschieht durch die schraubenförmig in die Rohrwandung (Seele) eingeschnittenen „Züge", und die Führungsringe des Geschosses, in die sich die Züge einschneiden. Man mußte also von glatten zu „gezogenen" Rohren übergehen. Die schraubenförmige Windung der Züge heißt der Drall. Als Maß des Dralles nimmt man entweder die „Dralllänge" oder den „Drallwinkel". Die Dralllänge ist die Länge, die einem vollen Umlauf der Züge oder einer vollen Umdrehung des Geschosses entspricht. Der Drallwinkel ist der Winkel, unter dem die Züge die Geraden der zylindrischen Seele schneiden. Ist D der Drallwinkel, $2\,R$ das Kaliber in Metern, so ist also $\operatorname{tg} D$ gleich $2\,\pi\,R$ dividiert durch die Dralllänge in Metern, oder gleich π dividiert durch die Dralllänge in Kalibern. Das ergibt sich durch Aufbiegen der Seele zu einem Rechteck von der Länge des Rohres und der Breite $2\,\pi\,R$, in dem die Züge in gerade Linien übergehen, die gegen die Längsseite um D geneigt sind. Diese Überlegungen gelten für den gleichbleibenden Drall. Beim wachsenden Drall wächst der

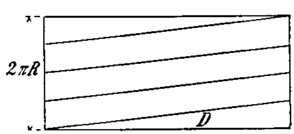

Abb. 49

Winkel D, in der aufgebogenen Seele werden die Züge krumme Linien, deren Neigung gegen die Längsseite vom Anfang bis zur Mündung wächst. Für die Stabilität des Geschosses kommt es auf die Drehwucht an, mit der es das Rohr verläßt, also auf den Enddrall. Der danach gewählte Enddrall bestimmt beim gleichbleibenden Drall diesen von Anfang an. Infolgedessen wurde das Geschoß am Anfang durch den Druck der Pulvergase auf Druck und zugleich durch den Drall auf Torsion so stark beansprucht, daß Rohrplatzer vorkamen. Das war der Grund, zu wachsendem Drall überzugehen. Man setzte den Anfangsdrall so weit herab, daß Rohrplatzer nicht mehr vorkamen, und ließ den Drall vom Anfang zum Ende gesetzmäßig wachsen.

Beim Übergang zum wachsenden Drall mußte man zur Vermeidung von Torsionsbeanspruchungen den vorderen Führungsring durch einen „Zentrierwulst" ersetzen, in den sich die Züge nicht einschneiden, der aber mit dem hinteren Führungsring die axiale Führung des Geschosses sichert.

§ 71. Geometrische Drallgesetze. Kreisdrall. Parabolischer Drall

Solange keine weitere Bedingung gestellt wird, kann man das Gesetz, nach welchem der Drall wächst, ziemlich willkürlich wählen. Die einfachste Annahme war, daß die Züge nach der Ausbreitung der Seele in eine Ebene Kreisbögen werden, die die schmalen Kanten des Rechtecks unter gegebenen Winkeln schneiden: „Kreisdrall". In der Tat kann man einen Kreisbogen bestimmen, der zwei Parallele unter gegebenen Winkeln schneidet. Man schneide nämlich umgekehrt einen Kreis mit zwei Parallelen unter den gegebenen Winkeln und setze nachträglich den Maßstab der Figur so fest, daß der Parallelenabstand die Seelenlänge gibt.

Beim „parabolischen" Drall wächst $\operatorname{tg} D = dy/dx$ linear mit der Entfernung x vom Rohranfang, d. h. es ist $d \operatorname{tg} D/dx$ konstant, also y eine quadratische Funktion von x, die Züge sind Parabeln. Die Aufgabe, zwei Parallelen durch eine Parabel derselben Achsenrichtung unter gegebenen Winkeln zu schneiden, wird wie beim Kreise gelöst.

Ein drittes Drallgesetz ist $dD/dx = \text{const}$, während beim Kreisdrall dD/ds konstant ist, wenn s die Bogenlänge der Züge bedeutet. Da D klein und wenig veränderlich ist, stimmen alle drei Gesetze nahe überein. Die Gleichung der Züge wird von der Form $y = a\,x + b\,x^2 + \cdots$. Die beiden ersten Glieder genügen, um den beiden Forderungen des Anfangs- und Enddralles zu entsprechen.

§ 72. Drall kleinster Beanspruchung der Züge

Eine Beobachtung, die wir im Kriege machten, ist die folgende:

Der Anfang des gezogenen Teiles der Rohre ließ vielfach eine Abnutzung in der Art erkennen, daß die Felder von der Führungskante her beiseitegedrückt waren; sie waren an der Führungskante abgeschrägt, und zwar meistens treppenförmig. Auf die Nachteile solcher Beschädigungen sei hier nur kurz hingewiesen: ungenauer Geschoßansatz, Beschädigung der Führungsringe, Vergrößerung des Laderaumes, alles das ergibt eine Beeinträchtigung der ballistischen Leistung. Dazu kommt eine schnellere Abnutzung des Rohres. Für die Ballistik des Geschosses kommt es nun bloß auf den Enddrall an, der hauptsächlich durch Stabilitätsforderungen bestimmt ist. Die Art der Progression des Dralles ist also so zu bestimmen, daß erstens der Enddrall ein gegebener ist, und daß zweitens die Beanspruchung der Züge sich über deren Länge möglichst gleichmäßig verteilt. Die Aufgabe der Züge ist, dem Geschoß eine bestimmte Drehwucht zu erteilen. Wenn ein Stück der Züge dem Geschoß einen bestimmten Zuwachs an Drehwucht erteilt, ein anderes gleich langes Stück einen geringeren Zuwachs, so wird das erstere zugunsten des letzteren unnötig stark beansprucht, also schneller abgenutzt. Demnach läßt die oben angeführte Beobachtung darauf schließen, daß der Anfangsdrall zu groß genommen wird. Aus diesem Ansatz soll das Drallgesetz geringster Beanspruchung der Züge entwickelt werden.

Es sei m die Masse, x der Weg, v die Geschwindigkeit des Geschosses; ferner $q \cdot R$ der Trägheitsradius. Für ein rein zylindrisches und homogenes Geschoß wäre $q^2 = 0{,}5$, also infolge der Bogenspitze q^2 etwas kleiner als 0,5 bei homogenen Vollgeschossen. Infolge der größeren Dichte des Mantels gegenüber der Dichte der Füllung ist bei Geschossen mit Sprengladung erfahrungsgemäß q^2 nahezu gleich 0,56*).

Nun ist die Umfangsgeschwindigkeit gleich $v \operatorname{tg} D$, für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich also $v \operatorname{tg} D/R$. Also ist

$$\text{die Drehwucht} = \tfrac{1}{2}\, m \left(\frac{v \operatorname{tg} D}{R} \cdot q\, R\right)^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 \operatorname{tg}^2 D \cdot q^2\,,$$

$$\text{die Flugwucht} = T = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2.$$

Die Drehwucht ist also nur ein kleiner Teil der Gesamtwucht des Geschosses. Z. B. ergäbe $D = 5^0\, 42{,}5'$, $\operatorname{tg} D = 0{,}1$ eine Drehwucht, die nur 0,56% der Flugwucht ausmacht. Bei der Lösung des Hauptproblems der inneren Ballistik kann man deshalb in erster Annäherung von der Drehwucht absehen. Soll jetzt die Drehwucht vom Anfang der Bewegung an bis zum Verlassen des Rohres proportional der Weglänge x anwachsen, so muß

$$T \cdot \operatorname{tg}^2 D = \frac{c}{q^2}\, x \tag{1}$$

sein, wo c eine Konstante ist, deren Wert sich aus dem Enddrall, der Rohrlänge und der Geschwindigkeit beim Verlassen des Rohres ergibt. Ist das Problem der inneren Ballistik gelöst, d. h. ist v, also auch T als

*) Kaiser, Konstruktion der gezogenen Geschützrohre. Wien 1892. S. 443.

Funktion von x bekannt, so ergibt sich aus (1) auch D als Funktion von x, d. h. das gesuchte Drallgesetz. Wir führen noch die Triebkraft $P = \frac{dT}{dx}$ ein, die dem Druck der Pulvergase proportional ist. Die Abhängigkeit des P von x wird durch die „Druckkurve" dargestellt, in der die Ordinate $AB = P$, die Abszisse $OA = x$ und der Kurvenbogen OB die Fläche $T = \int P\,dx$ einschließen. Der mittleren Höhe T/x dieser Fläche über der Basis x ist nach (1) $\operatorname{ctg}^2 D$ proportional; danach kann durch graphische oder mechanische Verfahren der Wert von $\operatorname{tg} D$ zu jedem x leicht gefunden werden. Bezeichnet man mit $P' = T/x$ die zum Weg x gehörige mittlere Triebkraft, so kann man die Gleichung (1) auch schreiben:

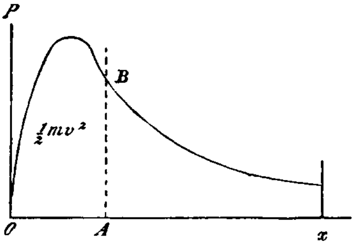

Abb. 50

$$\operatorname{tg}^2 D = \frac{c}{q^2} : P'; \tag{2}$$

demnach ist die mittlere Drehwucht $P' q^2 \cdot \operatorname{tg}^2 D$ konstant und ihrem Werte nach gleich c. Die Gleichung (2) dient zur Ermittelung des Anfangsdralles, da der Anfangswert der mittleren Triebkraft P' bekannt ist. Denn im Anfang ist die mittlere Triebkraft $P' = T/x$ gleich der Triebkraft $P = dT/dx$, und diese ist statisch zu definieren als Druck der Pulvergase multipliziert mit dem Querschnitt. Da die Bewegung erst beginnt, wenn die Triebkraft einen beträchtlichen Wert erreicht hat, muß der Drall mit einem sehr kleinen Winkel beginnen.

Nach (1) ist die Zunahme der Drehwucht proportional der Zunahme der Weglänge x. Dem Teil dx der Weglänge entspricht aber ein Teil $ds = \sec D \cdot dx$ der Länge der Züge. Soll also, genauer, die Drehwucht nicht proportional der Weglänge, sondern proportional der Zuglänge anwachsen, so ist die Gleichung (1) durch die Differentialgleichung zu ersetzen:

$$d(T \operatorname{tg}^2 D) = \frac{c}{q^2} \sec D \cdot dx. \tag{3}$$

Dies ergibt integriert:

$$T \cdot \operatorname{tg}^2 D = \frac{c}{q^2} s. \tag{4}$$

Da nur die Beziehung zwischen T und x, nicht die zwischen T und s als bekannt gelten kann, ersetzen wir s durch: $\sum \sec D \cdot \Delta x$, nehmen die Differenzen Δx alle gleich $\frac{1}{n} X$, wo X die Länge des gezogenen Teils ist, und bilden, indem wir noch $\frac{cX}{n q^2} = k$ setzen, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} T_1 \cdot \mathrm{tg}^2 D_1 &= k \sec D_0 \,, \\ T_2 \cdot \mathrm{tg}^2 D_2 - T_1 \cdot \mathrm{tg}^2 D_1 &= k \sec D_1 \,, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots , \\ T_n \cdot \mathrm{tg}^2 D_n - T_{n-1} \cdot \mathrm{tg}^2 D_{n-1} &= k \sec D_{n-1} \,. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen und dem Anfangsdrallwinkel D_0 kann man der Reihe nach die zu den Weglängen

$$\frac{1}{n} X \,, \quad \frac{2}{n} X \,, \quad \frac{3}{n} X \,, \;\ldots, \quad \frac{n}{n} X = X$$

gehörigen Drallwinkel $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ berechnen. Dabei ist aber der Wert der Konstanten c oder k zunächst noch unbestimmt. Er ist aus der Forderung zu ermitteln, daß D_n den vorgeschriebenen Wert des Enddrallwinkels annimmt. Die Addition der Gleichungen (5) ergibt, daß $T_n \cdot \mathrm{tg}^2 D_n$ größer ist als $k \cdot n \sec D_0$ und kleiner als $k \cdot n \sec D_n$, also gleich $k \cdot n \sec D'$, wenn mit D' ein Mittelwert des Drallwinkels bezeichnet wird. Ist D' etwa 2 bis 3 Grad, so ist $\sec D' = 1{,}001$, also kann aus der Gleichung $T_n \cdot \mathrm{tg}^2 D_n = k \cdot n \sec D'$ der Wert von k mit einer Genauigkeit von etwa $1\,^0/_{00}$ bestimmt werden. Hat man zu diesem k aus (5) die n Drallwinkel $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ berechnet, und sollte der letzte von dem vorgeschriebenen Enddrallwinkel noch merklich abweichen, so kann man diese Werte wie folgt verbessern. Man ersetze in (5):

$$\left.\begin{aligned} k &\text{ durch } k\,(1 + j) \,, \\ D_1 &\text{ durch } D_1\,(1 + j_1) \,, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots , \\ D_n &\text{ durch } D_n\,(1 + j_n) \,, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

also jedes

$$\mathrm{tg} D \text{ durch } \frac{\mathrm{tg} D + j \,\mathrm{tg} D}{1 - j\,\mathrm{tg}^2 D} = \mathrm{tg} D \cdot (1 + j) \cdot (1 + j\,\mathrm{tg}^2 D) = \mathrm{tg} D \cdot (1 + j \cdot \sec^2 D)$$

und jedes

$$\sec D \text{ durch } \frac{1}{\cos D - j \cdot \sin^2 D} = \sec D + j \cdot \mathrm{tg}^2 D \,,$$

dann erhält man zur Bestimmung der Korrekturen $j, j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$, die als kleine Größen erster Ordnung anzusehen sind, die n linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} J_1 \cdot \sec^2 D_1 &= \tfrac{1}{2} k \cdot \sec D_0 \cdot j \,, \\ J_2 \cdot \sec^2 D_2 - J_1 \cdot \sec^2 D_1 &= \tfrac{1}{2} k \cdot \left(\sec D_1 \cdot j + \frac{J_1}{T_1} \right) , \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots , \\ J_n \cdot \sec^2 D_n - J_{n-1} \cdot \sec^2 D_{n-1} &= \tfrac{1}{2} k \cdot \left(\sec D_{n-1} \cdot j + \frac{J_{n-1}}{T_{n-1}} \right) , \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

in denen zur Abkürzung immer $j \cdot T \cdot \mathrm{tg}^2 D = J$ gesetzt ist und J_0, wie j_0 den Wert 0 hat. Aus diesen Gleichungen berechnet man der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (1) \cdot j\,, \\ J_2 &= (2) \cdot j\,, \\ &\ldots\ldots\,, \\ J_n &= (n) \cdot j\,, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wo (1), (2), ..., (n) Zahlenfaktoren sind. Aus der letzten der Gleichungen (8) ergibt sich die Korrektur j von k, da ja die Korrektur j_n von D_n, also auch der Wert J_n bekannt ist. Die Berechnung der Größen J aus den Gleichungen (7) und die Berechnung der Größen j aus $j \cdot T \cdot \mathrm{tg}^2 D = J$ gestaltet sich sehr einfach, da die dabei erforderlichen Größen $T \cdot \mathrm{tg}^2 D$ und $\sec D$ schon in den Gleichungen (5) der Reihe nach berechnet sind.

Als man vom gleichbleibenden zum wachsenden Drall überging, bestimmte man den Anfangsdrall aus der Forderung, daß die größte Drehbeanspruchung des Geschosses unter einer gewissen, vom Geschoß abhängigen Grenze liegen sollte. Mit dieser primitiven Art den Drallverlauf festzulegen, mußte man sich begnügen, da damals der Verlauf der Geschwindigkeits- und der Gasdruckkurve nicht bekannt war. Neben der gebotenen Rücksicht auf die Geschoßfestigkeit darf aber die auf die Beanspruchung der Züge um so weniger außer acht gelassen werden, als das Geschoß nur einmal, die Züge dauernd beansprucht werden. Nach (3) ist nun diese Beanspruchung gleich

$$\frac{d\,(T\,\mathrm{tg}^2 D)}{d\,x} = P \cdot \mathrm{tg}^2 D + 2\,T \cdot \mathrm{tg} D \cdot \frac{d\,\mathrm{tg} D}{d\,x}\,. \qquad (9)$$

Da nun beim üblichen parabolischen Drall $d\,\mathrm{tg} D / d\,x$ konstant ist (§ 71), während T und D nur wachsen, P bis zu seinem Maximum wächst, so ergibt sich, daß bei parabolischem Drall die Züge von Anfang an, und jedenfalls bis zur Stelle des Druckmaximums, in stark wachsendem Maße beansprucht werden. Das beweist die Unzweckmäßigkeit dieses Dralls. Dasselbe gilt also auch für die beiden anderen geometrischen Drallgesetze. Dagegen erfüllt der Drall kleinster Beanspruchung der Züge auch die Forderung in bezug auf Geschoßbeanspruchung. Letztere ist nämlich gleich der Geschwindigkeit des Anwachsens der Drehwucht, also zur Zeit t gleich $d(T\,tg^2 D)/dt$, also wegen (3) gleich $c\,v \cdot \sec D / q^2$, erreicht also am Ende den größten Wert. Aber der erfahrungsmäßige Enddrall liefert keine Rohrplatzer. Dieser Drall hat also noch den weiteren Vorteil, daß die am Ende liegende größte Drehbeanspruchung von der nahe am Anfang liegenden größten Druckbeanspruchung des Geschosses soweit als möglich getrennt ist.

Zur Bestimmung des Anfangsdrallwinkels D_0 erhält man aus (3) und (9) wegen $T_0 = 0$ die für sec D_0 quadratische Gleichung

$$P_0 \cdot \mathrm{tg}^2 D_0 = \frac{c}{q^2} \sec D_0, \tag{10}$$

in der P_0 der Anfangswert der Triebkraft, d. h. des mit dem Querschnitt multiplizierten Gasdruckes ist.

Für den Enddrall liefert die Rücksicht auf die Drehbeanspruchung des Geschosses eine obere Grenze. Eine untere Grenze erhält man aus der Forderung der Stabilität. Sind $A = B$, C die Trägheitsmomente, r die Winkelgeschwindigkeit, S der Schwerpunkt, W der Luftwiderstand, H dessen Angriffpunkt auf der Achse, $SH = h$, so heißt die Stabilitätsbedingung (s. § 57)

$$\frac{1}{4} \frac{C^2}{A} r^2 > h \cdot W. \tag{11}$$

Die links stehende, fast konstante Größe ist als das Maß der Stabilität anzusehen, ihr Überschuß über die rechts stehende Größe als die Reservestabilität, die rechts stehende Größe als die untere Stabilitätsgrenze. Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\mathrm{tg} D = \frac{r R}{v} \tag{12}$$

ergibt sich daraus eine untere Grenze für den Enddrall. Aus (11) und (12) folgt nämlich

$$\mathrm{tg}^2 D > 4 R^2 h \frac{A W}{C^2 v^2}. \tag{13}$$

Aus (11) oder (13) lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Lange Geschosse erfordern stärkeren Enddrall, um dieselbe Reservestabilität zu haben. Denn verdoppelt man z. B. die Geschoßlänge, so verdoppeln sich annähernd auch C und h, während A sich etwa verfünffacht. Die Frage, ob größere Mündungsgeschwindigkeiten geringere Achsendrehung (Wille, Waffenlehre, Berlin 1905—10, S. 822) oder ob sie stärkeren Enddrall (Heydenreich, Die Lehre vom Schuß für Gewehr und Geschütz, Berlin 1908, S. 98) erfordern, ist so zu beantworten: Größeres v ergibt auch größeres W, also ist nach (11) auch größere Drehgeschwindigkeit r erforderlich, wenn man dieselbe Reservestabilität wünscht. Und für den Enddrall folgt aus (13), daß die untere Grenze für ihn wächst, abnimmt oder gleichbleibt, je nachdem ob W stärker, schwächer oder ebenso wächst, wie v^2; da das in verschiedenen Intervallen verschieden ist (s. Tabelle in § 6), kann man keine allgemeine Regel aufstellen. In dem Beispiel bei Heydenreich ist v einmal gleich 180, das andere Mal 500; die zugehörigen Werte von W liefert die Kruppsche Tabelle proportional 0,044 und 0,983. Da nun $0{,}983/500^2 = 0{,}0000039\ldots$ etwa dreimal so groß ist, wie $0{,}044/180^2 = 0{,}0000013\ldots$, so ist für denselben Enddrall die Stabilität für $v = 500$ viel geringer als für $v = 180$; das entspricht den Heydenreichschen Beobachtungen.

§ 73. Drall kleinsten Druckes

Den Drall kleinsten, also konstanten Druckes zwischen Führungsringen und Zugflanken suchen Terquem*) und Kaiser**). Ein solcher Drall beansprucht langsam durchlaufene Stellen mehr als schnell durchlaufene.

Der Druck ist proportional dem Zuwachs an Drehwucht, also proportional $\frac{d}{d\sigma}\,\frac{1}{2}\,m\,v^2\,q^2\,\mathrm{tg}^2 D$, wenn $d\sigma$ das Bogenelement des Führungsringes ist. Wegen $d\sigma = \mathrm{tg}D\cdot dx$ wird also auch $\frac{v\,dv\,\mathrm{tg}\,D}{dx} = \frac{dv\,\mathrm{tg}\,D}{dt}$, d. i. die Umfangsbeschleunigung konstant***), also gleich der mittleren Umfangsbeschleunigung $v\,\mathrm{tg}D/t$. Aus $\frac{v\,\mathrm{tg}\,D}{t} = \mathrm{const}$ ergibt sich, wenn das Hauptproblem der inneren Ballistik gelöst ist, durch Einsetzen von v und t als Funktionen von x auch $\mathrm{tg}D$ als Funktion von x, also die Drallkurve. Statt dieses einfachen Weges integrierte Terquem die Gleichung

$$\frac{d\,\frac{1}{2}\,(v\,\mathrm{tg}D)^2}{d\sigma} = C$$

durch

$$(v\,\mathrm{tg}D)^2 = 2\,C\,\sigma$$

und diese, nach Einsetzen von $\mathrm{tg}D = d\sigma/dx$, durch

$$\sigma = \frac{C}{2}\cdot\left(\int\frac{dx}{v}\right)^2,$$

wo er v prop. $\sqrt{1 - \frac{e}{x}}$ annimmt. Hiergegen, und namentlich gegen die nachträgliche Annäherung des gefundenen Dralls durch einen kreisförmigen oder parabolischen Drall gleichen Anfangs- und Enddralls, wendet sich mit Recht Kaiser. Man könnte dann von vornherein einen solchen Drall nehmen und durch die Forderung bestimmen, an zwei Stellen x_1, x_2 denselben Druck zu geben. Das ist einfacher als bei Kaiser durch die Gleichungen $\frac{v_1\,\mathrm{tg}\,D_1}{t_1} = \frac{v_2\,\mathrm{tg}\,D_2}{t_2} = \mathrm{const}$ zu bewirken, da der Wert der Konstanten durch die Mündungswerte von v, t, D bestimmt ist.

---

*) Revue d'artillerie, tome 13, S. 217.

**) Konstruktion der gezogenen Geschützrohre, Wien 1892, S. 447.

***) Einen Drall konstanter Drehbeschleunigung hatte schon v. Scheve vorgeschlagen: Arch. f. Artill.- und Ing.-Off. 93 (1886) S. 3.

Vierzehntes Kapitel
Übergangsballistik

§ 74. Die zwei Phasen des Überganges

Mit dem Moment, in dem das Geschoß mit dem vorderen Führungsring (bzw. dem Zentrierwulst) die Mündung verläßt, beginnt die erste Phase des Überganges. Das Geschoß gewinnt Spielraum für eine Abweichung seiner Achse von der Seelenachse. Es ist anzusehen, wie ein Kreisel, der außer seiner Translationsbewegung eine Rotation um einen Punkt seiner Drehachse ausführt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des (hinteren) Führungsringes. Die Schwerkraft wirkt ablenkend auf die Geschoßachse, anfänglich in sehr geringem Maße, wie auch anfänglich der verfügbare Spielraum für eine seitliche Abweichung gering ist. Nur genaue Beobachtungen, vielleicht kinematographische Aufnahmen, können darüber entscheiden, ob diese Ablenkung durch Reibung des Geschoßmantels an der Rohrmündung gehemmt wird; an Blindgängern war nichts davon zu bemerken. Wir nehmen im folgenden an, daß eine solche Hemmung nicht eintritt; der gegenteiligen Annahme wäre durch Anbringung einer Korrektur Rechnung zu tragen.

Diese Phase erreicht ihr Ende und die zweite beginnt mit dem Moment, in dem der (hintere) Führungsring das Rohr völlig verlassen hat. Damit hat die Wirkung des Geschützes auf das Geschoß aufgehört, aber es wirken noch die nachdrängenden Pulvergase, die einige Zeit noch die Geschoßgeschwindigkeit zu vergrößern suchen. Erst wenn diese Wirkung aufhört und auf das Geschoß nur noch Schwere und Luftwiderstand wirken, ist das Ende der zweiten Phase erreicht. Das ist zugleich der Anfangspunkt der Schußbahn, die die äußere Ballistik behandelt. Die Lage des Geschosses und sein Bewegungszustand in diesem Punkte sind für die Schußbahn entscheidend. Diese zu ermitteln, ist die Aufgabe der Übergangsballistik.

§ 75. Die erste Phase

Die Energie der Drehung des Geschosses

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}(A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2)$$

wird wegen

$$\begin{aligned} A &= B \quad \text{und} \quad [\text{vgl. } \S\,56\ (1)]\,, \\ p &= -\dot{\vartheta}\cdot\sin\varphi + \dot{\psi}\cdot\sin\delta\cdot\cos\varphi\,, \\ q &= \dot{\vartheta}\cdot\cos\varphi + \dot{\psi}\cdot\sin\delta\cdot\sin\varphi\,, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cdot\cos\delta \end{aligned}$$

gleich:

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}A\cdot[\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\psi}\sin\delta)^2] + \tfrac{1}{2}C\,r^2 = \tfrac{1}{2}A\,|\dot{\alpha}|^2 + \tfrac{1}{2}C\,r^2\,.$$

Die Verzögerung w und die Beschleunigung g setzen sich zu einer resultierenden Beschleunigung g' zusammen, deren Richtung als die „Quasi-Senkrechte" bezeichnet sei. Auf diese Quasi-Senkrechte beziehen sich jetzt die Winkel δ, ϑ, ψ, α.

Die Energie der Lage des Geschosses ist gleich dem „Quasi-Gewicht" $m\,g'$ multipliziert mit der Höhe des Angriffspunktes von g' über einer durch die Mitte des hinteren Führungsringes gelegten Quasi-Waagerechten. Der Angriffspunkt von g' ist der Schwerpunkt, sein Abstand von der Mitte des hinteren Führungsringes sei l. Dann ist $U = m \cdot g' \cdot l \cdot \cos\delta$ die Energie der Lage.

Die Zeitdauer der ersten Phase ist gleich dem Abstand der beiden Führungsringe dividiert durch die Mündungsgeschwindigkeit, also eine Größe von einigen zehntausendsteln Sekunden. Von der Veränderung des w in dieser Zeit wird abgesehen.

Die Lagrangeschen Gleichungen*):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot\psi} + \frac{\partial(\mathsf{T}+U)}{\partial\psi} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \dot\varphi} + \frac{\partial(\mathsf{T}+U)}{\partial\varphi} = 0$$

ergeben, weil T und U von φ und ψ nicht abhängen, daß $\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial\dot\varphi}$ und $\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial\dot\psi}$ zeitlich konstant sind. Das ergibt

$$\dot\varphi + \dot\psi\cos\delta = \dot\varphi_0 + \dot\psi_0\cos\delta_0\ (=r)\,,$$
$$A\cdot\sin^2\delta\cdot\dot\psi + C\cdot r\cos\delta = A\sin^2\delta_0\cdot\dot\psi_0 + C\,r\cos\delta_0\,;$$

zur Berechnung von $\dot\psi$, wenn die Neigung δ der Geschoßachse gegen die Quasi-Senkrechte bekannt ist.

Die Energiegleichung

$$\mathsf{T} + U = \mathsf{T}_0 + U_0$$

ergibt

$$\tfrac{1}{2}A|\dot\alpha|^2 + \tfrac{1}{2}C\,r^2 + m\,g'\,l\cos\delta = \tfrac{1}{2}A|\dot\alpha_0|^2 + \tfrac{1}{2}C\,r^2 + m\,g'\,l\cos\delta_0\,,$$

zur Berechnung von $|\dot\alpha|$. Der Winkel $\delta - \delta_0$ am Ende der ersten Phase ist gleich $\frac{l}{\varrho}$, wenn $\varrho = \frac{v^2}{g'\cdot\sin\delta}$ der anfängliche Krümmungsradius ist. Danach ist $|\dot\alpha|$, $\dot\psi$, $\dot\vartheta$ für das Ende der ersten Phase zu berechnen, wenn diese Größen für den Anfang derselben bekannt sind, oder umgekehrt, je nachdem, welche Werte sich empirisch ermitteln lassen.

Da am Anfang der ersten Phase Geschoßachse und Seelenachse noch übereinstimmen, sind die Werte von ψ, ϑ am Anfang der ersten Phase 0, also sind $\int\dot\psi\,dt$, $\int\dot\vartheta\,dt$ ihre Werte am Ende derselben, die Integrale über die Zeitdauer der ersten Phase erstreckt. Wegen der kurzen Dauer derselben kann man $\int\dot\psi\,dt = \dot\psi_0\,\Delta t$, $\int\dot\vartheta\,dt = \dot\vartheta_0\,\Delta t$ setzen, wo Δt die Dauer

*) S. z. B. Enzyklopädie der math. Wiss. IV. 1. S. 481.

der ersten Phase ist. Die so berechneten Größen ψ, ϑ geben die Stellung des Geschosses am Ende der ersten Phase.

Bei den vorstehenden Überlegungen ist vorausgesetzt worden, daß während der ersten Phase der Drall nicht mehr „arbeitet“, d. h., daß das Geschoß keinen Zuwachs an Drehwucht mehr erhält. Dazu muß, da die Geschwindigkeit des Geschosses noch etwas wächst, der Drall etwas abnehmen, nämlich in der Weise, daß $v \cdot tg D$ konstant bleibt. Ein Drall, der noch arbeitet, nachdem der vordere Führungsring die Mündung verlassen hat, würde wegen des Fehlens der vorderen Führung ein stärkeres Flattern des Geschosses bewirken*).

§ 76. Die zweite Phase

Nachdem das Geschoß das Rohr ganz verlassen hat, erteilen ihm die nachdrängenden Pulvergase noch eine kurze Zeit eine allmählich abnehmende Beschleunigung. Wir können diese auffassen als verminderten Sog; denn während später ein Teil von w von dem Sog am Geschoßboden herrührt, besteht während der zweiten Phase ein Überdruck am Geschoßboden, stärker als der Druck an der Spitze. Bezeichnen wir deshalb diese Beschleunigung mit $-\delta w$, so ist nach § 10 (9)

$$\frac{dv}{dt} = -(w - \delta w + g \cdot \sin \omega) .$$

Anfänglich ist dies positiv, v wächst; dann wird einmal

$$w - \delta w + g \sin \omega = 0 ,$$

die Geschwindigkeit erreicht ein Maximum. Alsdann nimmt v ab, bis $\delta w = 0$ geworden ist. Nicht der Punkt, in dem v sein Maximum erreicht, ist als Anfang der freien Schußbahn zu nehmen, wie das sonst gesagt wird, denn in diesem wirken die Pulvergase noch; sondern der Punkt, in dem diese Wirkung ganz aufgehört hat.

Durch Messungen zusammengehöriger Werte von s und t (vgl. § 15), findet man zusammengehörige Werte von v und $w - \delta w$, also, da w bekannt ist, von v und δw. Hat man auf diese Weise die Funktion δw von v empirisch ermittelt, die noch von einer (oder mehr) dem Schuß eigenen Konstanten abhängen wird, so kann man umgekehrt die Bahn des Geschosses während der zweiten Phase berechnen nach den Formeln:

$$t = -\int \frac{dv}{w - \delta w + g \sin \omega} ,$$

$$s = -\int \frac{v\, dv}{w - \delta w + g \sin \omega} ,$$

$$x = \int \cos \omega \, ds ,$$

$$z = \int \sin \omega \, ds .$$

*) Durch Pappscheiben-Durchschüsse festzustellen. Vgl. Becker in Technik und Wehrmacht. S. 221.

Sie gehen aus § 11 (22) hervor, wenn man dort w durch $w - \delta w$ ersetzt. Integriert man bis zu dem Zeitpunkt, für den $\delta w = 0$ ist, so erhält man Ort und Zeit für den Endpunkt der zweiten Phase. Die Geschwindigkeit in diesem Punkte ergibt sich aus der Gleichung $\delta w = 0$. Stellung (ψ, ϑ) und Geschwindigkeitszustand $(\dot{\psi}, \dot{\vartheta})$ erhält man aus den Werten von ψ, ϑ, $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ im Anfang der zweiten Phase wie in Kap. XI, nur ist jetzt $w - \delta w$ für w zu setzen.

Fünfzehntes Kapitel

Innere Ballistik

§ 77. Die Aufgaben

Die Hauptaufgabe der inneren Ballistik ist die Ermittelung der Geschoßbewegung im Rohre und der dabei entwickelten Drucke und Temperaturen. Kennt man den Weg s, den das Geschoß von der Masse m bis zur Zeit t zurückgelegt hat, als Funktion von t, so ist auch seine Geschwindigkeit $v = \dot{s} = ds/dt$ zur Zeit t bekannt; ebenso seine Beschleunigung $\dot{v} = \ddot{s}$, also auch die Kraft $m\ddot{s}$, mit der es sich bewegt. Diese „Effektivkraft" $m\ddot{s}$ ist nach der Newtonschen Bewegungsgleichung gleich der Triebkraft des Pulvers, wenn man zunächst von den kleinen Verlusten durch den Widerstand der Luft, der Reibung im Rohre und, bei geneigtem Rohre, der Schwerkraft absieht. Demnach ist $m\ddot{s}$ auch die Pulvertriebkraft $q \cdot p$, wenn mit p der Druck auf den Geschoßboden, mit q der Querschnitt der Seele bezeichnet wird.

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{s} = q\,p\,. \tag{1}$$

Es sind die vier Größen t, s, v, p, von denen die zusammengehörigen Werte gesucht werden. Ist der Zusammenhang zweier bekannt, so ergeben sich die übrigen durch Differentiationen und Integrationen. Ist z. B. p, also $\ddot{s}$ als Funktion von t bekannt, so ergibt sich $v = \dot{s} = \int \ddot{s}\,dt$, $s = \int\int \ddot{s}\,dt\,dt$. Ist v als Funktion von s bekannt, so ergibt sich $t = \int \frac{ds}{v}$, $\ddot{s} = \frac{dv}{ds} \cdot v$; usw.

Die empirischen Ermittelungen beschränkten sich früher auf Messung der Mündungsgeschwindigkeit und des Höchstdruckes am Stoßboden des Rohres durch kupferne Stauchzylinder. Diese beiden Größen sind auch die praktisch wichtigsten, die erstere mit Rücksicht auf die gewünschte Schußleistung, die zweite mit Rücksicht auf die Rohrbeanspruchung. In neuerer Zeit ist man auch dazu übergegangen, den Verlauf der Bewegung, der Geschwindigkeit und des Druckes durch verschiedene Apparate zu messen.

§ 78. Berichtigung der Bewegungsgleichung

Es wird nicht die ganze Pulvertriebkraft in die Effektivkraft $m\ddot{s}$ umgesetzt. Vielmehr geht ein Teil für Reibung, Luftwiderstand und Schwerkraft verloren. Ist qW dieser Teil, so ist die Gleichung (1) zu ersetzen durch

$$m\ddot{s} = q(p - W)\,. \tag{2}$$

Den Hauptteil macht die Reibung aus. Man kann diesen Teil unmittelbar messen, indem man das Geschoß durch den senkrecht gestellten Lauf unter genügender Belastung hindurchtreibt. Er beträgt nach Cranz beim Infanteriegewehr nur etwa $\frac{1}{5}\,m\ddot{s}$, und nach Gossot und Liouville beim Geschütz weniger als $\frac{1}{2}\,(L\!:\!G)\,m\ddot{s}$ (L Ladungsgewicht, G Geschoßgewicht). Die Verzögerung durch die Schwerkraft ist selbst beim Schuß senkrecht aufwärts so klein, daß sie neben der Pulvertriebkraft kaum in Betracht kommt. Sie beträgt z. B. bei der Feldkanone nur $\frac{1}{9000}$, beim Infanteriegewehr nur $\frac{1}{52000}$ der Pulvertriebkraft. Die Verzögerung durch den Luftwiderstand ist ebenfalls zu vernachlässigen.

§ 79. Berichtigungen der Massen

Es seien $\frac{1}{2}\,m v^2$ und $\frac{1}{2}\,M V^2$ die Energien der Geschoßmasse m und der Rücklaufmasse M. Aber auch der Pulvermasse l wird kinetische Energie erteilt. Diese wird durch Berichtigungen der Massen m und M berücksichtigt. Die Masse l, teils verbrannt, teils unverbrannt, denkt man sich über den ganzen Raum der Länge s vom Stoßboden des Rohres bis zum Geschoßboden verteilt. Es ist also der Teil $\frac{M}{M+m}\,l$ bzw. $\frac{m}{M+m}\,l$ in dem Raum vom Schwerpunkt der Massen m und M bis zum Boden des Geschosses bzw. des Rohres. Bezeichnet man diese Entfernungen mit s_m und s_M, so ist nach dem Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes, da die Schwerpunkte der beiden Pulveranteile die Entfernungen $\frac{1}{2}\,s_m$ bzw. $\frac{1}{2}\,s_M$ vom Schwerpunkt haben:

$$M s_M + \frac{m}{M+m}\cdot l\cdot \tfrac{1}{2}\,s_M = m s_m + \frac{M}{M+m}\cdot l\cdot\tfrac{1}{2}\,s_m$$

oder

$$\left(M + \frac{m}{M+m}\cdot\frac{l}{2}\right)s_M = \left(m + \frac{M}{M+m}\cdot\frac{l}{2}\right)s_m\,,$$

nach t differenziert:

$$\left(M + \frac{m}{M+m}\cdot\frac{l}{2}\right)V = \left(m + \frac{M}{M+m}\cdot\frac{l}{2}\right)v\,. \tag{3}$$

Dabei sind die Schwerpunkte von M und m in die Böden von Rohr und Geschoß verlegt; ein Fehler, der beim Übergang von den Entfernungen s zu den Geschwindigkeiten größtenteils fortfällt. Man begnügt sich sonst damit, m durch $m + \frac{l}{2}$ zu ersetzen und M unberichtigt zu lassen*). Diese Berichtigung hat sich empirisch bewährt. Nach dem Vorstehenden ist sie um so besser, je größer M zu m ist.

Es seien nun m, M die bereits so berichtigten Massen, also die gesamte kinetische Energie

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} M V^2 .$$

Nun ist $v : \frac{1}{m} = V : \frac{1}{M} = v + V : \frac{1}{\mu}$, wenn $\frac{1}{m} + \frac{1}{M} = \frac{1}{\mu}$ gesetzt wird, also wird

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2} \mu (v + V)^2 = \tfrac{1}{2} \mu \dot{s}^2 , \tag{4}$$

wenn $\dot{s} = ds/dt$ die Relativgeschwindigkeit des Geschosses im Rohr ist.

In gezogenen Rohren erhält das Geschoß bei einem Drallwinkel D die Drehwucht

$$\tfrac{1}{2} m v^2 \operatorname{tg}^2 D \cdot \varkappa^2 ,$$

wenn $\varkappa \cdot R$ der Trägheitsradius des Geschosses ist. Muß dieser Betrag berücksichtigt werden, so ist m zu multiplizieren mit

$$1 + \varkappa^2 \operatorname{tg}^2 D . \tag{5}$$

Der entsprechende Betrag für M kommt um so weniger in Betracht, je mehr die Masse M der Drehung widersteht.

Die zur Erzielung der Drehwucht aufgewendete Arbeit ist infolge der Reibung an den Zugflanken etwas größer, nämlich gleich

$$\tfrac{1}{2} m v^2 \operatorname{tg}^2 D \cdot \varkappa^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}(D + D')}{\operatorname{tg} D} , \tag{6}$$

wenn $\operatorname{tg} D'$ der Reibungskoeffizient ist.

§ 80. Das Pulver. Die Abelsche Gleichung

Man verbrenne in einer geschlossenen Versuchsbombe vom Volumen $\mathfrak{V}$ eine Pulverladung vom Volumen $\varDelta \cdot \mathfrak{V}$. Der echte Bruch $\varDelta$ heißt Ladedichte**). Es entstehe der Druck p. Nach der Verbrennung verbleibt ein Rückstand vom Volumen $\mathsf{A} \varDelta \cdot \mathfrak{V}$**). Das von den Pulvergasen eingenommene Volumen ist also $\mathfrak{V} - \mathsf{A} \varDelta \cdot \mathfrak{V}$.

Abel hat nachgewiesen, daß die Gleichung besteht

$$p = \frac{f \varDelta \cdot \mathfrak{V}}{\mathfrak{V} - \mathsf{A} \varDelta \cdot \mathfrak{V}} = \frac{f \varDelta}{1 - \mathsf{A} \varDelta} . \tag{7}$$

Diese Gleichung heißt die Abelsche Gleichung und ist als die erste Hauptgleichung der inneren Ballistik anzusehen. Da man p und $\varDelta$ messen

*) S. z. B. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Ergänzungsband 1936, S. 133.

**) Bei dieser Festsetzung sind $\varDelta$ und A unbenannte Zahlen, f ein Druck. Definiert man aber $\varDelta$ als Quotient Ladegewicht durch Verbrennungsraum, so bekommt A die Dimension reziproke Dichte, f die Dimension Druck durch Dichte.

kann, liefert jeder solche Versuch eine lineare Gleichung zwischen den Pulverkonstanten f und A, nämlich $\frac{1}{\varDelta} = \mathsf{A} + \frac{f}{p}$. Aus mehreren solcher Gleichungen, mindestens zweien, sind f und A zu bestimmen. Bei mehr als zwei Gleichungen kann man f und A durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln. Man erhält so eine Probe für die Genauigkeit der Gleichung (7).

Die Abelsche Gleichung liefert nach vielen Versuchen den Gasdruck p mit einer für die Praxis vorläufig ausreichenden Genauigkeit. Dabei muß aber vorausgesetzt werden, daß der Druck gemessen wird, bevor eine Verformung oder Erwärmung der Bombe eingetreten ist. Unter dieser Voraussetzung kann eine Beziehung zwischen Druck und Volumen der Pulvergase und der in der Pulverladung enthaltenen Energie aus Gründen der Dimension nicht anders heißen als Druck mal Volumen gleich Energie, da der Zahlenfaktor rechts infolge zweckmäßiger Wahl der Pulverkonstanten f gleich 1 ist. Daß die Energie der Ladung ihrer Menge proportional ist, ist dabei als selbstverständlich vorweggenommen. Als „Menge" wird sonst das Gewicht genommen; das Volumen zu nehmen ist bei Gasen viel natürlicher und macht die obigen Überlegungen viel klarer und einfacher. Wir werden im folgenden die in der Pulverladung enthaltene Energie unabhängig davon, ob sie aus ihrem Gewicht oder ihrem Volumen berechnet wird, mit E bezeichnen.

Ist nicht das ganze Pulver $\varDelta \cdot \mathfrak{B}$, sondern nur $\varDelta \cdot \mathfrak{B} \cdot i$ $(0 < i < 1)$ verbrannt, ist also die Energie $\mathsf{E} \cdot i$ frei geworden, so ist der zugehörige Druck

$$p_i = \frac{f \varDelta \cdot \mathfrak{B} \cdot i}{\mathfrak{B} - (1-i)\,\varDelta \cdot \mathfrak{B} - \mathsf{A}\, i\, \varDelta \cdot \mathfrak{B}} = p_1 \cdot \frac{i}{1 - \frac{(1-\mathsf{A})\,\varDelta}{1 - \mathsf{A}\varDelta}\,(1-i)}, \tag{8}$$

so daß die Punkte $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{i}\right)$ auf einer Geraden liegen. Von dieser ist der Punkt $\left(\frac{1}{p_1}, 1\right)$ bekannt, ebenso die Richtung

$$\lim_{i=0} \left(\frac{1}{p_i} : \frac{1}{i}\right) = \lim \frac{i}{p_i} = \lim \left(1 - \frac{(1-\mathsf{A})\,\varDelta}{1-\mathsf{A}\varDelta}\,(1-i)\right) : p_1 = \frac{1-\varDelta}{1-\mathsf{A}\varDelta} : p_1 . \tag{9}$$

Danach ist die $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{i}\right)$-Gerade zu zeichnen. Andererseits bekommt man durch eine Bombe mit Registriermanometer die Druck–Zeit-Kurve der Punkte (p, t). Die (p, t)-Kurve als Grundriß und die (p, i)-Kurve als Aufriß ergeben die Zweitafeldarstellung der (p, i, t)-Raumkurve. Aus dieser können wir die später benutzte Pulverfunktion $\varphi(i) = \frac{1}{p_i}\frac{di}{dt}$ ableiten.

Führen wir in (8) die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_i &= \mathfrak{B} - (1-i)\,\varDelta\cdot\mathfrak{B} - \mathsf{A}\,i\,\varDelta\cdot\mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \varDelta\cdot\mathfrak{B} + i\,\mathfrak{B} \\ \mathsf{E} &= f\varDelta\cdot\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ein, so würde die verallgemeinerte Abelsche Gleichung (8) in $\mathsf{E}\cdot i = p_i\,\mathfrak{B}_i$ übergehen. Hier ist, wie man sieht, auf die Temperaturänderung während der Verbrennung nicht Rücksicht genommen. Tatsächlich muß noch die innere (kalorische) Arbeit B hinzugefügt werden. So entsteht die Energiegleichung der Versuchsbombe

$$\mathsf{E}\cdot i = p_i\,\mathfrak{B}_i + \mathsf{B}_i\,. \tag{11}$$

Hier bedeutet, wie man aus (10) abliest, $\mathfrak{B}_i$ den von den Pulvergasen nach Verbrennung des Pulveranteils i erfüllten Raum. $\mathsf{E}\cdot i$ ist die bei der Verbrennung des Anteils i in die Pulvergase übergegangene Energie.

§ 81. Entzündung und Abbrennen, geometrisch

Auf der Oberfläche eines einzelnen Pulverkorns schreite die Entzündung mit der Geschwindigkeit $\dot{e}'$, im Innern schreite die Verbrennung mit der Geschwindigkeit $\dot{e}$ fort. Bei geringen Drucken, z. B. an freier Luft, kann man $\dot{e}$ und $\dot{e}'$ direkt beobachten. Ein zylindrischer Pulverstab verbrennt von oben nach unten mit einer konischen Spitze konstanten Winkels 2α (Mache). Demnach ist $\frac{\dot{e}}{\dot{e}'} = \sin\alpha$.

Die Zündgeschwindigkeit $\dot{e}'$ ist aber verschieden, je nachdem in welcher Richtung gegen die Schwerkraft die Zündung fortschreitet, weil die Pulvergase der Schwerkraft entgegen aufsteigen. Auch Luftströmungen sind von Einfluß. Bei den hohen Drucken der inneren Ballistik kommt das aber aus dem Grunde nicht in Betracht, weil die erhitzten Pulvergase sehr schnell die ganze Ladung umspülen und daher die Zündung sich fast momentan über die Oberfläche aller Pulverkörner erstreckt. Wir machen daher weiterhin die Annahme, daß sich die Gesamtoberfläche zugleich entzündet. Bei Schwarzpulver soll diese Annahme erst berechtigt sein, wenn dasselbe durch starke Kompression (spezifisches Gewicht $\geqq 1{,}85$) seine körnige, poröse Struktur verloren hat und homogen geworden ist (Vieille).

Es wird ferner angenommen und durch die Erfahrung ziemlich gut bestätigt, daß das Abbrennen eines Pulverkorns in parallelen Schichten erfolgt (Piobert). An Stellen starker Krümmung treten möglicherweise Änderungen ein. Sei e die Dicke der bis zur Zeit t verbrannten Schichten. Dann ist das verbrannte Volumen eines Kornes zur Zeit t

$$\mathfrak{F}\cdot e - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}\cdot e^2 + \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{K}\cdot e^3\,. \tag{12}$$

Darin bedeuten, solange e klein ist gegen die Abmessungen des Kornes, $\mathfrak{F}$ die Oberfläche des Kornes, $\mathfrak{H}$ seine gesamte Germainsche (Kanten-)

Krümmung, $\mathfrak{K}$ seine gesamte Gaußsche (Ecken-) Krümmung*). Bei größerem e sind $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ als Integrale darzustellen.

Da angenommen wurde, daß alle Pulverkörner der Ladung sich zugleich entzünden, ist das Volumen des zur Zeit t verbrannten Pulvers gleich

$$\sum \mathfrak{F} \cdot e - \tfrac{1}{2} \sum \mathfrak{H} \cdot e^2 + \tfrac{1}{3} \sum \mathfrak{K} \cdot e^3 , \tag{13}$$

die Summen bezogen auf alle Körner der Ladung. Bei unregelmäßigen Formen und Größen in einer Ladung sind die drei Koeffizienten als empirisch zu ermittelnde Größen anzusehen; bei regelmäßig gebildeten Körnern sind sie zu berechnen, wenn bekannt ist, wieviel von jeder Form und Größe in der Ladung enthalten sind.

Jeder Punkt im Innern eines Pulverkorns hat einen kleinsten Abstand von der Oberfläche desselben. Das Maximum dieser kleinsten Abstände nennen wir den Kornhalbmesser, den wir mit d bezeichnen. Den Kornhalbmesser zur Einheit genommen, habe ein rechteckiges Blättchen die Abmessungen $2 \leqq \frac{2}{m} \leqq \frac{2}{n}$. Zur Zeit t ist das Volumen

$$2 \cdot \frac{2}{m} \cdot \frac{2}{n} - (2 - 2\,\varepsilon) \left(\frac{2}{m} - 2\,\varepsilon\right) \left(\frac{2}{n} - 2\,\varepsilon\right)$$

verbrannt, wo $\varepsilon = e/d$ gesetzt ist.

Das verbrannte Volumen bezeichnen wir mit $2 \cdot \frac{2}{m} \cdot \frac{2}{n} \cdot i$, so daß i eine unbekannte von 0 bis 1 wachsende Zahl ist, die angibt, ein wie großer Teil verbrannt ist. Setzen wir in Einklang mit (13)

$$i = a\,(1 - \lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2)\,\varepsilon\,, \tag{14}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 + m + n\,, \\ \lambda &= \frac{m + n + m\,n}{a}\,, \\ \mu &= \frac{m\,n}{a}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Größe und Form des Blättchens sind bestimmt durch d, m, n. Statt m, n kann man als Formfaktoren auch nehmen a/λ und λ^2/μ.

Für das Blättchen beträgt das Volumen $\mathfrak{V} = 8 \cdot \frac{1}{m\,n}$, die Oberfläche $\mathfrak{F} = 4\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m\,n}\right)$, die gesamte Kantenkrümmung (Mantelsumme der Einheitszylinderquadranten längs den Kanten)

$$\mathfrak{H} = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{2}\,,$$

*) Vgl. Steiner, Werke II, S. 173. Dort wächst der Körper um eine Schicht konstanter Dicke, darum ist dort das Glied mit e^2 positiv. Man beachte die Nichtumkehrbarkeit: Der abnehmende Würfel bleibt Würfel, der wachsende nicht.

die gesamte Eckenkrümmung (Oberflächensumme der Einheitskugeloktanten um die Ecken) $\mathfrak{K} = 4\pi$.

Also wird $\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{V}}{\mathfrak{F}^2} = 2\pi \cdot \frac{\lambda}{a}$ und $\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{K}}{\mathfrak{H}^2} = \pi \cdot \frac{\mu}{\lambda^2}$. Bei allgemeineren Formen müßte man also $\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{V}}{\mathfrak{F}^2}$ und $\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{K}}{\mathfrak{H}^2}$ als Formfaktoren des Pulvers einführen. Von ihrer Größe hängt die „Ausstrahlung" des Blättchens ab. Für flache Blättchen, wo m und n klein sind, ist a nahezu 1, $\lambda = m + n - \frac{m^2 + mn + n^2}{1 + m + n} \doteq m + n$, also $\frac{a}{\lambda}$ um so größer, je flacher die Blättchen. Die Erfahrung hat ergeben, daß, wenigstens für sehr flache Blättchen, der spezifische Druck f des Pulvers proportional λ/a ist*). Die Pulverkonstante f ist also das Produkt aus einem Formfaktor und einem Stoffaktor. Die Gleichungen:

$$2(1 + m + n)^2 - 6(m + n + mn) = (1 - m)^2 + (1 - n)^2 + (m - n)^2,$$

$$2\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn}\right) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2$$

ergeben $\frac{\lambda}{a} \leqq \frac{1}{3}$ und $\frac{\mu}{\lambda^2} \leqq \frac{1}{3}$; die oberen Grenzen werden nur beim Würfel ($m = n = 1$) erreicht. Für die Kugel erreichen bekanntlich $\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{V}}{\mathfrak{F}^2}$ und $\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{K}}{\mathfrak{H}^2}$ ihre größten Werte.

Bei Körnerformen, deren Oberfläche von mehrfachem Zusammenhange ist, wird der Koeffizient μ im Falle eines Zusammenhanges gerader Ordnung gleich Null. Für zylindrische Röhren oder Ringe mit den Radien R, r, der Höhe h wird $i = 1 - \frac{\pi(h - 2e)(R + r)(R - r - 2e)}{\pi \cdot h \cdot (R + r)(R - r)} = 1 - (1 - \varepsilon)(1 - \beta\varepsilon)$ $= (1 + \beta)\varepsilon - \beta\varepsilon^2$, wo $\varepsilon = \frac{2e}{R - r}$ bzw. $2\frac{e}{h}$, $\beta = \frac{R - r}{h}$ bzw. $\frac{h}{R - r}$ ist, je nachdem welche der beiden Größen h oder $R - r$ die kleinere, also gleich der Korndicke (dem doppelten Kornhalbmesser) ist.

§ 82. Brenngesetze.
Die zweite Hauptgleichung der inneren Ballistik

Ist die lineare Brenngeschwindigkeit $\dot{e} = de/dt$ des Pulvers groß (klein), so heißt das Pulver scharf (mild). Die Brenngeschwindigkeit $\dot{e}$ muß abhängen von dem Druck p, unter dem das Pulver verbrennt, und von seiner Dichte δ**). Da diese drei Größen von den Dimensionen LT^{-1},

---

*) Emery, Mémorial des poudres et salpêtres **14** (1907/8) S. 134.

) Nach Wolff (Kriegstechn. Zschr. **6 [1903]) auch von der Ladedichte Δ. Vgl. hierzu die Bemerkungen der Enc. des sc. math. IV. 6. S. 166, 167, und Mache, Mitt. über Gegenstände des Art.- u. Geniewesens, Wien 1916, S. 127.

$ML^{-1}T^{-2}$, ML^{-3} sind, kann die Brenngeschwindigkeit $\dot{e}$ nur die Form haben:

$$\dot{e} = \text{const.} \left(\frac{p}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Für Schwarzpulver hat Sarrau in der Tat gefunden, daß bei ballistischen Drucken $\dot{e}$ etwa der $\frac{1}{2}$ten Potenz von p proportional ist, während z. B. St.-Robert den Exponenten zu $\frac{2}{3}$, Sébert und Hugoniot zu 1 angeben. Für kolloidale Pulver ist er nach Gossot und Liouville $\frac{2}{3}$, nach Charbonnier, Mache, Schmitz 1. Diese Abweichungen untereinander und von dem theoretisch zu erwartenden Gesetz (16) erklären sich aus der Nichtberücksichtigung der Dichte δ, die im Gesetz (16) natürlich nicht die anfängliche Fabrikationsdichte, sondern die Dichte im Moment der Messung bedeutet. Die letztere weicht von der ersteren ab, erstens infolge des Druckes, zweitens infolge des Wärmeüberganges von den Pulvergasen auf die Ladung. Der Druck würde die Dichte steigern. Diese Steigerung bleibt jedenfalls unter der Elastizitätsgrenze, da unverbrannte Pulverkörner die ursprüngliche Dichte aufweisen (Heydenreich). Der Wärmeübergang verringert dagegen die Dichte, was bei Schwarzpulver, außer bei sehr festem, sogar zum Zerfallen in kleinere Körner führt (Vieille). Die Verringerung des Nenners δ in (16) zeigt sich als scheinbare Vergrößerung des Zählers, bzw. des Exponenten, was den Vieilleschen Versuchen entspricht. Wenn sehr festes Schwarzpulver in einzelnen Fällen etwas langsamer abbrannte, als dem Exponenten $\frac{1}{2}$ in (16) entspricht, so ist daraus zu schließen, daß der Druck die Dichte doch etwas steigerte.

Ein anderer Umstand, der verhindert, daß das theoretische Gesetz (16) rein in Erscheinung tritt, ist der folgende. Die Brenngeschwindigkeit $\dot{e}$, bezogen auf das Pulverkorn der ursprünglichen Dichte, ermittelt man aus den verbrannten Pulvermengen und diese aus den entwickelten Gasdrucken. Daraus folgt, daß man so nur dann die wirkliche lineare Brenngeschwindigkeit mißt, wenn nicht durch Zerfallen von Körnern (Zersprühen) plötzliche Änderungen der brennenden Oberfläche eintreten. Zerfällt z. B. ein Würfel in acht gleich große, so wird die brennende Oberfläche sofort verdoppelt. Bei porösem Pulver kann Zerfallen auch eintreten ohne sprunghafte Änderung der brennenden Oberfläche.

Für die Zwecke der Ballistik kommt es nun gar nicht auf das theoretische Brenngesetz (16) an, in dem δ und $\dot{e}$ mit den erwähnten Unsicherheiten behaftet sind, sondern auf das Brenngesetz, wie es wirklich zum Ausdruck kommt. Um das auszusprechen, führen wir zunächst statt der Dicke e die normierte Dicke $\varepsilon = e/d$ und also die normierte lineare Brenngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon} = \dot{e}/d$ ein, und nehmen das allgemeinere Brenngesetz an

$$\dot{\varepsilon} = c \cdot p^{\alpha}. \tag{17}$$

Wir nennen α den Brennexponenten, c den Brennkoeffizienten. Von dem Einfluß der Dichte δ sehen wir also ganz ab. Wir behalten aber die Möglichkeit im Auge, daß c keine Konstante, sondern eine Funktion $c(\varepsilon)$ von ε ist. Die Größen ε und $\dot{\varepsilon}$ haben aber nur bei gleichmäßig geformten Pulverkörnern einen bestimmten Sinn, sonst nur ihre Mittelwerte. Auch kann man nur bei Pulvern aus gleichmäßigen Körnern von der verbrannten Pulvermenge auf die verbrannte Dicke e schließen. Deshalb führen wir lieber direkt die verbrannte Menge i und die „kubische" Brenngeschwindigkeit di/dt ein. Wird dann das Brenngesetz (17) ersetzt durch:

$$\frac{di}{dt} = \varphi(i) \cdot p^{\alpha}, \tag{18}$$

so ergibt sich wegen (14) und wegen

$$\frac{di}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{di}{dt},$$

die Funktion $\varphi(i)$ durch Elimination von ε aus (14) zu

$$\varphi(i) = a(1 - 2\lambda\varepsilon + 3\mu\varepsilon^2) \cdot c. \tag{19}$$

Für die Funktion $c(\varepsilon)$ und also auch $\varphi(i)$ ergeben sich von vornherein Beschränkungen. Bei Blättchenpulver der Abmessungen $2d$, $2d/m$, $2d/n$ muß sie bei sonst gleicher Beschaffenheit des Pulvers nur von d, m, n abhängen. Und sie muß immer denselben Wert haben, wenn $(1-\varepsilon)d$, $(1-\varepsilon)\frac{d}{m}$, $(1-\varepsilon)\frac{d}{n}$ demselben Wertetripel gleich sind, d. h. sie ist eine bloße Funktion dieser drei Größen, oder auch von $(1-\varepsilon)d$ und den beiden Formfaktoren $1/m$, $1/n$. Die Brenngeschwindigkeit hängt also von der Größe und von der Flachheit des Blättchens ab. Das ist verständlich, denn bei einem brennenden Blättchen herrscht in einem Punkte nahe der Oberfläche eine um so höhere Temperatur, je kleiner und flacher es ist. Ist schon bei einem einzelnen regelmäßig abbrennenden Korn ein Brenngesetz der Form (18) verständlich, dann um so mehr bei einer Kartusche voll Körnern. Wir wollen nunmehr von dem Zusammenhang der Funktion $c(\varepsilon)$ oder $\varphi(i)$ mit den Pulverkonstanten a, λ, μ absehen und an deren Stelle die Pulverfunktion $\varphi(i)$ als für das Pulver bei gegebener Körnung, Menge, Form der Ladung und Größe des Verbrennungsraumes*) kennzeichnend ansehen; das ist allgemeiner, umfaßt auch unregelmäßiges Abbrennen der einzelnen Körner und Zerfallen derselben, da trotzdem für die ganze Ladung ein gesetzmäßiges Abbrennen stattfinden kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $\alpha = 1$ (Charbonnier, Mache, Schmitz):

$$di = \varphi(i)\, p\, dt. \tag{20}$$

*) Die für konstanten Verbrennungsraum ermittelte Funktion $\varphi(i)$ darf aber nicht ohne weiteres auf den veränderlichen Verbrennungsraum beim Schuß übertragen werden, wie sich aus Untersuchungen von A. Klose ergibt.

§ 83. Die Energiegleichung. Dritte Hauptgleichung der inneren Ballistik

Es sei E die Gesamtenergie der Pulverladung, also $\mathsf{E} \cdot i$ die Energie, die nach Abbrennen des Teiles i freigeworden ist. Sie hat dann die kinetische Energie T_i erzeugt, dabei die Arbeit A_i geleistet und es ist die Gasspannung $\int p\, d\mathfrak{V}$ übriggeblieben, wo die Integration zu erstrecken wäre von dem in dem betrachteten Zeitpunkt bestehenden Volumen $\mathfrak{V}$ der Pulvergase bis zu dem Volumen beim Austritt des Geschosses aus dem Rohre. Statt dessen integriert man bis $\mathfrak{V} = \infty$ und nimmt den Fehler mit in A_i hinein. Bei der Integration nimmt man das „polytrope" Gesetz an:

$$p\, \mathfrak{V}^\gamma = \text{const}.$$

Dann erhält man

$$\int_{\mathfrak{V}}^{\infty} p\, d\mathfrak{V} = \int p\, \mathfrak{V}^\gamma \frac{d\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}^\gamma} = p\, \mathfrak{V}^\gamma \cdot \int \frac{d\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}^\gamma} = \frac{p\, \mathfrak{V}}{\gamma - 1}.$$

Die Energiegleichung (Résal) lautet also

$$\mathsf{E} \cdot i = \mathsf{T}_i + \mathsf{A}_i + \frac{p_i\, \mathfrak{V}_i}{\gamma - 1}. \tag{21}$$

Eine polytrope Konstante γ gibt es nicht, man nimmt für γ einen Wert zwischen dem isothermen 1 und dem adiabatischen, der stets größer als 1 ist, z. B. $\gamma = 1{,}11$ für Geschütze, $\gamma = 1{,}22$ für Gewehre bei rauchlosem Pulver. Cranz versucht γ als Funktion von s zu bestimmen*). Auf den Gleichungen von Newton (2), Charbonnier (18), Résal (21) beruht Cranz' „Vorschlag für eine vollständige theoretische Lösung des innerballistischen Hauptproblems" (a. a. O., S. 133).

§ 84. Praktische Lösung (Vahlen 1941)

Bei der Pulververbrennung im Geschütz setzt sich die frei werdende Energie $\mathsf{E}\, di$ zusammen aus der Energieumwandlung $d(p\,\mathfrak{V})$, wie sie nach § 80 (11) für die Versuchsbombe charakteristisch ist. Dazu tritt die innere kalorische Arbeit $d\mathsf{B}$, die durch die Temperaturänderung der Pulvergase bedingt ist; diese ist der inneren Spannung gleich, also

$$d\mathsf{B} = \mathfrak{V}\, dp. \tag{22}$$

Ein Teil der Energie setzt sich in kinetische Energie $d\mathsf{T}$ des Geschosses um, bzw. leistet mechanische Arbeit $d\mathsf{A}$ bei der Durchpressung des Geschosses durch die Züge. Diese mechanische Arbeit ist nach § 78 (2):

$$d\mathsf{A} = W\, q\, ds = W\, d\mathfrak{V}. \tag{23}$$

*) Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Ergänzungsband 1936, S. 137.

Damit schreibt sich die differentielle Energiegleichung, die an Stelle der Résalschen Energiegleichung § 83 (21) zu setzen ist:

$$\mathsf{E}\,di = d\,(p\,\mathfrak{V}) + d\,\mathsf{B} + d\,(\mathsf{T} + \mathsf{A})\,. \tag{24}$$

Aus der Bewegungsgleichung § 78 (2) folgt zunächst, wenn mit $\dot{s}\,dt = ds$ multipliziert wird:

$$d\,(\tfrac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2) = d\,\mathsf{T}\,, \qquad q\,p\,ds = p\,d\,\mathfrak{V}\,,$$

also*)

$$d\,\mathsf{T} + d\,\mathsf{A} = p\,d\,\mathfrak{V}\,. \tag{25}$$

Führen wir (22) und (25) in die Energiegleichung (24) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} d\,(\mathsf{T} + \mathsf{A} + \mathsf{B}) &= \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\,di \\ d\,(p\,\mathfrak{V}) &= \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\,di\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Gleichungen (26) geben integriert:

$$\mathsf{T}_i + (\mathsf{A}_i - \mathsf{A}_{i_0}) + (\mathsf{B}_i - \mathsf{B}_{i_0}) = \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\,(i - i_0)\,, \tag{27}$$

$$p_i\,\mathfrak{V}_i - p_{i_0}\,\mathfrak{V}_{i_0} = \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}\,(i - i_0)\,. \tag{28}$$

Wie weiter unten gezeigt wird, sind A_i, A_{i_0}, B_i, B_{i_0} und i_0 empirisch zu ermitteln. Die kinetische Energie

$$\mathsf{T}_i = \tfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{s}_i^2\,, \qquad ds = \dot{s}_i\,dt \tag{29}$$

läßt sich aus Rücklaufmessungen ermitteln. Nimmt man noch die Brenngleichung § 82 (20) hinzu:

$$di = \varphi\,(i)\,p\,dt\,, \tag{30}$$

so folgt aus den Gleichungen (27) bis (30) die Lösung. Von jedem Wertesystem s, t, i, p ausgehend, erhält man das zu $t + dt$ gehörige, indem man ds aus (29), di aus (30), dann $p + dp$ aus (28) berechnet, wo $i + di$, $s + ds$ für i, s einzusetzen ist. Der Raumpunkt (s, i, t) beschreibt eine Raumkurve, die man am einfachsten im Zweitafelsystem darstellt: Aufriß die (i, t)-Kurve, Grundriß die (s, t)-Kurve. Jedem Punkt (s, i) des Seitenrisses ist ein Wert des Parameters p vermittelst (28) explizit zugeordnet. Statt (30) kann man auch das allgemeinere Brenngesetz

$$di = \varphi\,(i, p)\,dt$$

nehmen. Bisher hat man die kalorische Arbeit B_i vernachlässigt und von A_i nur die Einpreßarbeit A_{i_0} als die weitaus größte berücksichtigt. Bei diesen Vernachlässigungen würde sich das eben skizzierte Verfahren besonders einfach durchführen lassen.

In (28) ermittelt man zunächst empirisch den Druck p_{i_0}, mit dem die Bewegung des Geschosses beginnt, also den Einpreßdruck. Darauf wird das Pulverquantum $\mathsf{E} \cdot i_0$ ermittelt, das gerade genügt, das Geschoß in den Lauf einzupressen. Dann ergibt sich aus § 80 (11), da ja bis dahin die

*) Vgl. Clausius, Wärmetheorie (1876) S. 39.

Verhältnisse im Geschütz mit denjenigen der Versuchsbombe übereinstimmen, also aus

$$\mathsf{E}\, i_0 = \mathfrak{B}_{i_0} p_{i_0} + \mathsf{B}_{i_0}$$

der Anfangswert B_{i_0} der kalorischen Arbeit.

Während die Anfangswerte p_{i_0}, A_{i_0}, B_{i_0} jedenfalls empirisch zu ermitteln sind, ist für die Herleitung der Funktionen A_i, B_i ein indirekter Weg vorzuziehen. Man kann durch ein Registriermanometer den Druck p, aus Rücklaufregistrierungen den Weg s als Funktion der Zeit t ermitteln. Dann ist auch $\dot{s}$, also auch T und vermittelst

$$\int_{i_0}^{i} \frac{di}{\varphi(i)} = \int_0^t p\, dt$$

auch i als Funktion von t bekannt. Man kennt also $\mathfrak{B}$; die Integration von (25) liefert A, die Integration der ersten Gleichung von (26) liefert B. Zur Kontrolle des Anfangswertes A kann man den Mündungswert von T heranziehen. Unter der Voraussetzung, daß dann alles Pulver verbrannt ist, also $i = 1$ gesetzt werden darf, folgt A_{i_0} aus (27).

Hat s den Wert erreicht, bei dem das Geschoß das Rohr verläßt, und ist noch $i < 1$, so fliegt ein unverbrannter Pulverrest mit hinaus. In den vorstehenden Rechnungen sind weiter nicht berücksichtigt die Verluste, die durch die zwischen Rohr und Geschoß entweichenden Gase entstehen. Um diese Beträge wäre E in (24) zu verkleinern. Im allgemeinen sind diese Verluste aber nicht bekannt.

Ist aber schon vorher $i = 1$, so ist von hier an $di = 0$, also nach (26) $d(\mathsf{T} + \mathsf{A} + \mathsf{B}) = 0$. Da $d\mathsf{A}$ und $d\mathsf{B}$ positiv sind, ist $d\mathsf{T}$ negativ, T nimmt ab. Also ist anzustreben, daß das Pulver nicht verbrannt ist, bevor das Geschoß das Rohr verläßt.

Aus der Mündungsenergie ergibt sich zunächst $v + V$ und daraus $v = \frac{M}{M+m}(v + V)$ die Mündungsgeschwindigkeit, um so größer, je größer $M : m$ ist. Durch die Rücksicht auf die Materialbeanspruchung und -abnutzung sind hier gewisse Grenzen gesetzt.

Aus (27) folgt, je kleiner A_i und B_i sind, desto größer ist T_i. Also ist möglichst geringe Reibung und Wärmebildung erwünscht.

§ 85. Lösung nach Gossot und Liouville

Die geschilderte Methode bezieht sich nur auf die Annahme, daß der Brennexponent $\alpha = 1$ ist [vgl. § 82 (17)]. Da diese Annahme noch nicht unbestritten feststeht, verdienen Methoden Beachtung, die an einen speziellen Wert von α nicht gebunden sind, wenn dieselben auch Vereinfachungen anderer Art vornehmen.

Wir setzen also jetzt das folgende Brenngesetz voraus:

$$\frac{d\Phi(i)}{dt} = p^\alpha, \tag{31}$$

wo $d\Phi(i) = \frac{d\,i}{\varphi(i)}$, das wir mit Rücksicht auf $dt = \frac{ds}{v}$, $p = \frac{d\mathsf{T}}{q\,ds}$ so schreiben:

$$v\,\frac{d\Phi(i)}{ds} = \left(\frac{d\mathsf{T}}{q\,ds}\right)^\alpha \tag{32}$$

oder, wegen $\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \mathsf{T}$,

$$\left(\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}}\right)^{1/2}\frac{d\Phi(i)}{q\,ds} = C\cdot\left(\frac{d\,\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}}}{q\,ds}\right)^\alpha, \tag{33}$$

wenn

$$C = \frac{1}{q}\cdot\sqrt{\frac{m_1}{2}}\,\mathsf{E}^{\alpha-1/2} \tag{34}$$

gesetzt wird.

Indem man p und v durch T ausdrückt, führt man die korrigierenden Faktoren der Masse ein. Dem tragen wir Rechnung, indem wir in (34) m_1 statt m schreiben.

In der Energiegleichung [§ 83 (21)], die wir jetzt schreiben:

$$i = \frac{1}{\gamma - 1}\cdot\frac{d\,\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}}}{q\,ds}\cdot\mathfrak{V} + \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}} + \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}, \tag{35}$$

wird der kleine Bruch A/E vernachlässigt. Es wird ferner in

$$\mathfrak{V} = q\,s - q\,s_0\cdot\Delta\cdot[1 - i\,(1 - \mathsf{A})] \tag{36}$$

für das zweite Glied rechts ein Mittelwert $q\,s_1$ eingesetzt, so daß s_1 ein kleiner Bruchteil von s_0 ist, der um so weniger in Betracht kommt, je länger das Rohr im Verhältnis zur Pulverkammer ist. Diese Entfernung von i aus (36) ist um so mehr zulässig, je mehr Pulver vor Beginn der Geschoßbewegung verbrannt ist, je näher $i_0 = 1$ ist. Also wird

$$\mathfrak{V} = q\,(s - s_1), \tag{37}$$

$$d\mathfrak{V} = q\,ds \tag{38}$$

und die Energiegleichung

$$i = \frac{1}{\gamma - 1}\cdot\frac{d\,\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}}}{d\lg\mathfrak{V}} + \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}}. \tag{39}$$

Wir führen jetzt normierte Größen der Dimension 1 ein durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned}\Phi(i) &= \mathsf{Y},\\ \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{E}} &= \mathsf{Z},\\ \mathfrak{V} &= h\,\mathsf{X}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

und bestimmen h vermittels

$$C \cdot h^{1-\alpha} = 1 . \tag{41}$$

Dann werden die Gleichungen (33), (39) des Problems

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{-1}(\mathsf{Y}) &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d\mathsf{Z}}{d \lg \mathsf{X}} + \mathsf{Z}, \\ \mathsf{Z}^{1/2} \frac{d\mathsf{Y}}{d\mathsf{X}} &= \left(\frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}\right)^{\alpha} . \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Durch diese Gleichungen werden Y, Z Funktionen von X und den Anfangswerten $\mathsf{Z}_0 = 0$, $\mathsf{Y}_0 = 0$, $\mathsf{X}_0 = \frac{1}{h} \mathfrak{V}_0$. Die Gleichungen enthalten an Konstanten nur: erstens den Entspannungsexponenten γ, der jedenfalls nahezu den Wert 1,41 hat, zweitens den Brennexponenten α, drittens die für das Pulver kennzeichnende Funktion Φ. Demnach bestehen zwischen den normierten Größen X, Y, Z, X_0 zwei Gleichungen:

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(\mathsf{X}, \mathsf{X}_0), \qquad \mathsf{Z} = \mathsf{Z}(\mathsf{X}, \mathsf{X}_0), \tag{43}$$

in denen nur noch numerische Koeffizienten vorkommen, die also für ein bestimmtes Pulver ein für allemal bestimmt werden können. Jeder Schuß mit gemessener Mündungsgeschwindigkeit gibt einen Punkt der „Fläche der Geschwindigkeiten" $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}(\mathsf{X}, \mathsf{X}_0)$. Den Druck p erhält man aus

$$p = \frac{d\mathsf{E}\mathsf{Z}}{dh\mathsf{X}} = \frac{\mathsf{E}}{h} \cdot \mathsf{Z}', \tag{44}$$

also die Stelle X_*, wo der Druck, also Z' seinen größten Wert Z'_* erreicht, aus $\frac{d^2\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}^2} = 0$. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt X_* als Funktion von X_0, eine „Kurve der Höchstdrucke" mit rein numerischen Koeffizienten; infolgedessen wird auch Z'_* eine solche Funktion von X_0. Jeder Schuß mit gemessenem Höchstdruck gibt einen Punkt dieser Kurve der Höchstdrucke.

Die Gleichungen gelten nur, bis das Pulver verbrannt ist. Dann ist $\Phi^{-1}(\mathsf{Y}) = 1$ und die Energiegleichung (42) wird:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d\mathsf{Z}}{d \lg \mathsf{X}} = -\mathsf{Z} + 1 \tag{45}$$

und ergibt:

$$(1 - \mathsf{Z})\, \mathsf{X}^{\gamma - 1} = \text{const} ,$$

also, da dann für $i = 1$ der Höchstdruck erreicht wird:

$$\frac{1 - \mathsf{Z}}{1 - \mathsf{Z}_*} = \left(\frac{\mathsf{X}}{\mathsf{X}_*}\right)^{1-\gamma} . \tag{46}$$

Für den Druck wird

$$p = \frac{\mathsf{E}}{q\,h} \cdot \mathsf{Z}' = \frac{\mathsf{E}}{q\,h} \cdot \frac{1 - \mathsf{Z}}{\mathsf{X}} \cdot (\gamma - 1)\,, \tag{47}$$

insbesondere für den Höchstdruck

$$p_* = \frac{\mathsf{E}\,(\gamma - 1)}{q\,h} \cdot \frac{1 - \mathsf{Z}_*}{\mathsf{X}_*}\,. \tag{48}$$

§ 86. Lösung nach Emery für konstante Emission

Der älteren Annahme einer bei konstantem Druck konstanten linearen Brenngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ kann man als neuere Annäherung versuchsweise gegenüberstellen, daß die kubische Brenngeschwindigkeit di/dt, also die Aussendung der Pulvergase konstant ist. Dann ist $\varphi\,(i) = \text{const}$, also nach § 85 (31), wenn i_0 vernachlässigt wird, $\Phi\,(i) = \int\limits_0 \frac{di}{\varphi\,(i)} = \Phi \cdot i$, wo Φ eine Konstante ist. Nimmt man dann

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{\Phi\, q} \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \mathsf{E}^{\alpha - 1/2}\,, \\ \Upsilon &= i\,, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

so werden die Gleichungen § 85 (42):

$$\left.\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d\mathsf{Z}}{d \lg \mathsf{X}} + \mathsf{Z}\,, \\ \mathsf{Z}^{1/2} \frac{d\Upsilon}{d\mathsf{X}} &= \left(\frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}\right)^{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Schreibt man diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Upsilon\,\mathsf{X}_0^{-\beta} &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d\mathsf{Z}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}}{d \lg \mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}} + \mathsf{Z}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}\,, \\ (\mathsf{Z}\,\mathsf{X}_0^{-\beta})^{1/2} \frac{d\Upsilon\,\mathsf{X}_0^{-\beta}}{d\mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}} &= \left(\frac{d\mathsf{Z}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}}{d\mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}}\right)^{\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

worin $\beta = \frac{1 - \alpha}{1{,}5 - \alpha}$ ist, so erkennt man, daß $\Upsilon\,\mathsf{X}_0^{-\beta}$ und $\mathsf{Z}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}$ bloße Funktionen von $\mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}$ sind. Dadurch kommt eine Art Ähnlichkeit der Bewegungen zum Ausdruck: gleichen Werten von $\mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}$ entsprechen proportionale Geschwindigkeiten. Also gilt dasselbe für die theoretischen Höchstdrucke, die demnach demselben Werte von $\mathsf{X}\,\mathsf{X}_0^{-\beta}$ entsprechen. Gehört der theoretische Höchstdruck zu einem Werte von Υ, der größer ist als 1, so wird er praktisch nicht erreicht. Der wirklich erreichte Höchstdruck ist dann der am Ende der vollständigen Pulververbrennung, wo also $\Upsilon = 1$ ist, und wird wie oben erhalten aus § 85 (44).

§ 87. Ansatz zur Lösung bei allgemeinem Brenngesetz

Nimmt man kein besonderes Brenngesetz an, sondern hat man empirisch die Beziehung gefunden:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{dt}{di},$$

so erhält man vermittelst

$$p = \frac{d\mathsf{T}}{q\,ds} = \frac{d\mathsf{T}}{d\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\,di} \quad \text{und} \quad dt = \frac{q\,ds}{q\,v} = \frac{d\mathfrak{B}}{q\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \mathsf{T}^{1/2}}$$

die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}}{\mathsf{T}'}\right) = \frac{\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}}{q\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \mathsf{T}^{1/2}},$$

zu der die Energiegleichung [§ 83 (21)] kommt:

$$\frac{\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}}{\mathsf{T}'} = \frac{\mathfrak{B}}{(\gamma - 1)(\mathsf{E}\,i - \mathsf{T} - \mathsf{A})};$$

zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $\mathfrak{B}$ und T von i. Setzt man $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\,i = \mathfrak{B} \cdot \mathsf{X}$, $\mathsf{T} + \mathsf{A} = \mathsf{E} \cdot \mathsf{Z}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathsf{E}} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{\mathsf{K}}$, so wird die Energiegleichung: $i = \dfrac{\mathsf{K}\mathsf{Z} + \mathsf{X}\frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}}{\mathsf{K} + \frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}}$. Eliminiert man hiermit i aus dem Brenngesetz, so bekommt man:

$$\frac{d}{d\mathsf{X}}\left(\frac{\mathsf{K}\mathsf{Z} + \mathsf{X}\frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}}{\mathsf{K} + \frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}}\right) = \frac{\mathfrak{B} : q\sqrt{\frac{2}{m}}\,(\mathsf{E}\,\mathsf{Z} - \mathsf{A})}{\mathfrak{F}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathsf{E}} : \frac{d\mathsf{Z}}{d\mathsf{X}}\right)},$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion Z von X. Es käme darauf an, entweder die empirische Funktion $\mathfrak{F}$ durch integrable Funktionen zu approximieren oder die Differentialgleichung bei allgemein gelassener Funktion numerisch oder graphisch zu integrieren.

§ 88. Empirische Formeln von Sarrau für Höchstdruck und Mündungsgeschwindigkeit

Die beschriebenen Verfahren liefern, soweit sie anwendbar sind, den Verlauf der Geschwindigkeiten und Drucke allein auf Grund der Schußdaten. Für die Praxis kommt es vor allem auf Ableitung der Mündungsgeschwindigkeit und des Höchstdruckes an. Für diese hat Sarrau empirische Formeln gegeben:

Die Mündungsgeschwindigkeit ist

$$v_{\max.} = M_\gamma \cdot \left(\frac{f\,a}{\tau}\right)^{1/2} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{3/4 - 2\gamma} \cdot \frac{\Gamma^{3/8}\,(\delta \Delta)^{1/4}\, S^\gamma\, c^{1/2 - 2\gamma}}{G^{5/8 - \gamma}} \tag{52}$$

und der Höchstdruck auf den Geschoßboden

$$p_* = \mathsf{K} \cdot \frac{f\,a}{\tau} \cdot \frac{\delta \Delta}{c^2}\,(G\,\Gamma)^{1/2}\,, \tag{53}$$

auf den Stoßboden

$$\mathsf{K}^1 \cdot \frac{f\,a}{\tau} \cdot \frac{\delta \Delta}{c^2}\, G^{1/4}\, \Gamma^{3/4}\,. \tag{54}$$

Darin bedeuten M_γ, K und K^1 Konstanten, S den Geschoßweg, c das Kaliber, G und Γ das Gewicht von Geschoß und Ladung, δ das spezifische Gewicht des Pulvers, f, a, λ, Δ haben die bereits erklärten Bedeutungen; τ ist die Brenndauer unter konstantem Druck p_0; γ hat bei scharfen Pulvern den Wert $\frac{1}{8}$, bei milden $\frac{1}{4}$. Für letztere gibt Sarrau außerdem die Formel

$$v_{\max.} = A\left(\frac{f\,a}{\tau}\right)^{1/2} (\Gamma\,S)^{3/8} \left(\frac{\delta \Delta}{G\,c}\right)^{1/4} \left(1 - \mathfrak{B}\,\frac{\lambda}{\tau}\,\frac{(G\,S)^{1/2}}{c}\right). \tag{55}$$

Die Formeln sind nicht homogen. Die Konstanten haben Dimensionen; ihre Zahlenwerte hängen von den zugrunde gelegten Maßeinheiten ab. Nimmt man mit Sarrau Dezimeter, Kilogramm, Sekunden, so wird:

$$\log M_{3/16} = 3{,}49425\,, \quad \log \mathsf{K} = 3{,}961\,, \quad \log \mathsf{K}^1 = 4{,}25092\,,$$
$$\log A = 3{,}16767\,, \quad \log \mathfrak{B} = \overline{2}{,}18373\,.$$

Die Formeln dienen auch umgekehrt dazu, die sonst schwer bestimmbare Brenndauer τ zu ermitteln. Der Druck wird gemessen am Stoßboden des Rohres, während hier nach (53) der Druck am Geschoßboden genommen wird. Diese Drucke sind etwas verschieden wegen der Bewegung des (verbrannten und unverbrannten) Pulvers. Es muß die Beziehung zwischen beiden ermittelt werden. Nimmt man, wie üblich, an, daß diese Beziehung nur vom Geschoßgewicht und vom Ladegewicht abhängt, so kann sie nur in einer Beziehung zwischen dem Verhältnis der beiden Drucke und dem Verhältnis der beiden Gewichte bestehen, da außer diesen zwei dimensionslosen Monomen keine von diesen unabhängigen gebildet werden können. Gossot und Liouville nehmen überdies an, daß das erste Verhältnis einer bloßen Potenz des zweiten proportional ist, und finden, daß 0,3 eine gute Annäherung für den Exponenten gibt, während Sarrau 0,25 genommen hatte, wie ein Vergleich von (53) mit (54) ergibt.

§ 89. Empirisches Verfahren von Vallier, v. Zedlitz und Heydenreich für den Druckverlauf

Hat man nach diesen Formeln oder auch empirisch den Höchstdruck p_* gefunden, so kann man nach Vallier den Druckverlauf angenähert finden wie folgt.

Wir führen die normierten Variablen ein:

$$\frac{p}{p_*} = \ddot{\sigma}, \qquad \frac{t}{t_*} = \tau. \tag{56}$$

$\ddot{\sigma}$ erreicht sein Maximum 1 bei $1 - \tau = 0$. Also besteht eine Entwicklung

$$1 - \ddot{\sigma} = \frac{\beta}{2}(1-\tau)^2 + \cdots,$$

in der β die Gipfelkrümmung der $(\ddot{\sigma}, \tau)$-Kurve, der normierten Druck–Zeit-Kurve ist. Bis auf Glieder dritter Ordnung ist nun

$$1 - \frac{\beta}{2}(1-\tau)^2 + \cdots = [1-(1-\tau)]^\beta\,[1+(1-\tau)+\tfrac{1}{2}(1-\tau)^2+\cdots]^\beta.$$

Also kann man annehmen:

$$\ddot{\sigma} = (\tau\, e^{(1-\tau)})^\beta. \tag{57}$$

Diese Kurve hat überdies die Eigenschaften für kleine τ zu wachsen wie eine Potenz von τ, vom Maximum bei $\tau = 1$ an abzufallen, wie eine Adiabate und sich der Achse $\ddot{\sigma} = 0$ asymptotisch zu nähern. Bei zweckmäßiger Bestimmung von β soll sie die Druck–Zeit-Kurve mit guter Annäherung wiedergeben. Da diese Kurve anfänglich steil ansteigt (s. Abb. 50 § 72), müßte $\beta < 1$ sein, während Vallier $\beta > 2$ angibt. Die Kurve (57) ist also jedenfalls am Anfang eine schlechte Annäherung. Ist so oder besser empirisch (Heydenreich) die normierte Druck–Zeit-Kurve, also die Funktion $\ddot{\sigma}$ von τ gefunden, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \int_0^\tau \ddot{\sigma}\,d\tau = \frac{1}{p_*\,t_*}\int_0^t p\,dt = \frac{m}{q\,p_*\,t_*}\int_0^t \ddot{s}\,dt = \frac{m}{q\,p_*\,t_*}\,v \\ &\text{und} \\ \sigma &= \int_0^\tau\!\!\int_0^\tau \ddot{\sigma}\,d\tau\,d\tau = \frac{m}{q\,p_*\,t_*^2}\,s. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Also wird

$$\frac{v}{s}\,t_* = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma},$$

oder

$$\frac{v\,t}{s} = \frac{\dot{\sigma}\,\tau}{\sigma} \tag{59}$$

und

$$\frac{\frac{1}{2}\,\frac{m\,v^2}{q\,s}}{p_*} = \frac{1}{2}\,\frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma}\,.$$

Die Größe $\frac{1}{2}\,m\,v^2/s = \mathsf{T}/s$ ist die „mittlere Triebkraft" zur Zeit t, die Größe $\mathsf{T}/q\,s$ der „mittlere Druck", ihr Verhältnis zu p_* ist der normierte mittlere Druck zur Zeit t. Seinen Wert an der Mündung bezeichnet Vallier mit $1/\gamma$.

Ist ein Quadrupel zusammengehöriger Werte für p, v, s, t beobachtet, z. B. an der Mündung, so kann man aus den Vallierschen oder Heydenreichschen Tabellen der Funktionen $\ddot{\sigma}$, $\dot{\sigma}$, σ, $\frac{1}{2}\,\dot{\sigma}^2/\sigma$, $\dot{\sigma}\,\tau/\sigma$ der zwei Variablen τ, β den Wert von β entnehmen. Es müssen nämlich die Spalten für

$$\ddot{\sigma}\,,\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma}\,,\qquad \frac{\dot{\sigma}\,\tau}{\sigma}$$

in derselben Zeile nach (56), (59) die beobachteten Werte von

$$\frac{p}{p_*}\,,\qquad \frac{\mathsf{T}:s}{q\,p_*}\,,\qquad \frac{v\,t}{s}$$

enthalten. $\frac{s}{t}$ ist die mittlere Geschwindigkeit zur Zeit t, $v:\frac{s}{t}$ eine normierte Geschwindigkeit.

Hat man keine Beobachtung, so empfiehlt Vallier die empirische Formel

$$\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\gamma - 1}\,,$$

die aber für sehr milde Pulver versagt.

Dem Verfahren liegt die Annahme zugrunde, daß zwischen den normierten Variablen $\ddot{\sigma}$ und τ eine nur von einem Parameter (β) abhängige Beziehung besteht, d. h. daß die normierte Druck-Zeit-Kurve durch ihre Gipfel-Krümmung bestimmt ist. Die empirischen Tabellen von Heydenreich bestätigen die annähernde Richtigkeit derselben. Die Beziehung (57) kann nur als eine angenäherte Darstellung dieser Beziehung gelten. Dasselbe gilt von der v. Zedlitzschen Annahme einer Beziehung der Form $\frac{1}{v} = a + b\,s^{-n}$, die sich aber den Heydenreichschen Tabellen besser anschmiegt*), da sie mehr Parameter enthält. Die Tabellen selbst sind das Wesentlichste, Annäherung durch irgendwelche Formeln ist von untergeordneter Bedeutung. Für den Exponenten n gibt v. Zedlitz die empirische Formel:

$$n = 10^{0{,}0767 - 2}\left(\frac{\Gamma}{p_*\,s_{\text{münd.}}}\right)^{1/3}\frac{\mathsf{E}^{5/4}\,\text{Kal.}^{11/6}}{G}\,.$$

*) Artilleristische Monatshefte 1910, S. 157.

Der gesamte Geschoßweg im Rohr, $s_{\text{münd.}}$, ist in mm, der Höchstdruck p_* in kg/cm², das Kaliber in cm, die Energie E in Metertonnen, bezogen auf 1 kg Pulver, zu nehmen.

§ 90. Temperaturen und Rohrbeanspruchungen

Über die beim Schuß erzeugten Erhitzungen und Beanspruchungen des Rohres ist bisher wenig Sicheres bekannt. Die Temperaturen der Pulvergase ergeben sich aus Druck und Volumen angenähert nach der van der Waalsschen Gleichung*). Die Beanspruchung eines Rohrteiles im Abstand K Halbkaliber von der Seelenachse ist $\frac{3}{1+2\mathsf{K}}$ proportional. Die äußeren Schichten, etwa von $\mathsf{K} = 1{,}5$ ab, werden deshalb zu wenig ausgenutzt. Darum geht man, wenn es auf hohe Drucke ankommt, zu Mantelrohren über: jeder Mantel, heiß auf den nächstinneren aufgezogen, steht nach Erkalten unter einer Temperaturspannung. Die Mäntel sind so zu dimensionieren, daß sie möglichst gleichmäßig beansprucht werden**). Bei milden Pulvern kann, gegenüber scharfen, die Beanspruchung fast auf die Hälfte sinken, während, wenigstens in langen Rohren, dieselbe Mündungsgeschwindigkeit erzielt werden kann.

Sechzehntes Kapitel

Ballistische Wahrscheinlichkeitsrechnung

§ 91. Abweichungen oder Fehler

Eine Anzahl Schüsse, unter gleichen Anfangsbedingungen abgegeben, werden den theoretischen Zielpunkt P^0 nicht treffen, sondern die Aufschläge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ werden sich um denselben herum gruppieren. Und zwar werden in der Nähe von P^0 mehr Aufschläge liegen, als in weiterer Entfernung. Nach welchem Gesetze das stattfindet, lehrt das Gaußsche Fehlergesetz, das wir weiter unten aussprechen und in § 94 beweisen werden.

Die Abweichungen der Schüsse P_i $(i = 1, \ldots, n)$ von P^0 rühren davon her, daß erstens kleine Unregelmäßigkeiten in den Anfangsbedingungen auftreten, daß zweitens die Geschosse etwas verschieden sind und in ihren Bahnen verschieden durch Luft und Schwerkraft beeinflußt werden. Über die Trennung dieser Einflüsse siehe weiter unten.

Man muß Seitenabweichungen Δy^0 und in horizontalem Gelände Längenabweichungen Δx^0, auf einer vertikalen Scheibe Höhenabweichungen Δz^0

*) S. z. B. Enzyklopädie der math. Wissenschaften V, 1, S. 669.

**) Kaiser, Geschützrohre. Wien 1892.

unterscheiden. Um uns von diesen speziellen Annahmen unabhängig zu machen, und um den Einfluß von geneigtem und unebenem Gelände auszuschalten, denken wir uns zu jedem Schuß P_i diejenigen Änderungen der Seitenrichtung ξ_i und der Höhenrichtung η_i berechnet, die ihm theoretisch entsprechen. Also bestimmen sich ξ_i und η_i aus [vgl. § 43 (11)]

$$\xi_i = \frac{\varDelta y^0}{O P^0}, \quad \frac{\varDelta x^0}{x^0} = (\operatorname{ctg} |\omega^0| - \operatorname{tg} \omega_0)\, \eta_i . \tag{1}$$

Wir nennen ξ_i, η_i die „normierten" Abweichungen (Fehler). Die Größen ξ_i, η_i repräsentieren also die Abweichungen der Schußbahn an Stelle der Abweichungen der Aufschläge P_i, die noch von der Form des Geländes abhängen.

Das Gaußsche Fehlergesetz besagt nun: Bei einer hinreichend großen Anzahl n von Schüssen ist die Anzahl der Schüsse mit einer Seitenabweichung zwischen ξ und $\xi + \varDelta \xi$ gleich

$$n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \xi^2}\, \varDelta \xi . \tag{2}$$

Das bedeutet also, daß die Anzahl erstens der Größe des kleinen Intervalls $\varDelta \xi$ proportional ist, und daß sie zweitens mit wachsendem ξ sehr stark abnimmt, nämlich wie die Exponentialfunktion $e^{-h^2 \xi^2}$ (Abb. 51). Dieses Abnehmen der Anzahl mit der Größe der Abweichungen wird um so stärker sein, je größer h ist. Bei einem sehr präzisen Schießen, wo also die Aufschläge sich dicht um den Zielpunkt P^0 lagern, wird h groß sein: h ist also eine von der Präzision des Schießens abhängige Konstante, das Präzisionsmaß für Seitenrichtung. Ebenso ist

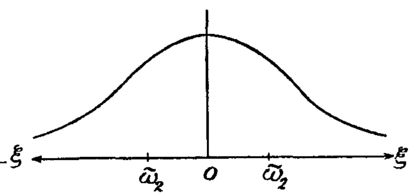

Abb. 51

$$n \cdot \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2 \eta^2}\, \varDelta \eta \tag{3}$$

die Anzahl der Höhenabweichungen zwischen η und $\eta + \varDelta \eta$; k ist das Präzisionsmaß für Höhenrichtung. Aus den Anzahlen (2) und (3) erhält man

$$n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \xi^2}\, \varDelta \xi \cdot \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2 \eta^2}\, \varDelta \eta = n \cdot \frac{h k}{\pi}\, e^{-h^2 \xi^2 - k^2 \eta^2} \cdot \varDelta \xi \cdot \varDelta \eta \tag{4}$$

als Anzahl der Schüsse, die eine Seitenabweichung zwischen ξ und $\xi + \varDelta \xi$ und zugleich eine Höhenabweichung zwischen η und $\eta + \varDelta \eta$ haben.

§ 92. Abzählung

Denken wir uns in einem kleinen Abstand Eins vom Anfangspunkt der Schußbahn senkrecht zur Anfangstangente eine Ebene, so werden die zu den Punkten P_i gehörigen Schußbahnen mit ihren Anfangstangenten Punkte Π_i in dieser Ebene bestimmen, die wir die ballistischen Bildpunkte nennen wollen. ξ_i, η_i sind die rechtwinkligen Koordinaten von Π_i, Π^0 der Anfangspunkt. Auf diese Weise denken wir uns zu einem irgendwie begrenzten Ziel das ballistische Abbild in der ξ-η-Ebene hergestellt. Dann ist es leicht, die Anzahl der Schüsse anzugeben die auf eine beliebig begrenzte, ebene oder unebene Zielscheibe fallen. Sie ergibt sich durch Summation von (4) über das ballistische Abbild, ist also gleich

$$n \cdot \frac{h\,k}{\pi} \cdot \iint e^{-h^2 \xi^2 - k^2 \eta^2}\, d\xi\, d\eta\,. \tag{5}$$

Diese Formel enthält (2), (3), (4) als Spezialfälle in sich. Denn integriert man von ξ bis $\xi + \Delta\xi$, und von η bis $\eta + \Delta\eta$, so erhält man (4). Integriert man von ξ bis $\xi + \Delta\xi$, und von $\eta = -\infty$ bis $\eta = +\infty$, so erhält man

$$n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \xi^2} \cdot \Delta\xi \cdot \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 \eta^2}\, d\eta\,;$$

das stimmt aber mit (2) überein, denn es ist

$$n \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 \eta^2}\, d\eta = n\,, \tag{6}$$

da nach (3) die Zahl links die Anzahl der Abweichungen η zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bedeutet, also gleich n ist. Integriert man von η bis $\eta + \Delta\eta$ und von $\xi = -\infty$ bis $+\infty$, so erhält man ebenso (3).

Integriert man über ein Rechteck von $h\,\xi = 0$ bis $h\,\xi = \Xi$, und von $k\,\eta = 0$ bis $k\,\eta = H$, so erhält man

$$n \cdot \tfrac{1}{2}\, \varphi(\Xi) \cdot \tfrac{1}{2}\, \varphi(H)\,, \tag{7}$$

wobei die Funktion $\varphi(t)$ definiert wird durch

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\, \varphi(t)\,. \tag{8}$$

Für die Funktion $\varphi(t)$ sind Tabellen berechnet worden*).

Bezeichnet man die Anzahl (7), die zum Punkte $\Pi = \left(\frac{\Xi}{h}, \frac{H}{k}\right)$ gehört, kurz mit $[\Xi\, H]$ oder mit $[\Pi]$, so erhält man auch die Anzahl in einem

*) S. z. B. Cranz, Ballistik Bd. 1 (1925) S. 675.

beliebigen Rechteck mit den Ecken (Ξ, H), (Ξ, H'), (Ξ', H), (Ξ', H'), nämlich

$$|[\Xi\, H] - [\Xi'\, H] + [\Xi'\, H'] - [\Xi\, H']|\,. \tag{9}$$

Allgemeiner, das Zielgebiet sei ein Polygon $\Pi\,\Pi'\,\Pi''\,\Pi'''\,\ldots$, dessen Seiten abwechselnd der ξ- und der η-Achse parallel seien, dann liegen in dem Zielgebiet (Abb. 52):

$$|[\Pi] - [\Pi'] + [\Pi''] - [\Pi'''] + \cdots| \tag{10}$$

Schüsse. Das ergibt sich, wenn man das Gebiet durch Parallelen zur ξ-Achse (oder zur η-Achse) in Rechtecke zerlegt und auf jedes den Satz (9) anwendet.

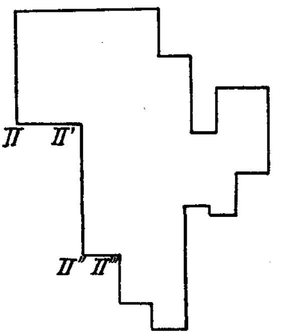

Abb. 52

Ein krummlinig begrenztes Gebiet kann man durch ein solches Polygon beliebig gut approximieren und danach die in dasselbe fallende Schußzahl nach (10) berechnen. Man kann Π, Π'', Π^{IV}, ... auf der Begrenzung, und von Π', Π''', ... erstens keinen im Äußeren, zweitens keinen im Inneren wählen, dann erhält man durch (10) erstens eine untere, zweitens eine obere Grenze für die gesuchte Anzahl, und damit ein Urteil über die Genauigkeit der Annäherung. Zur Verminderung der Rechnung wird man in Hinblick auf (7) die Punkte so wählen, daß jedes $\varphi(\Xi_i)$ und jedes $\varphi(H_i)$ möglichst oft zur Verwendung kommt. Außerdem lassen sich Doppelintegrale wie (5): $\frac{n}{\pi}\iint e^{-\Xi^2-H^2}\,d\Xi\,dH$, deren Integrand bloß von der Entfernung $\sqrt{\Xi^2+H^2}$ abhängt, durch hierfür eingerichtete Polarplanimeter ermitteln*).

§ 93. Wahrscheinlichkeiten

Wir haben bisher nur von Schußanzahlen gesprochen, weil diese das primär Gegebene sind. Wir führen jetzt die „Wahrscheinlichkeit" ein. Dieses Wort findet sich längst in der Sprache, ehe Mathematiker und Philosophen sich damit befaßt haben. Wir wissen, was die Worte bedeuten: „Es ist wahrscheinlich, daß ..." Ich betrachte daher „Wahrscheinlichkeit" als Grundvorstellung ebenso wie Gewißheit, Unsicherheit u. dgl. Wir haben in dieser Beziehung eine zweite Grundvorstellung, die wir dahin ausdrücken wollen, daß wir sagen: Wahrscheinlichkeiten sind „vergleichbar". Das heißt, es hat einen Sinn und wir wissen, welchen Sinn es hat, zu sagen: „Dies ist wahrscheinlicher (oder ebenso wahrscheinlich) als jenes". Damit ist natürlich nicht gesagt, daß wir imstande sind, stets diese Entscheidung zu treffen.

*) S. z. B. Enz. d. math. Wiss. II_1, 1. Hälfte S. 131.

Die Vergleichbarkeit besteht also in der Anwendbarkeit der Worte und Zeichen $=$, $>$, $<$.

Daß die Vergleichbarkeit noch nicht die Meßbarkeit nach sich zieht, kann man sich z. B. klarmachen an der Härteskala der Mineralien: Man kann wohl sagen, Diamant ist härter als Quarz, aber man kann nicht sagen, er ist so und so viel mal so hart.

Wir nennen ein Ereignis A von einem Ereignis B „unabhängig", wenn nach dem Eintreten von B die Wahrscheinlichkeit von A dieselbe ist wie vorher. Wenn nichts anderes gesagt ist, werden im folgenden Ereignisse als unabhängig voneinander angesehen.

Wir legen den Wahrscheinlichkeiten zunächst die Eigenschaft der „Addierbarkeit" bei: Die Gesamtwahrscheinlichkeit, daß entweder das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, ist die Wahrscheinlichkeit von A und die von B zusammengenommen. Wählt man die Ereignisse A und B gleichwahrscheinlich, so bekommt das Ereignis „A oder B" die doppelte Wahrscheinlichkeit. Sind A, B, C gleichwahrscheinlich, so hat das Ereignis „A oder B oder C" die dreifache wie A, usw. So kommt man zu dem Begriff der Wahrscheinlichkeit, die das k-fache einer anderen ist, für jede natürliche Zahl k. Es hat jetzt einen Sinn zu sagen: eine Wahrscheinlichkeit ist k-mal so groß wie eine andere. Dies ist also lediglich eine Folge der vorausgesetzten Addierbarkeit.

Unter Meßbarkeit versteht man nunmehr das Bestehen des Archimedischen Axioms, das im vorliegenden Fall lautet: Für beliebige Ereignisse A und B gibt es stets ein Vielfaches der Wahrscheinlichkeit von A, das größer ist als die Wahrscheinlichkeit von B. Man erkennt, daß, um dies auszusprechen, die Vergleichbarkeit und die Addierbarkeit bestehen müssen.

Das Archimedische Axiom besteht für Wahrscheinlichkeiten meistens, aber nicht immer. Z. B. sind die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige ganze Zahl prim ist, und die Wahrscheinlichkeit, daß sie gerade ist, nicht miteinander meßbar; aber die erste ist meßbar mit der Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige ganze Zahl das Doppelte einer Primzahl ist.

Nach Einführung der Meßbarkeit müssen wir noch eine „Einheits"-wahrscheinlichkeit wählen, an der alle anderen gemessen werden können. Als solche wählen wir die „Gewißheit", d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das gewiß ist. Dieser Wahrscheinlichkeit legen wir willkürlich die Zahl Eins bei.

Betrachten wir jetzt ein Ereignis A von n gleichwahrscheinlichen und es sei gewiß, daß von diesen n eins eintritt. Z. B. ist es gewiß, mit einem Würfel eine der Zahlen 1 bis 6 zu werfen, und diese sechs Ereignisse sind, wenn nichts anderes bekannt ist, gleichwahrscheinlich. Ist w die Wahrscheinlichkeit eines dieser n Ereignisse, so ist wegen der Addierbarkeit $n \cdot w$ die Wahrscheinlichkeit, daß eins der n eintritt. Und da dies die Gewißheit sein soll, so folgt $n\,w = 1$, also $w = 1/n$.

Greifen wir unter den n gleichwahrscheinlichen Ereignissen i heraus, z. B. beim Würfel die drei Ereignisse, eine gerade Anzahl zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser i Ereignisse eintritt, ist wegen der Addierbarkeit gleich $i \cdot w$, also gleich i/n. D. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von n gleichwahrscheinlichen Ereignissen eins aus i bestimmten eintritt, ist gleich i/n, das Verhältnis der Zahl i der günstigen Fälle (Treffer) zu der Zahl n der möglichen Fälle.

Dieses Verhältnis i/n wird oft als die Definition der Wahrscheinlichkeit hingestellt. Es ist so wenig die Definition derselben, wie $m\,g$ die Definition des Gewichtes ist. Es ist vielmehr das Maß der Wahrscheinlichkeit. Um aber dies Maß aufzustellen, muß man den Begriff der Wahrscheinlichkeit vorher haben und die Meßbarkeit etwa wie im vorstehenden begründen. Nachdem aber dieses Maß i/n gewonnen ist, kann man es durch Grenzübergänge auf Fälle ausdehnen, in denen n und i nicht mehr endlich sind. Z. B. ist $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig auf dieser Seite gewählter Punkt im oberen Drittel liegt, und $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebig gewählte ganze Zahl gerade ist.

Die unter (2), (3), (4), (5), (7), (9), (10) angegebenen Anzahlen bedeuten jetzt, durch die Schußzahl n dividiert, „Treff-Wahrscheinlichkeiten", z. B. bedeutet nach (7)

$$\varphi\,(h\,\xi) \cdot \varphi\,(k\,\eta)$$

die Wahrscheinlichkeit, ein Rechteck mit den Ecken $(\pm\,\xi,\ \pm\,\eta)$ zu treffen.

Ist a die Wahrscheinlichkeit, daß A eintritt, und b die, daß Nicht-A eintritt, so ist $a + b$ die Wahrscheinlichkeit, daß A oder Nicht-A eintritt, also ist $a + b = 1$, $b = 1 - a$.

Ebenso seien a', $b' = 1 - a'$ die Wahrscheinlichkeiten für A' und Nicht-A'.

Wie groß ist die „zusammengesetzte" Wahrscheinlichkeit, daß A und A' eintritt? Ist $a = i/n$, $a' = i'/n'$, also $n\,n'$ die Zahl der möglichen, $i\,i'$ die Zahl der günstigen Ereigniskombinationen, so ist $\frac{i\,i'}{n\,n'} = a\,a'$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „A und A'". Ebenso ist $a\,b'$ die Wahrscheinlichkeit von „A und Nicht-A'"; $b\,a'$ die von „Nicht-A und A'"; $b\,b'$ die von „Nicht-A und Nicht-A'". In der Tat ist

$$a\,a' + a\,b' + b\,a' + b\,b' = (a + b)\,(a' + b') = 1,$$

wie es sein muß, da von den vier Ereignissen „A und A'", „A und Nicht-A'", „Nicht-A und A'", „Nicht-A und Nicht-A'" eins sicher eintritt.

Wir fassen zur Abkürzung die Ereignisse A und Nicht-A zusammen in εA $(\varepsilon = \pm 1)$, und ihre Wahrscheinlichkeiten in $a\,(\varepsilon)$. Dann ist

$$a\,(\varepsilon) \cdot a'\,(\varepsilon') \cdot a''\,(\varepsilon'') \cdots a'^{N-1)}\,(\varepsilon^{(N-1)})$$

die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses „εA und $\varepsilon' A'$ und $\varepsilon'' A''$ ... und $\varepsilon^{(N-1)}\,A^{(N-1)}$".

Für $\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1,\ \ldots,\ \varepsilon^{(N-1)} = \pm 1$ erhält man 2^N solcher zusammengesetzter Ereignisse, von denen eins gewiß eintritt. Die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten $\sum\limits_{\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1 \ldots} a\,a' \ldots$ ist gleich

$$(a + b)\,(a' + b') \ldots (a^{(N-1)} + b^{(N-1)}),$$

also in der Tat gleich Eins.

Handelt es sich um N gleichwahrscheinliche Ereignisse,

$$a = a' = \ldots = a^{(N-1)},$$

z. B. um die N-malige Wiederholung desselben Versuches, dessen Gelingen (Mißlingen) das Ereignis A (Nicht-A) ist, so geben die Glieder der Entwicklung $(a + b)^N$, also $a^\alpha\, b^\beta$, die Wahrscheinlichkeit, daß A α-mal, Nicht-A β-mal eintritt, wo $\varkappa + \beta = N$ ist. $a^\alpha\, b^\beta$ ist diese Wahrscheinlichkeit bei einer bestimmten Reihenfolge des A und Nicht-A. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendeins dieser $\dfrac{N!}{\alpha!\,\beta!}$ Ereignisse „α-mal A, β-mal Nicht-A“ eintritt, ist die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten, also

$$\frac{N!}{\alpha!\,\beta!}\, a^\alpha\, b^\beta\,. \tag{11}$$

Dasjenige dieser zusammengesetzten Ereignisse hat die größte Wahrscheinlichkeit, für das (11) am größten ist. Soll (11) größer sein als der vorhergehende und als der folgende Ausdruck, so müssen $\dfrac{\beta + 1}{\alpha} \cdot \dfrac{a}{b}$ und $\dfrac{\alpha + 1}{\beta} \cdot \dfrac{b}{a} \geqq 1$ sein; d. h. $b\,\alpha - a\,\beta = N\,a - \alpha = N\,b - \beta$ muß zwischen a und $-b$ liegen, also seinen absolut kleinsten Wert haben. α und β sind also die nächsten ganzen Zahlen an $N \cdot a$ und $N \cdot b$. Unter einer großen Zahl N von Versuchen ist also das $N \cdot a$-malige Eintreten von A, bzw. das $N \cdot b$-malige Eintreten von Nicht-A am wahrscheinlichsten (Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen).

Nimmt man für große Zahlen näherungsweise $\alpha = N\,a,\ \beta = N\,b$, und nach Stirling

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}\,, \tag{12}$$

so ergibt sich aus (11) für die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis A unter N Versuchen gerade $N \cdot a$-mal eintritt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N\,a\,b}}\,. \tag{13}$$

§ 94. Das Fehlergesetz

Bei einer Messung sei die kleinste in Betracht kommende Größe δ (mm, mg, sec oder dgl.), der kleinste Fehler $\pm\,\delta/2$. Es mögen $2\,N$ Fehlerquellen wirken, deren jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Fehler

$+\delta/2$ wie $-\delta/2$ ergeben kann. Der zusammengesetzte Fehler liegt also zwischen $+N\delta$ und $-N\delta$. Ein Fehler von der Größe $i\delta$ ($-i\delta$) kommt zustande aus $\alpha = N + i$ Elementarfehlern der Größe $+\delta/2$ ($-\delta/2$) und $\beta = N - i$ Elementarfehlern der Größe $-\delta/2$ ($+\delta/2$). Ein Fehler vom absoluten Betrage $i\delta$ hat also [nach (11)], da $a = b = \frac{1}{2}$ ist, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{(2N)!}{(N+i)!\,(N-i)!}\cdot\frac{1}{2^{2N}}\,. \tag{14}$$

Ist c das Maximum dieses Betrages, so ist nach (13)

$$c = \frac{(2N)!}{N!^2}\cdot\frac{1}{2^{2N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N}}\,. \tag{15}$$

Um die Stirlingsche Formel nicht vorauszusetzen, wollen wir (15) direkt beweisen. Es ist:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2N}{2N-1}\cdot 2N = \frac{(2\cdot4\cdot6\ldots2N)^2}{(1\cdot3\cdot5\ldots(2N-1))^2}$$

$$= \frac{N!^2\cdot2^{2N}}{\left(\dfrac{(2N)!}{2\cdot4\cdot6\ldots2N}\right)^2} = \frac{N!^4\,2^{4N}}{(2N)!^2} = \frac{1}{c^2}\,.$$

Anderseits konvergiert bekanntlich das Produkt $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2N}{2N-1}$ gegen den Wert $\frac{1}{2}\pi$ (Wallis). Also ergibt sich $\frac{1}{2}\pi\cdot2N = 1/c^2$, woraus (15) folgt.

Um nun die Wahrscheinlichkeit (14) des Fehlers $i\delta$ als Funktion von $i\delta$ darzustellen, setzen wir sie zunächst in die Form

$$\frac{N!^2}{(N+i)!\,(N-i)!}\,c = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-i+1)}{(N+1)(N+2)\ldots(N+i)}\,c\,. \tag{16}$$

Die logarithmische Änderung dieses Ausdrucks (16), wenn i um 1, also $i\delta$ um $\Delta i\delta = \delta$ wächst, ist bis auf Glieder höherer Ordnung in $1/N$:

$$\lg\frac{N-i}{N+i+1} = \lg\frac{1-\dfrac{i}{N}}{1+\dfrac{i+1}{N}} = -\frac{2i}{N} = -\frac{2i\delta\cdot\Delta i\delta}{N\delta^2} = -\frac{\Delta(i\delta)^2}{N\delta^2}\,.$$

Daraus folgt durch exponentielle Integration für (16) der Wert

$$c\cdot e^{-\frac{(i\delta)^2}{N\delta^2}}\,,$$

wobei der Wert der multiplikativen Integrationskonstanten c sich für $i\delta = 0$ ergibt; c hat also den in (15) angegebenen Wert. Setzt man noch $i\delta = t$, $\dfrac{1}{N\delta^2} = h^2$, so erhält man

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2t^2}\,\Delta t \tag{17}$$

als die Wahrscheinlichkeit des Fehlers t. Das ist das Gaußsche Fehlergesetz. Ist nun Δi nicht Eins, sondern eine ganze Zahl, die aber, wie auch i, klein ist gegen N, so bedeutet (17) die gesamte Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $i\,\delta = t$ einen der Werte $(i+1)\,\delta$, $(i+2)\,\delta, \ldots$ $(i+\Delta i)\,\delta$ hat, daß er also zwischen t und $t+\Delta t$ liegt. Von unstetigen Größen geht man nun in bekannter Weise durch einen Grenzübergang zu stetigen über. Wir lassen δ klein, N und i groß werden, ohne daß $N\,\delta^2 = 1/h^2$,, $\delta = t$ ihre Werte ändern. Dann ergibt (17) das Gaußsche Fehlergesetz.

§ 95. Präzisionsmaß. Fehlermittel

Die Ermittelung von Treff-Wahrscheinlichkeiten nach (5) setzte die Kenntnis der Präzisionsmaße h und k voraus. Diese müssen empirisch ermittelt, d. h. erschossen werden.

Dazu werden in verschiedener Weise aus den Fehlern $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (bzw. $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$) Mittel gebildet und zu den Präzisionsmaßen h (bzw. k) in Beziehung gesetzt. Je größer das Präzisionsmaß, je mehr liegen die Schüsse beisammen, je kleiner ist irgendein Mittel.

Naturgemäß sind diese Mittel nur aus den absoluten Beträgen $|\xi_1|$, $|\xi_2|, \ldots, |\xi_n|$ zu bilden.

Ist $S(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|)$ eine homogene symmetrische Funktion, so wird durch die Gleichung

$$S(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|) = S(\mu, \mu, \ldots, \mu)$$

ein Mittel μ definiert. Die wichtigsten, durch die sich alle anderen Fehlermittel ausdrücken lassen, sind die Potenzmittel μ_r, definiert durch:

$$\sum_i |\xi_i|^r = n \cdot \mu_r^r\,. \tag{18}$$

In der Summe kommt jeder Fehler so oft vor, wie durch das Fehlergesetz (2) angegeben wird. Also ist

$$\mu_r^r = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^r e^{-h^2\xi^2} d\xi = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \xi^r e^{-h^2\xi^2} d\xi\,. \tag{19}$$

Setzt man $h^2\xi^2 = t$, so wird

$$\mu_r^r = \frac{1}{h^r\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} t^{\frac{r-1}{2}} e^{-t^r} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{h^r \cdot \sqrt{\pi}}\,.$$

Es ist also:

$$\mu_r \cdot h = \sqrt[r]{\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}}\,. \tag{20}$$

Da die Werte der Eulerschen Γ-Funktion bekannt sind, kann demnach h aus jedem der Mittel μ_r berechnet werden. Z. B. wird:

$$\mu_1 \cdot h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad \mu_2 \cdot h = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{usw.} \tag{21}$$

μ_1 heißt der „durchschnittliche", μ_2 der „mittlere" Fehler.

Wenn man den Wert von μ_r, statt genau aus (19), angenähert nimmt aus (18), so begeht man einen Fehler. Der mittlere Fehler dieser Ermittlung beträgt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\mu_{2r}^{2r}}{\mu_r^{2r}} - 1}$$

und ergibt sich für	$r = 1$	2	3	...
bzw. gleich $\frac{1}{\sqrt{n}}$ mal	0,754...	0,705...	0,736...	....

Also ist die Bestimmung von μ_2, also auch die von h aus μ_2 die genaueste, wenigstens bei ganzen r. Besonders einfach ist die Berechnung von μ_1.

Wir hatten die Fehler μ_r berechnet aus den Seitenabweichungen ξ_i der Punkte Π_i von dem „wahren" Treffpunkt Π^0. Diese Fehler ξ_i heißen daher die „wahren" Fehler. Die wahren Fehler sind aber nicht bekannt, da der wahre Treffpunkt Π^0 nicht bekannt ist. Wir nehmen statt dessen den Punkt Π_0, den „Mittelpunkt der Fehler", mit den Koordinaten:

$$\xi_0 = \frac{\sum \xi_i}{n}, \qquad \eta_0 = \frac{\sum \eta_i}{n}, \tag{22}$$

dessen Lage bekanntlich vom Koordinatensystem unabhängig ist. Wir nennen Π_0 den „scheinbaren" Treffpunkt und die Fehler gegen ihn die „scheinbaren", die mit ξ_i', η_i' bezeichnet seien. Also ist

$$\xi_i' = \xi_i - \xi_0, \qquad \eta_i' = \eta_i - \eta_0, \tag{23}$$

$$\sum \xi_i' = 0, \qquad \sum \eta_i' = 0. \tag{24}$$

Da die Fehler ξ' vermöge (23) bekannte Funktionen der Fehler ξ sind, muß sich auch der mittlere Fehler μ_2' der ξ' berechnen lassen. Zu dem Zweck beachten wir folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum \xi_i'^2 + 2 \sum_{i<j} \xi_i' \xi_j' = (\sum \xi_i')^2 = 0, \\
\text{also}\quad &\sum_{i<j} (\xi_i' - \xi_j')^2 = n \sum \xi_i'^2, \\
\text{also}\quad &\sum_{i<j} (\xi_i - \xi_j)^2 = \sum (\xi_i' - \xi_j')^2 = n \sum \xi_i'^2 \\
\text{und}\quad &\sum_{i<j} (\xi_i - \xi_j)^2 = (n-1) \sum \xi_i^2 - \sum \xi_i \xi_j.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Unter Vernachlässigung der jedenfalls kleinen Summe $\sum \xi_i \xi_j$ ergeben die beiden letzten Gleichungen:

$$n \cdot \mu'^2_2 = (n-1) \cdot \mu^2_2 \,, \tag{26}$$

oder

$$\mu^2_2 = \frac{\sum \xi_i'^2}{n-1} \tag{27}$$

zur Berechnung des mittleren aus den scheinbaren Fehlern.

Da nach (26) der mittlere Fehler der ξ_i' sich zu dem der ξ_i wie $\sqrt{n-1} : \sqrt{n}$ verhält, verhalten sich nach (20) die Präzisionsmaße umgekehrt und die durchschnittlichen Fehler ebenso. Also ist

$$\frac{\sum |\xi_i|}{n} = \frac{\sum |\xi_i'|}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{28}$$

die Formel zur Berechnung des durchschnittlichen Fehlers aus den scheinbaren.

Betrachtet man die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Differenzen $\xi_i' - \xi_j'$ als die beobachteten Größen, die eigentlich Null sein müßten, so ist nach (25) deren mittlerer Fehler

$$\sqrt{\frac{\sum (\xi_i' - \xi_j')^2}{\frac{1}{2} n (n-1)}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\sum \xi_i'^2}{n-1}} = \sqrt{2}\, \mu_2 = \frac{1}{h} \,, \tag{29}$$

also gilt auch für die durchschnittlichen Fehler

$$\frac{\sum |\xi_i|}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sum |\xi_i' - \xi_j'|}{\frac{1}{2} n (n-1)} \tag{30}$$

zur Berechnung aus den Differenzen $|\xi_i' - \xi_j'|$.

Werden die Differenzen $|\xi_i' - \xi_j'|$ nicht alle, sondern z. B. nur die $n-1$ sukzessiven $|\xi_i' - \xi_{i+1}'|$ genommen, so ist der Nenner in (30) entsprechend zu verkleinern.

F e h l e r f o r t p f l a n z u n g. Haben die beobachteten Größen x, y die scheinbaren Fehler ξ, η, so hat eine beliebige Funktion $\mathfrak{f}(x, y)$ den Fehler

$$d\mathfrak{f} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \eta \,. \tag{31}$$

Die Fehler werden also wie kleine Größen (Differentiale) behandelt. Liegen für ξ die Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vor, für η die Werte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, dann wird das $m\,n$-fache Quadrat des mittleren Fehlers von $\mathfrak{f}$ nach (18) und (24) gleich

$$\sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \xi_i + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \eta_j \right)^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right)^2 \cdot m \sum \xi_i^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \right)^2 n \sum \eta_j^2 \,, \tag{32}$$

also das Quadrat des mittleren Fehlers von $\mathfrak{f}$ gleich

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\sum \xi_i^2}{n} + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{\sum \eta_j^2}{m} \,. \tag{33}$$

Entsprechende Formeln gelten, wenn $\mathfrak{f}$ von mehr als zwei Größen abhängt.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit gleicher Genauigkeit beobachtete Werte einer und derselben Größe, also ihr mittlerer Fehler derselbe, μ_2, so ist der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels der n Beobachtungen nach (33) gleich

$$\sqrt{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \mu_2^2} = \frac{\mu_2}{\sqrt{n}}. \tag{34}$$

Also: Die Präzision des arithmetischen Mittels wächst mit der Quadratwurzel aus der Beobachtungsanzahl.

§ 96. Fehlerwahrscheinlichkeiten. Höchstfehler. Ausreißer

Es sei $-\tilde{\omega}_r \ldots +\tilde{\omega}_r$ ein Intervall, außerhalb dessen nur $1/r$ der sämtlichen n Fehler liegen, also $1/r$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler absolut größer ist als $\tilde{\omega}_r$. Insbesondere ist $\tilde{\omega}_2$ die Grenze, ober- und unterhalb deren die Hälfte der Fehler liegt oder ober- und unterhalb deren ein Fehler mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ liegt. $\tilde{\omega}_2$ heißt der „wahrscheinliche" ($50^0/_0$ige) Fehler.

Die Bestimmung von $\tilde{\omega}_r$ durch Abzählung der Felder nach der Größe ist natürlich nur ungenau. Sind die Fehler genau nach dem Fehlergesetz verteilt, so ist:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{\omega}_r}^{\infty} e^{-h^2 \xi^2} d\xi = \frac{1}{r},$$

d. h.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tilde{\omega}_r h}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{r}. \tag{35}$$

Für $r = 2$ erhält man

$$\tilde{\omega}_2 h = 0{,}4769363\ldots.$$

Bei bekanntem Präzisionsmaß läßt sich hieraus der wahrscheinliche Fehler berechnen.

Daß oberhalb $\tilde{\omega}_n$ noch ein Fehler liegt, hat die Wahrscheinlichkeit $1/n$. Dieses $\tilde{\omega}_n$ heißt der wahrscheinlichste Höchstfehler. Es gehört zu

$n =$	20	100	1000	10000
$\dfrac{\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_2} =$	2,89	3,83	5,03	5,77.

Als Ausreißer bezeichnet man Schüsse, deren Abweichungen (Fehler) entweder ein bestimmtes Vielfaches von $\tilde{\omega}_2$ übertreffen (Mazzuoli), oder deren Wahrscheinlichkeit unter einer bestimmten Grenze liegt (Chauvenet, Vallier, Heydenreich). Beide Bestimmungsarten sind gleichartig. Denn ist nach der ersten $A_n \cdot \tilde{\omega}_2$ die Ausreißergrenze, so bestimmte man $s\,n$ aus

$$\tilde{\omega}_{s\,n} = A_n \cdot \tilde{\omega}_2.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ausreißers ist also kleiner als $1/s\,n$. Chauvenet nimmt $\tilde{\omega}_{2n}$, Vallier $\tilde{\omega}_{n^2}$, Heydenreich $\tilde{\omega}_{2(n-1)}$ als Ausreißergrenze, also bzw. den Höchstfehler für $2\,n$, n^2, $2\,(n-1)$ Schüsse als Ausreißergrenze für n Schüsse.

§ 97. Streubreite, -tiefe, -zeit

Die Schußtafeln geben zu jeder Erhöhung die 50%ige Streubreite, d. h. das Intervall, innerhalb dessen 50% der Schüsse liegen, also das Doppelte der oben mit $\tilde{\omega}_2$ bezeichneten Größe. Ebenso wäre z. B. die 98%ige Streubreite das Doppelte der mit $\tilde{\omega}_{50}$ zu bezeichnenden Größe ($\doteq 3{,}5 \cdot \tilde{\omega}_2$); denn oberhalb $\tilde{\omega}_{50}$ liegen wahrscheinlich nur noch $\frac{1}{50} = 2\%$ der Schüsse, unterhalb also 98%. Diese Zahlen, wie $\tilde{\omega}_{50}$, sind von n unabhängig, stehen zu $\tilde{\omega}_2$ in einem festen Verhältnis und werden in den Schußtafeln in folgender Weise angegeben:

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
%	5,4	10,7	16,0	21,2	26,4	31,4	36,3	41,1	45,6	50,0
	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
%	58,2	65,5	71,9	77,5	82,2	89,5	94,1	96,9	98,5	99,3

	4,4	4,8	5,2	...
%	99,7	99,879	99,955	...

D. h. $5{,}4\%$ Schüsse haben eine Abweichung bis $0{,}1 \cdot \tilde{\omega}_2$ usw.

Wir erwähnten bereits, daß die Streuungen auf zwei Arten Ursachen zurückkommen, erstens auf die im Abschuß liegenden, zweitens auf die in der Schußbahn wirkenden.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt zunächst die seitliche Streubreite. Würden in der Schußbahn keine streuenden Ursachen mehr wirken, so würden die linearen Streuungen, wie sie beim Abschuß entstehen, sich in der Schußbahn proportional der Entfernung vergrößern; oder die als Winkel berechneten Streuungen würden konstant bleiben. Nach Abzug dieser Konstanten wachsen die von der Schußbahn herrührenden Streuungen exponentiell. Als Beispiel geben wir die Tabelle:

Entfernung x km	Streubreite m	Streubreite Teilstr.*)	$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} + 0{,}05$	Fehler
1	0,4	0,4	0,3462..	+ 0,05
2	1,1	0,55	$0{,}49\bar{4}$	+ 0,05
3	2,1	0,7	$0{,}71\bar{6}$	+ 0,01
4	3,8	0,95	1,05	— 0,10
5	7,3	1,46	1,55	— 0,09
6	13,7	2,283	2,30	— 0,02
7	24,4	3,4859	3,425	+ 0,06
8	42,6	5,325	5,1125	+ 0,21

*) Sechzehntel Zentesimalgrade.

Die genauere Formel statt $(\frac{3}{2})^{x-4} + 0{,}05$ wäre nach der Methode der kleinsten Quadratsummen zu ermitteln. Das hätte aber nur Zweck, wenn sich die Streuungen selbst methodisch einwandfrei erschießen lassen, wenn also z. B. nicht beim Schießen auf kürzere Entfernungen mit Rücksicht auf die Gefechtslage eine schnellere Schußfolge verlangt wird; oder wenn nicht beim Schießen auf weitere Entfernungen schlecht sichtbare Ziele genommen werden. Um solche Einflüsse, die von einem Schießen zum anderen wechseln, auszuschalten, wird man am besten dauernd nach einem und demselben festen Hilfsziel richten. Auf diese Weise wird es gelingen, die im Abschuß liegende Streuung von der in der Schußbahn wirkenden zu trennen.

Entsprechende Überlegungen gelten für die Längenstreuung oder Streutiefe. Um diese zunächst in Erhöhung umzurechnen, vergleicht man sie mit der schußtafelmäßigen Erhöhungsänderung für 100 m Entfernungsänderung. Die so normierten Streuungen bestehen aus einem Konstantgliede, das vom Abschuß herrührt, und einem auf der Schußbahn entstehenden exponentiellen Teil. Als Beispiel dient die folgende Tabelle:

Entfernung x km	Streutiefe m	Erhöhungsänderung für je 100 m alte Teilstriche*)	$A(x)$	$B(x)$	Diff.
1	16	3	26	1,42	
					0,24
2	17	4	46	1,66	
					0,23
3	20	5	78	1,89	
					0,27
4	28	6	146	2,16	
					0,28
5	40	7,5	278	2,44	
					0,27
6	57	9	491	2,71	
					0,23
7	74	12	866	2,94	
					0,34
8	91	21	1889	3,28	

$A(x)$ ist das Produkt der Zahlen der zweiten mit denen der dritten Spalte, vermindert um 22. Weiter ist $B(x) = \log A(x)$ gesetzt. In der fast konstanten Differenzenreihe der Logarithmen kommt das behauptete Gesetz zum Ausdruck.

Schließlich sind bei Geschossen mit Zeitzündern die Zünderstreuungen zu betrachten, infolge deren die Geschosse nicht genau in der theoretisch gewünschten Entfernung, sondern etwas früher oder später krepieren. Auch hier sind zwei Arten von Einflüssen zu unterscheiden. Erstens die am Anfang liegenden: der Geschoßzünder wird ungenau eingestellt

*) Sechzehntel Grade.

(Einstellfehler); aber selbst der scheinbar genau eingestellte Geschoßzünder ist doch ungenau eingestellt, weil sich die Einstellmarke nicht genau an der richtigen Stelle befindet (Indexfehler). Der Einstellfehler und der Indexfehler werden sich nicht trennen lassen; sie verursachen zusammen einen konstanten Betrag in der Streuung. Zweitens kommen die in der Schußbahn wirkenden Einflüsse zur Geltung: Diese rühren sowohl davon her, daß die Schußbahn nicht nur in ihrem geometrischen, sondern auch in ihrem zeitlichen Verlauf von Schuß zu Schuß etwas veränderlich ist, als auch davon, daß der Ablauf des Zeitzünders Veränderungen von Schuß zu Schuß unterworfen ist, bei Brennzündern vermutlich stärker als bei mechanischen Zündern. Auch die Ungleichmäßigkeiten der Teilungsskala, auf die eingestellt wird, sind hier einzurechnen. Eine Trennung dieser längs der Bahn wirkenden Einflüsse wird ebenfalls kaum möglich sein.

Die Zünderstreuungen werden in Längen angegeben. Um ihr Verhalten richtig beurteilen zu können, muß man sie in Zeit umrechnen. Einer Streulänge Δx^0 entspricht eine Streuzeit $\frac{\Delta x^0}{\dot{x}^0} = \frac{\Delta x^0}{v^0 \cos \omega^0}$. Danach ist beispielsweise folgende Tabelle berechnet.

x^0 km	Δx^0 m	v^0 m/sec	ω^0	Streuzeit
1	62	367	$1^0\,52',5$	0,169
2	50	312	$4^0\,45'$	0,161
3	49	280	$8^0\,45'$	0,177
4	51	256	$13^0\,41',25$	0,205
5	55	239	$19^0\,48',75$	0,244

Demnach wächst die Zünderstreuung in diesem Falle nur sehr allmählich von einem Werte, der nach dem ersten Kilometer etwa $\frac{1}{6}$ Sekunde beträgt, bis zu einem Werte, der nach weiteren 4 km etwa $\frac{1}{4}$ Sekunde beträgt. Die Einflüsse längs der Bahn machen also nur etwa $\frac{1}{16}$ sec/km aus, während die Anfangsstreuung, die vom Einstell- und Indexfehler herrührt, etwa $\frac{1}{6}-\frac{1}{16}$, also fast $\frac{1}{9}$ sec beträgt. Könnte man den Indexfehler durch genaueste Ausführung des Zünders, den Einstellfehler durch sorgfältigste Einstellung vermittels automatischen Stellschlüssels beseitigen, so würde die verbleibende Streuung von $\frac{1}{4}$ auf $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$, also fast auf die Hälfte verringert. Man müßte von langsam brennenden Zündsätzen zu schnell brennenden übergehen, damit die Striche der Skala weiter auseinanderrücken. Eine Ungenauigkeit im Einstellen macht dann weniger in der Entfernung aus.

§ 98. Symmetrieachsen

Kehren wir zur Betrachtung des Trefferbildes der Punkte $\Pi_i\,(\xi_i,\ \eta_i)$ zurück. Als Anfangspunkt der Koordinaten (ξ, η) wurde zunächst der wahre Treffpunkt, dann, da dieser nicht bekannt ist, der scheinbare Treffpunkt, der Schwerpunkt der Punkte Π_i, genommen. Aber, so wenig der wahre Treffpunkt bekannt ist, so wenig sind die wahren Achsenrichtungen bekannt. Wollte man die η-Achse etwa in die vertikale Schußebene legen, so würde das nur dann berechtigt sein, wenn diese Ebene eine Symmetrieebene für die Schüsse wäre; das Geschütz müßte dann in bezug auf diese Ebene nicht nur geometrisch (was schon wegen des Dralls nicht der Fall ist), sondern auch mechanisch (in bezug auf Verteilung der Massen und Widerstände) symmetrisch sein. Im Trefferbild würde das darin zum Ausdruck kommen, daß die Punkte Π_i rechts und links der η-Achse „gleichmäßig" verteilt sind.

Um festzustellen, was unter dem Wort „gleichmäßig" hier zu verstehen ist, führen wir den Begriff „mittlerer Fehler in bezug auf eine Achse" ein. Das ist die Quadratwurzel des Mittels der Abstandsquadrate der Punkte Π_i von der betreffenden Achse, d. h., wenn

$$\eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi = 0$$

die Gleichung der Achse ist, die Quadratwurzel aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum (\eta_i \cos \varphi - \xi_i \sin \varphi)^2 &= \frac{1}{n} \{\sum \xi_i^2 \sin^2 \varphi - 2 \sum \xi_i \eta_i \sin \varphi \cos \varphi + \sum \eta_i^2 \cos^2 \varphi\} \\ &= a \cdot \sin^2 \varphi - 2\, b \cdot \sin \varphi \cos \varphi + c \cdot \cos^2 \varphi\,. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt worden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum \xi_i^2 &= a\,, \\ \frac{1}{n} \sum \xi_i \eta_i &= b\,, \\ \frac{1}{n} \sum \eta_i^2 &= c\,, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

so daß a und c die Quadrate der mittleren Fehler in bezug auf die η- und ξ-Achse sind.

Suchen wir diejenigen Achsen, für welche der mittlere Fehler ein Extremum wird, so müssen wir die Ableitung von (36) gleich Null setzen; das gibt für φ:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a - c}{2\, b}\,, \quad (38)$$

also zwei Winkel, φ_1 und $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$. Es gibt also zwei Symmetrieachsen; also entspricht der einen ein Minimum, der anderen ein Maximum des darauf bezüglichen mittleren Fehlers.

Machen wir diese zu Koordinatenachsen durch die Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \eta \cdot \cos \varphi_1 - \xi \cdot \sin \varphi_1 &= \eta'\,, \\ \xi \cdot \cos \varphi_1 + \eta \cdot \sin \varphi_1 &= \xi'\,, \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

so wird der mittlere Fehler in bezug auf die Achsen (39) gleich

$$a' \sin^2 \varphi_1 + c' \cos^2 \varphi_1 . \tag{40}$$

Denn es wird nach (38), wenn a', b', c' entsprechend (37) erklärt sind,

$$n\, b' = \sum \xi_i' \, \eta_i' = (c - a) \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 + b \cdot \cos 2\, \varphi_1 = 0 .$$

Umgekehrt können die beiden Symmetrieachsen durch die Bedingung

$$\sum \xi_i' \, \eta_i' = 0 \tag{41}$$

definiert werden, da diese auf (38) zurückführt.

Die ursprünglichen Achsen sind also nur dann Symmetrieachsen, wenn

$$\sum \xi_i \, \eta_i = 0$$

ist. Die Größe von $\frac{1}{n} \sum \xi_i \, \eta_i$ gibt ein Maß für die Symmetriestörung.

Siebzehntes Kapitel

Endballistik

§ 99. Eindringungstiefe. Durchschlagsdicke

Dringt das Geschoß in ein flüssiges Mittel, z. B. Wasser ein, so ist, außer der Änderung des Widerstandes, unter Umständen auch die scheinbare Änderung des Gewichtes G infolge des Auftriebs zu berücksichtigen. Um das beurteilen zu können, berechne man das Gewicht $G' = m' g$ der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dann ist $G - G' = m\, g \left(1 - \frac{G'}{G}\right)$ das verkleinerte Gewicht (Archimedisches Prinzip). Man hat also g durch

$$g' = g \cdot \left(1 - \frac{G'}{G}\right) \tag{1}$$

zu ersetzen.

Der Widerstand befolgt in festen und flüssigen Mitteln etwas andere Gesetze als in der Luft, vornehmlich aus zwei Gründen. Die Wellengeschwindigkeit in solchen Mitteln ist erheblich größer als in der Luft (in Wasser mehr als viermal so groß, in Stahl etwa 15mal so groß). Die Geschoßgeschwindigkeit bleibt also weit dahinter zurück; es käme also das Newtonsche Gesetz in Frage. Aber zweitens besteht der Hauptteil des Widerstandes in der Überwindung der Kohäsionskräfte. Die Annahme Poncelets, daß der Widerstand proportional $a + b\, v^n$ ist, hat sich nach Schießversuchen (Didion u. a.) in der Tat besonders für $n = 2$ gut bewährt. Dabei ergibt sich, wie zu erwarten, b sehr klein gegen a, nämlich etwa $b/a = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ (für Erde, Holz, Mauer), so daß Euler mit der Annahme $b = 0$ der Wahrheit ziemlich nahe kam. Die Formel von Résal, W prop.

$(a v + b v^2)$, gilt für Mittel, bei denen keine Kohäsionskräfte, aber um so mehr Reibung (vgl. § 6) zu überwinden ist, z. B. bei Sand, Moor. Ohne ein besonderes Widerstandsgesetz anzunehmen, kann man folgende allgemeine Bemerkungen machen. Die Verzögerung w wird auch noch für $v = 0$ einen von Null verschiedenen Wert w_0 haben. Es sei erstens $w_0 < g$, d. h. das Geschoß sinke auch bei $v = 0$ in das Mittel (Wasser, Moor, Sand) ein, weil sein Gewicht größer ist als der Widerstand. Ist auch noch $w_0 < g'$, so fährt das untergetauchte Geschoß fort zu sinken. Ist aber $w_0 > g'$, so sinkt es nur so weit ein, bis $w_0 = g\left(1 - \frac{G''}{G}\right)$ ist, wo G'' das Gewicht der verdrängten Masse ist; es schwimmt dann.

Es sei zweitens $w_0 \gtreqless g$ (also auch $> g'$); d. h. das Geschoß sinkt, wenn $v = 0$ ist, nicht ein (z. B. Erdboden). Ist $v > 0$, so ist doch immer [vgl. § 10 (9)]

$$\frac{dv}{dt} = -(w + g' \sin \omega) < 0\,,$$

d. h. v nimmt beständig ab mit wachsendem t. Das Integral

$$t = \int_{v_0}^{0} \frac{dv}{w + g' \sin \omega}$$

behält einen endlichen Wert, d. h. die Geschwindigkeit nimmt in endlicher Zeit bis 0 ab: das Geschoß kommt zur Ruhe. Umgekehrt kann man daraus, daß das Geschoß in festen Mitteln zur Ruhe kommt, schließen, daß in diesen $w_0 > g'$ ist. Zur Beurteilung des Verhältnisses von w_0/g leiten wir aus $m w = W = C i (a + b v^2)$ ab:

$$\frac{w}{g} = \frac{C}{G} i (a + b v^2)\,,$$

also

$$\frac{w_0}{g} = \frac{C}{G} i a\,. \tag{2}$$

C ist von der Größenordnung Kaliber-Quadrat, also etwa $\frac{1}{100}$ qm bei mittleren Kalibern. Für G nehmen wir etwa 10 kg, i soll zwischen 1 (Kugeln) und $\frac{2}{3}$ (Langgeschossen) liegen. a ist von der Größenordnung 10^6. Das würde für w_0/g die Größenordnung 1000 ergeben. Demnach kann g neben w vernachlässigt werden, es kommen daher die Formeln für den schwerefreien Schuß zur Anwendung (s. § 15):

$$t = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{w}\,, \qquad s = -\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{w}\,. \tag{3}$$

Das ergibt:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{m}{C\cdot i}\cdot\frac{1}{2\,b}\cdot\lg\frac{a+b\,v_0^2}{a+b\,v^2}\,,\\ t &= \frac{m}{C\cdot i}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\,b}}\left(\operatorname{arc\,tg} v_0\sqrt{\frac{b}{a}}-\operatorname{arc\,tg} v\sqrt{\frac{b}{a}}\right). \end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Darin bedeutet v_0 die Eindringungsgeschwindigkeit, die Zeit ist vom Moment des Eindringens an gerechnet.

Diese Formeln ergeben erstens für den Durchschuß eines Körpers zum Weg s^0 die Austrittsgeschwindigkeit v^0 und die Austrittszeit t^0. Zweitens ergeben sie für $v=0$ die Eindringungstiefe und -zeit:

$$s_{v=0}=\frac{m}{C\cdot i}\cdot\frac{1}{2\,b}\cdot\lg\left(1+\frac{b}{a}v_0^2\right),\quad t_{v=0}=\frac{m}{C\cdot i}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\operatorname{arc\,tg} v_0\sqrt{\frac{b}{a}}\,,\qquad(5)$$

falls der Körper ausgedehnt genug ist; (bei Erde $\frac{3}{2}$, bei Holz $\frac{4}{3}$ der Eindringungstiefe). Bei dem Wesen dieser Formeln als Näherungen kann man für b/a den oben angegebenen Mittelwert $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ einsetzen und auf Verschiedenheiten im Spitzenfaktor i verzichten. Dann kann man der Formel für die Eindringungstiefe die Form geben:

$$s_{v=0}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{G}{C}\cdot\varkappa\cdot f(v_0)\,,\qquad(6)$$

wo näherungsweise

$$f(v_0)=10\cdot\log\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{100}\right)^2\right)\qquad(7)$$

ist. Für $f(v_0)$ gibt Pétry eine Tabelle und für die Materialkonstante $\varkappa$ die Werte:

Mauerwerk	$\varkappa$
Beton-	0,64
Stein-	0,94
Ziegel-	1,63

Erde	$\varkappa$
sandig	2,94
gewachsen ...	3,86
tonig	5,87

Dabei ist angenommen, daß das Geschoß beim Aufschlagen und Eindringen keine Deformation (Stauchung) erleidet. Deformiert es sich bei der Aufschlagsgeschwindigkeit v_0, so muß sich der Formfaktor i um eine mit v_0 wachsende Funktion von v_0 ändern, von der man in erster Annäherung nur die zwei ersten Glieder der Entwicklung, $1+k\,v_0$, beizubehalten braucht. Dieser Faktor tritt also in (6) in den Nenner (Levi-Civita). k wäre empirisch zu bestimmen.

Bei kleinem $v_0/100$ kann man den log in (7) ersetzen durch sein erstes Glied $0{,}434\cdot\frac{1}{2}\cdot(v_0/100)^2$. Ist das Geschoß eine homogene Kugel vom Durchmesser D und dem spezifischen Gewicht δ, so ergibt (6):

$$s_{v=0}=\frac{\pi}{6}\,D\,\delta\cdot\varkappa\cdot 2{,}17\cdot\left(\frac{v_0}{100}\right)^2.$$

Z. B. gibt Journée für die Eindringungstiefe einer Bleikugel ($\delta = 11{,}3$) in Fichtenholz:

$$s_{v=0} = 0{,}93 \cdot D \cdot \left(\frac{v_0}{100}\right)^2 . \tag{8}$$

Ob diese empirische Formel auch bei nicht kleinem $v_0/100$ noch brauchbar ist, bleibt hier unentschieden.

Durchschlagsdicke. Hat das Mittel, in das das Geschoß eindringt, gerade eine Dicke gleich der Eindringungstiefe, so wird es vom Geschoß durchschlagen. Aber es kann auch noch bei etwas größerer Dicke durchschlagen werden, da die letzten Schichten geringeren Widerstand leisten. Die Eindringungstiefe ergibt also nicht die Durchschlagsdicke, aber eine untere Grenze dafür.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Durchschlagsdicke von Panzergranaten gegen Panzerplatten. Dafür gibt es eine Reihe empirischer Formeln.

In einer solchen Formel müssen offenbar in Beziehung treten die Plattenstärke S, das Geschoßkaliber D, die Geschoßwucht T und eine Größe F, die von der Festigkeit des Plattenmateriales abhängt. Diese muß die Dimension von Zug- oder Druckfestigkeit haben, also Kraft durch Querschnitt. Zwischen S, D, T, F lassen sich nur die zwei dimensionslosen Monome $\frac{\mathsf{T}}{F} : D^2 S$ und $\frac{S}{D}$ bilden, und keine hiervon unabhängigen. Die Beziehung muß also die Form haben:

$$\frac{\mathsf{T}}{F} = \frac{\pi}{4} D^2 S \cdot \Phi\left(\frac{S}{D}\right) . \tag{9}$$

Vergleichen wir hiermit einige empirische Formeln, so ist zunächst zu bemerken, daß keine derselben die Größe F enthält, da das in Betracht kommende Material immer ungefähr dasselbe ist.

Krupp gibt folgende Formel:

$$\frac{\mathsf{T}}{\frac{\pi}{4} D^2} = 100\, S \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{D}} \tag{10}$$

(T in kg·m, v in m/sec, S und D in cm). Die Formel (10) ist mit (9) in Übereinstimmung für $F \cdot \Phi\left(\frac{S}{D}\right) = 100 \cdot \left(\frac{S}{D}\right)^{1/3}$.

Nach de Marre soll sein (S und D in dm):

$$2\, g\, \mathsf{T} = A^2 \cdot D^{1{,}5} \cdot S^{1{,}4}; \quad A = 1{,}530 . \tag{11}$$

Stünde hier 1,5 im Exponenten von S statt 1,4, so ginge die Formel aus (9) hervor für Φ (S/D) prop. $(S/D)^{1/2}$, in der Form (11) ist sie nicht homogen. Würde man $1{,}\overline{3}$ im Exponenten von S und $1{,}\overline{6}$ im Exponenten von D

setzen, so wäre sie wieder mit (10) vereinbar. Die Formel (11) soll für gewöhnlichen Stahl gelten; für gehärteten sei der Faktor $1{,}885-0{,}0014\cdot S$ hinzuzufügen. Die Funktion $(1{,}885-0{,}0014\cdot S)\, S^{1,4}$ hat die natürlich zu fordernde Eigenschaft, mit wachsendem S zu wachsen, nur bis $S = 785$. Da dieser Wert weit jenseits der in Betracht kommenden liegt, kann sie trotzdem eine gute Annäherung geben. Besser ist es, man paßt solche willkürlichen Approximationsfunktionen auch in ihrer Form den natürlichen Forderungen an.

§ 100. Scheinbare Sprengwirkung

Die Energie, mit der ein Geschoß in ein Mittel eindringt, gibt es ab: erstens zur Überwindung der Kohäsionskräfte; zweitens, wenn diese gering sind, zur Überwindung der Reibung, wodurch Wärme erzeugt wird (in Sand z. B. werden Infanteriegeschosse fast ganz verdampft und zerrieben); drittens, wenn auch die Reibung gering ist, muß die Energie hauptsächlich wieder in kinetische Energie übergehen. Das kann beim Einschuß in eine geschlossene Flüssigkeitsmasse wegen deren geringer Zusammendrückbarkeit nicht anders geschehen als durch Absprengen von Teilen an der Begrenzung. Das ergibt die „scheinbare Sprengwirkung".

§ 101. Abpraller

Der Widerstand des Mittels wirkt in der Richtung der Geschoßbahn. Dieser Satz ist richtig, solange das Mittel unbegrenzt ist. Schon in der Luft scheinen gewisse Erscheinungen darauf hinzudeuten, daß bei Unterschallgeschwindigkeiten die Nähe der Erdoberfläche auf das Geschoß hebend wirkt: „Täler ziehen das Geschoß an" (Piobert). Aber unzweifelhaft tritt die Erscheinung bei inkompressiblen Flüssigkeiten hervor. Bei schnellfahrenden Wasserfahrzeugen wirkt eine Einengung des Fahrwassers oder eine Erhebung des Grundes bremsend; bei Geschossen, die in Wasser oder Land flach eindringen, wirkt der Widerstand unten stärker als oben, wo das Mittel Platz macht (bzw. bei bloßem Aufschlagen kein Widerstand vorhanden ist), lenkt also das Geschoß nach oben ab. So kommt der Abpraller zustande. Der spitze Einfallswinkel, bei dem das Geschoß noch abprallt, wächst mit dem Kaliber. Er soll (in Graden) gleich dem $\frac{2}{3}$- bis $\frac{3}{4}$-fachen Kaliber (in cm) sein bei Wasser, bei Sand gleich dem $\frac{7}{8}$- bis 1-fachen. Diese Regel stimmt jedenfalls bei kleinem Kaliber nicht. Die sehr genauen Messungen von Ramsauer ergaben zu 11 mm Kaliber etwa 7^0 bei Wasser. C. Ramsauer*) hat Messungen über den Geschwindigkeitsverlust Δv und den Unterschied zwischen Einfalls- und Austrittswinkel $\Delta\omega$ angestellt. Bei einer Einfallsgeschwindigkeit $v = 625{,}3$ m/sec findet er die folgenden Zahlen:

*) C. Ramsauer, Über den Ricochetschuß, Diss. Kiel 1903.

ω	Δv	$\Delta\omega$	$\Delta v/(v\,\Delta\omega)$
1^0,0	17	1′,1	87
2 ,0	54	3 ,9	76
3 ,0	115	11 ,3	52
4 ,0	200	13 ,0	85
5 ,0	301	21 ,6	76
6 ,0	404	25 ,8	86
6 ,7	558	48 ,2	63

Hieraus habe ich das Reflexionsgesetz abgeleitet: Es ist $\frac{\Delta v}{v\Delta\omega}$ praktisch unabhängig vom Einfallswinkel*).

Eine mathematische Theorie des Abprallers fehlt bisher. Die hätte auszugehen von den Differentialgleichungen [vgl. § 10 (1), (9), (10), wo g durch $-k$ zu ersetzen ist]:

$$\ddot{x} = -\frac{w}{v}\dot{x}\,, \qquad \dot{v} = k\cdot\sin\omega - w\,,$$

$$\ddot{z} = -\frac{w}{v}\dot{z} + k\,, \qquad v\,\dot{\omega} = k\cdot\cos\omega\,,$$

wo k die senkrecht aufwärts wirkende Widerstandskomponente ist. Von dieser kann man, da es sich nur um Vorgänge von sehr kurzer Dauer handelt, annehmen, daß sie konstant ist. Dasselbe gilt nach § 99 für w. Dann folgt [vgl. § 11 (16)]:

$$\frac{dv}{v\cdot d\omega} = -h\sec\omega + \operatorname{tg}\,\omega\,,$$

wo $h = w/k$ der Brechungsquotient ist. Für kleine ω ergibt sich mithin

$$\frac{dv}{v\cdot d\omega} = -h$$

in Übereinstimmung mit obigem Reflexionsgesetz, das also bis auf das Vorzeichen beim Eintreten in das Mittel, wie beim Austreten aus demselben gilt.

§ 102. Sprenggeschosse

Das Sprenggeschoß enthält außer seiner kinetischen Energie T noch die potentielle Energie seiner Sprengladung, die nach § 84 zu berechnen ist. Ein Teil dieser Energie dient zum Zerreißen des Geschosses. Die übrige Energie liefert größtenteils die Energie der Sprengteile, ein kleinerer Teil liefert Wärme und Schall.

Es ist unrichtig anzunehmen (Cranz), daß die Drehwucht des Geschosses sich als Drehwucht der Sprengteile wiederfindet. Ob ein Sprengteil Dreh-

*) Vahlen, Heerestechnik (1924) S. 52.

wucht erhält, hängt davon ab, ob die Energieübertragung zentral oder mit „Effekt" erfolgt, wie beim exzentrischen Stoß auf die Billardkugel. Die Erfahrungen (Verletzungen durch Sprengteile, Eindringen von Sprengteilen in Holz) sprechen dafür, daß jedenfalls die Drehwucht der Sprengteile verhältnismäßig sehr gering ist; wie dies ja auch schon beim Geschoß der Fall war (s. § 72). Lassen wir also dieses kleine und unsichere Element, ebenso wie die Wärme- und Schallerzeugung u. dgl. beiseite.

Das Problem, die Energieverteilung in den Sprengteilen zu finden, vereinfacht sich weiter durch Anwendung des Satzes von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Danach darf man von der Bewegung des Schwerpunktes zunächst absehen, und nach Ermittlung der Bewegung der Sprengteile das ganze System derselben so bewegen, daß der Schwerpunkt des Systems die Bahn des Geschosses beschreibt. Das ist insofern nicht ganz korrekt, als ja der Luftwiderstand die Gesamtheit der einzelnen Sprengteile etwas anders beeinflußt als das unzersprengte Geschoß. Wollte man dies berücksichtigen, so könnte man die Bahn des Schwerpunktes der Sprengteile mit einem etwas anderen Formkoeffizienten berechnen. Wir sehen hiervon ab, weil es sich bei den Bahnen der Sprengteile um so kurze Strecken handelt, daß dieselben meist als geradlinig anzusehen sind. Damit ist zugleich begründet, daß wir auch von der Schwerkraft absehen dürfen.

Es handelt sich jetzt um die Geschwindigkeit der Sprengteile in einer Schnittebene senkrecht zur Geschoßachse. Hat das Sprengstück die Entfernung R von der Geschoßachse, so ist $R r$ seine aus der Drehgeschwindigkeit r des Geschosses entstehende Tangentialgeschwindigkeit. Darin ist die Winkelgeschwindigkeit r etwas kleiner als ihr Anfangswert r_0, etwa $\frac{2}{3}$ bis $\frac{4}{5}$ davon (Heydenreich). Von der Sprengladung wird angenommen, daß sie allen Teilen eine ungefähr gleiche Radialgeschwindigkeit V erteilt. Außerdem ist eine Komponente V_ζ in Richtung der Geschoßachse wirksam, die vom normierten Abstand*) ζ der Querschnittebene des Sprengteils vom Schwerpunkt ($\zeta = 0$) und der Anordnung der Sprengladung abhängen wird. Z. B. wird bei Bodenkammer-Schrapnells $V_{-1} = 0$, bei Kopfkammer-Geschossen $V_{+1} = 0$ sein, während bei Mittelkammer-Geschossen annähernd $V_{-1} = -V_{+1}$ sein wird.

In der betrachteten Schnittebene erhält der Sprengteil eine Geschwindigkeit $\sqrt{(R r)^2 + V^2}$ und erreicht zur Zeit t, gezählt vom Platzen des Geschosses an, eine Entfernung von der Achse

$$\sqrt{(R r t)^2 + (V t + R)^2}\,. \tag{12}$$

Bei Schrapnells sind V und V_ζ nur klein; die Sprengladung reicht gerade hin, den Geschoßmantel zu zerreißen, damit die Garbe der Sprengteile und Füllkugeln sich in Richtung der Geschoßbahn über das Ziel

*) Abstand geteilt durch Höchstabstand.

ergießt. Bei Kartätschen, dem Schrotschuß der Artillerie, sind V und V_ζ sogar Null, das Zerreißen der Geschoßhülle und Divergieren der Füllkugeln erfolgt durch die bloße Zentrifugalkraft, wie bei der mit Chokebohrung versehenen Schrotflinte.

Die Sprengteile eines Geschoß-Querschnittes beschreiben gerade Linien in der Ebene desselben. Dabei liegen Sprengteile, die auf einem Radius lagen, zur Zeit t auf einer Geraden $\mathfrak{G}_t$; die Geraden $\mathfrak{G}_t$ ($t = 0 \ldots \infty$) umhüllen eine Parabel. Sprengteile des Querschnittes, die anfangs dasselbe R haben, liegen zur Zeit t auf einem Kreise mit dem Radius (12). Kommt jetzt die Geschoßgeschwindigkeit v und die Komponente V_ζ hinzu, so beschreiben diese Sprengteile, die zu demselben R und ζ gehören, die eine Geradenschar eines Rotationshyperboloides mit der Geschwindigkeit

$$\sqrt{(R\,r)^2 + V^2 + (v + V_\zeta)^2}\,; \tag{13}$$

und diese machen mit der Geschoßachse einen Winkel, der zu bestimmen ist aus:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\sqrt{(R\,r)^2 + V^2}}{v + V_\zeta}\,. \tag{14}$$

Daraus ergibt sich der größte Wert dieses Ausdruckes, also der halbe Kegelwinkel der Sprenggarbe, wenn man für R das Halbkaliber, für V_ζ seinen kleinsten Wert V_{-1} setzt. Ist $v + V_{-1} < 0$, wie es bei Brisanzgranaten vorkommen kann, so wird der halbe Kegelwinkel größer als ein rechter: es gibt Sprengteile, die eine Rückwärtskomponente der Geschwindigkeit haben.

Bei Schrapnells ist V gegen $R\,r$, bei Granaten $R\,r$ gegen V zu vernachlässigen. Infolgedessen erhält bei Schrapnells der Winkel χ auch den Wert Null, nämlich zu kleinen Werten von R: die axial liegenden Geschoßteile fliegen geradeaus. Bei Granaten nimmt χ einen kleinsten Wert $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{V}{v + V_{+1}}$ an: die Sprenggarbe enthält einen von Sprengteilen freien Kegel, einen „toten" Raum.

Für V und V_ζ bei Schrapnells gibt de la Llave empirische Formeln (analog denen von Sarrau). V und V_ζ sind von der Größenordnung bei Schrapnells 10 m/sec, bei Granaten 1000 m/sec.

Der empirischen Ermittlung zugänglich sind in der Formel (14) die Elemente v und $\chi_{\text{max.}}$. Deshalb begnügt man sich, von der Formel (14) nur die Form beizubehalten und $\operatorname{ctg} \chi_{\text{max.}}$ als lineare Funktion von v darzustellen. Deren Koeffizienten sind aus (mindestens) zwei Messungen zu bestimmen (Rohne).

Sprengtrichter. Für die Größe der Sprengtrichter bestehen einige rohe empirische Formeln. Sie ist in Kubikmeter annähernd gleich

$$m \cdot s \cdot \lambda \cdot \Gamma\,; \tag{15}$$

darin bedeutet Γ das Gewicht der Sprengladung in kg, λ ein Maß der Brisanz derselben ($\lambda = 1$ bei Schwarzpulver, 2 bis 2,1 bei Schießwollpulver, bis 2,2 bei Pikrinsäure), m hängt vom Material ab (Erde 1,2 bis 0,7, Mauerwerk und Beton 0,194 bis 0,014 und weniger); s ist bei Materialien, bei denen Kohäsionskräfte zu überwinden sind (Mauerwerk), die Eindringungstiefe in Metern, bei anderen (Erde und Sand) eine zwischen etwa 0,503 (wenn $v^0 < 300$) und etwa 0,816 (wenn $v^0 > 300$) liegende Zahl.

Der Inhalt des Sprengtrichters liegt zwischen dem 1,5- und dem 2,5-fachen eines Kegels gleicher Basis und Höhe: in lockerem Material ist die Sohle des Trichters mehr abgerundet als in hartem.

Brennzünder. Der Zünder eines Sprenggeschosses sei mit einer Sekundenteilung versehen. Soll das Geschoß zur Zeit t nach dem Abschuß platzen, so ist die Marke des Zünders auf den Punkt t der Teilung einzustellen. Die Brenngeschwindigkeit des Zündsatzes unter dem Druck p werde normiert, indem man sie durch die Brenngeschwindigkeit unter dem Druck $p_0 = 760$ mm Hg teilt. Die so normierte Brenngeschwindigkeit werde mit $\dot{b}$ bezeichnet. Nach dem Brenngesetz [vgl. § 82 (18)] ist

$$\dot{b} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha}, \tag{16}$$

wo der Exponent α durch Versuche ermittelt sei.

Der Druck p hängt von der Geschwindigkeit v_z und von der Höhe z des Geschosses ab.

Zwischen Druck, Dichte δ und Geschwindigkeit v der Luft nahe dem Geschoßkopf besteht, wenn die Bewegung wirbelfrei und stationär angenommen wird, die Gleichung

$$dp + \delta \cdot v\, dv = 0\,. \tag{17}$$

Eliminiert man die Dichte δ durch die Poissonsche Gleichung

$$\frac{p}{p_z} = \left(\frac{\delta}{\delta_z}\right)^{k}, \tag{18}$$

so erhält man

$$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{-\frac{1}{k}} \frac{dp}{\delta_z} + v\, dv = 0\,, \tag{19}$$

also durch Integration

$$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{\delta_z}{p_z} (v_z^2 - v^2)\,, \tag{20}$$

da fern vom Geschoß $v = v_z$, $p = p_z$ ist.

Die Druckänderung dp_z, die zur Höhenänderung dz gehört, ist gleich dem Druck einer Luftsäule von der Höhe dz auf die Flächeneinheit, also

$$dp_z = -g\, \delta_z\, dz\,. \tag{21}$$

Die Dichte δ_z eliminieren wir durch die Mariotte-Gay-Lussacsche Gleichung:

$$\frac{p_z}{\delta_z} = \frac{p_0}{\delta_0} \cdot \frac{\mathfrak{T}_z}{\mathfrak{T}_0} = h \cdot g \cdot \frac{\mathfrak{T}_z}{\mathfrak{T}_0}, \tag{22}$$

wo $h \doteq 8000$ m die Höhe der homogen gedachten Atmosphäre (s. § 6, S. 12) und $\mathfrak{T}_z$ die absolute Temperatur in der Höhe z ist.

Also erhält man aus (21) und (22)

$$\frac{d p_z}{p_z} = -\frac{\mathfrak{T}_0}{h} \cdot \frac{dz}{\mathfrak{T}_z}$$

und daraus

$$p_z = p_0 \cdot e^{-\frac{\mathfrak{T}_0}{h} \cdot \int\limits_0^z \frac{dz}{\mathfrak{T}_z}}, \tag{23}$$

was in (20) einzusetzen wäre. Zur Berechnung von p_z ist $\mathfrak{T}_z$ als Funktion von z empirisch zu approximieren.

Aus (20), (22), (23) folgt nun:

$$p = p_z \left[1 + \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{v_z^2 - v^2}{g\, h\, \mathfrak{T}_z : \mathfrak{T}_0}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{24}$$

$\mathfrak{T}_z$, p_z und v_z, Temperatur, Luftdruck und Geschoßgeschwindigkeit in der Flughöhe z sind als bekannt anzusehen. Dagegen ist nicht bekannt die Geschwindigkeit v der Luft am Brandloch, auf die es ankommt. Man kann nur sagen, daß sie zwischen 0 und v_z enthalten sein muß. Nimmt man an, daß v ungefähr proportional v_z ist, so ergibt (24)

$$p = p_z \left(1 + \frac{v_z^2}{c^2 \cdot \mathfrak{T}_z : \mathfrak{T}_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{25}$$

wo

$$c^2 = \frac{2\, k\, g\, h}{(k-1) \cdot \Theta}, \qquad (0 < \Theta < 1)$$

also $c > 736$ ist.

Die Brenngeschwindigkeit ergibt sich jetzt aus (16) und (25):

$$\dot{b} = \left(\frac{p_z}{p_0}\right)^a \cdot \left[1 + \frac{v_z^2}{c^2\, \mathfrak{T}_z : \mathfrak{T}_0}\right]^{\frac{k a}{k-1}}. \tag{26}$$

Die unbekannte Geschwindigkeit c wird empirisch ermittelt, indem man bei kleinen Schußweiten und flachen Bahnen p_z, $\mathfrak{T}_z$, v_z ersetzt durch p_0, $\mathfrak{T}_0$, v_0 und die mittlere Brenngeschwindigkeit beobachtet, d. h. die Länge des wirklich abgebrannten Zündsatzes, geteilt durch die Flugzeit. Diese „mittleren“ Brenngeschwindigkeiten sind noch, wie oben, zu normieren und dann in ihrer Abhängigkeit (am besten) von der Flugzeit t graphisch darzustellen. Der Grenzwert für $t = 0$ ist dann gleich

$$\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{\frac{k\alpha}{k-1}};$$

woraus c zu bestimmen ist.

Ist eine Schußbahn und ihr zeitlicher Ablauf bekannt, sind also p_z, $\mathfrak{T}_z$, v_z bekannte Funktionen von t, so ergibt sich aus (26) durch numerisch-graphische Integration

$$b = \int_0^t \dot{b}\, dt\,, \tag{27}$$

also die zur Zeit t gehörige Brennlänge. Man ist dadurch imstande, die Teilung auf dem Zünder theoretisch voraus herzustellen. Nachträgliche Korrektur durch Schüsse bleibt natürlich nötig, aber man braucht weniger.

Wegen Einzelheiten des Verfahrens ist zu verweisen auf Stübler, Artill. Monatshefte 1918.

Achtzehntes Kapitel

Zielen und Richten

§ 103. Ortsbestimmung von Schuß und Ziel

Um der Waffe die erforderliche Seiten- und Höhenrichtung zu geben, muß man bei Feld- (und See-) Zielen die Richtung und die Entfernung des Zieles, bei Luftzielen noch die Höhe kennen. Diese zwei (bzw. drei) Größen kann man nur durch mindestens zwei (bzw. drei) Beobachtungen ermitteln.

Bei Feld- (und See-) Zielen hat man an solchen Beobachtungen vor allem die Ziellinie vom Beobachter B zum Ziel Z hin. Zwei solcher Ziellinien, von zwei Beobachtungsstellen B_1, B_2 aus, bestimmen, auf denselben Plan eingetragen, die Lage des Zieles. (Verfahren der Lichtmeßtrupps; Vorwärts-Einschneiden des Feldmessens.) Damit sind zugleich die Entfernungen $B_1 Z$, $B_2 Z$ bekannt. Ist insbesondere $\angle\, Z B_1 B_2$ ein Rechter, so ist $Z B_1 = B_1 B_2 \cdot \operatorname{ctg} B_1 Z B_2$. Die Entfernung $Z B_1$ ist also bekannt, wenn die „Basis" $B_1 B_2$ und die „Parallaxe"*) $B_1 Z B_2$ bekannt ist. Rückt man B_2 so nahe an B_1 heran, daß ein Beobachter sowohl direkt von B_1 aus, als indirekt durch Spiegelung von B_2 aus nach Z visieren kann, so hat man das Prinzip des Entfernungsmessers. Die Drehung, durch die man den Spiegel bei B_2 einstellt, überträgt sich auf eine Skala, an der gleich die Entfernungen abgelesen werden.

*) So bezeichnet der Astronom jede Richtungsänderung einer Sehlinie, die von einer Änderung des Standortes herrührt.

Der Schall kann zur Entfernungsbestimmung feuernder Geschütze dienen: die Sekundenzahl zwischen Blitz und Knall eines feuernden Geschützes gibt die Entfernung in Kilometerdritteln. Mit der Ziellinie des Blitzes zusammen gibt das eine ganze Ortsbestimmung. Sieht man den Blitz nicht, so gibt die Sekundenzahl zwischen dem Eintreffen des Knalles in B_1 und in B_2 den Unterschied der Entfernungen $B_1 Z$ und $B_2 Z$ in Kilometerdritteln; also einen Hyperbelast mit den Brennpunkten B_1 und B_2 als geometrischen Ort für Z. Zwei solcher, also mindestens drei Beobachtungsstellen B_1, B_2, B_3 bestimmen Z (Verfahren der Schallmeßtrupps).

Das sind Verfahren für den Stellungskrieg. Im Bewegungskrieg ist man hauptsächlich auf Beobachtung von der Batterie F aus angewiesen; man hat also nur eine Beobachtung: die Ziellinie. Der zugehörige Entfernungsmesser ist der Schuß: durch Schüsse vor und hinter dem Ziel wird die Entfernung in Grenzen eingeschlossen, es wird eine „Gabel" gebildet. Aber nur solche Schüsse sind im allgemeinen zum Ziel in Beziehung zu bringen, die in oder nahe der Ziellinie liegen, die also entweder mit ihrer Rauchwolke das Ziel verdecken, oder auf deren Rauchwolke sich das Ziel abhebt. Das nennt man Schießen mit direkter Beobachtung.

§ 104. Hilfsplan für Schießen mit indirekter Beobachtung

Wenn sich dagegen der Schießende auf einer weit von der Feuerstellung F der Batterie entfernten Beobachtung B befindet, so besteht eine Schwierigkeit beim Schießen darin, zu den von B aus beobachteten Seitenabweichungen des Schusses S vom Ziel Z die für die Batterie zu kommandierenden Seiten- und Entfernungsänderungen schnell und genau genug zu finden. Wie der erste Schuß abzugeben ist, ergibt sich mit Winkelmesser und Maßstab aus der Karte bzw. dem Batterieplan. Betreffs der Lage des Schusses S zum Ziel Z wird der Schießende im allgemeinen nur die beobachtete Seitenabweichung angeben, über die Entfernung erst dann etwas aussagen können, wenn der Schuß S nahe der Linie BZ liegt. Demnach muß er die zu kommandierende Seitenkorrektur so wählen, daß letzteres erreicht wird. Liegt insbesondere die Beobachtung B auf der Schußrichtung FS_1, so verhalten sich die Seitenabweichungen für Beobachtung und Feuerstellung offenbar wie S_1F zu S_1B. Dieses selbe Verhältnis gilt nun für alle Schüsse S_1, S_2, S_3, ..., die auf dem Kreise mit BS_1 als Durchmesser liegen. Soll nämlich der Schuß S durch eine Seitenkorrektur SFT nach T in die Linie BZ gebracht werden, so verhält sich (vgl. Abb. 53)

$$SFT : SBT = \frac{ST}{SF} : \frac{SU}{SB} = \frac{SB}{SF \cdot \cos UST} = \frac{SB}{SF \cdot \cos BSF} = \frac{SB}{SC}.$$

Demnach liegen alle die Punkte S auf dem Kreise über dem Durchmesser BS_1, für welche das Verhältnis der Winkel $SFT : SBT = S_1B : S_1F$

ist. Man kann sich also die Karte bzw. den Batterieplan durch Kreise mit den Durchmessern $\frac{\frac{1}{2}}{9\frac{1}{2}}, \frac{1\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}, \frac{2\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}}, \frac{3\frac{1}{2}}{6\frac{1}{2}}, \frac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}}, \frac{5\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}, \frac{6\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}, \frac{7\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}, \frac{8\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}, \frac{9\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ usw., derart in Gebiete teilen, bezeichnet mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 usw., daß z. B. für jedes Ziel im Gebiet 7 auf je 10 beobachtete Teilstriche Seitenabweichung 7 zu kommandierende Teilstriche kommen.

Beispiele: Das Ziel liegt im Gebiet 7, man beobachtet 25 Teilstriche; zu kommandieren sind $7 \cdot 2\frac{1}{2} = 17$ Teilstriche.

Das Ziel liegt im Gebiet 4, man beobachtet 37 Teilstriche; zu kommandieren sind $4 \cdot 3\frac{3}{4} = 15$ Teilstriche.

Hat man durch diese Korrektur den Schuß an die Linie BZ herangebracht, so daß man ihn als Kurz- oder Weitschuß beurteilen kann, so

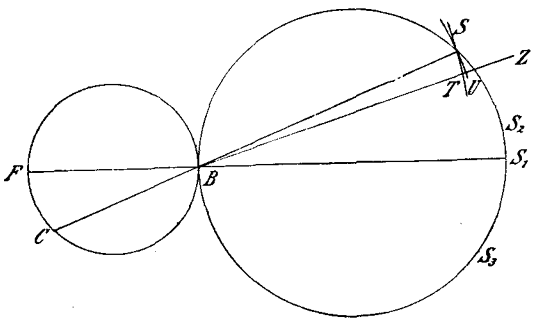

Abb. 53

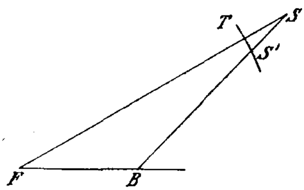

Abb. 54

kann man demgemäß die Entfernung ändern. Danach würde aber der nächste Schuß nicht mehr an BZ liegen, sondern erst der nächstfolgende durch eine Seitenkorrektur dorthin zu bringen sein. Das Einschießen bestände also aus abwechselnden Seiten- und Entfernungskorrekturen, würde also die doppelte Schußzahl erfordern, wie wenn man nach jedem Schuß, der an der Linie BZ liegt, gleichzeitig eine Seiten- und Entfernungskorrektur vornimmt, derart, daß auch der korrigierte Schuß wieder an der Linie BZ liegt. Soll der Schuß S nach einer Entfernungsänderung ST (Abb. 54) und einer Seitenänderung TS' wieder in der Linie BS liegen, so ist $S'T : ST = \operatorname{tg} S'ST$; d. h. das Verhältnis der Entfernungsänderung zur Seitenänderung in Metern ist dasselbe für alle Schüsse auf einem Kreise durch B und F. Man kann also ein zweites System von Kreisen zeichnen, bestimmt durch die allen gemeinsame Sehne BF und die Peripheriewinkel, deren tg bzw. $\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \ldots, \frac{90}{100}$ ist*), bezeichnet mit 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, derart, daß z. B. für ein Ziel am Kreise 70 einer Entfernungsänderung von 100 m eine Seitenkorrektur von 70 m entspricht. Für Punkte zwischen zwei Kreisen wird nach Augenmaß interpoliert.

*) Die Mitten dieser Kreise liegen auf dem Mittellot von FB und haben von der Mitte von FB die Abstände $\frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \frac{10}{3}, \frac{10}{4}, \frac{10}{5}, \frac{10}{6}, \frac{10}{7}, \frac{10}{8}, \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{2}\, BF$.

Beispiel: Ziel zwischen den Kreisen 60 und 70, geschätzt auf 64, links der Linie FB, Entfernung 4200; also 64 m = 15 Teilstriche, weil ein Teilstrich = 4,2 m. Der 4200-Schuß liegt kurz, Kommando 4400, 30 mehr. Dieser Schuß liegt weit, Kommando 4300, 15 weniger. Dieser Schuß liegt kurz, Kommando 4350, 8 mehr; usw.

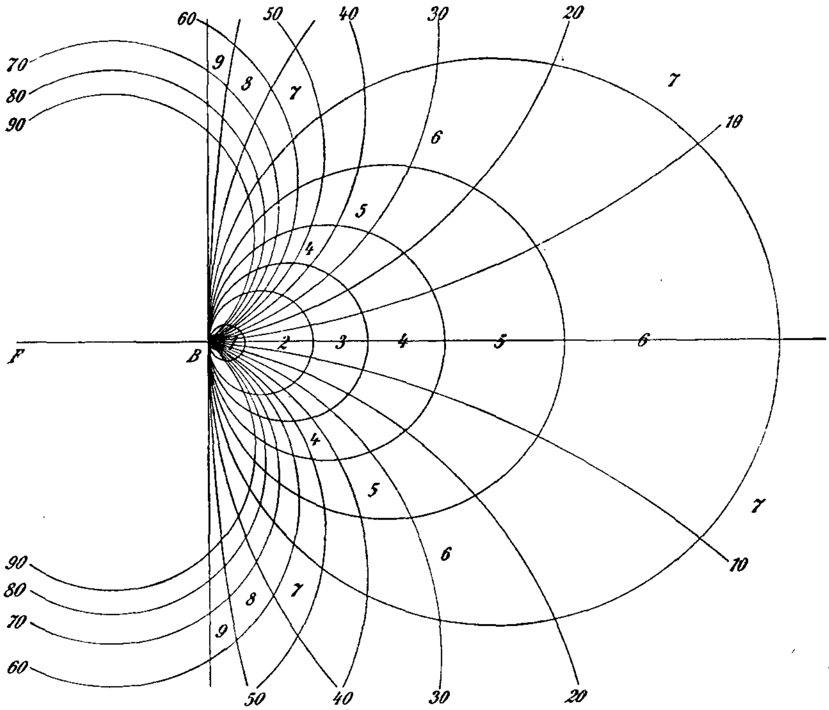

Abb. 55

Daß dazwischen infolge ungünstiger Streuung Schüsse nicht an BZ fallen und den normalen Verlauf des Einschießens verzögern, versteht sich, wie beim Schießen mit direkter Beobachtung, von selbst. Man hat dann wie beim ersten Schuß eine bloße Seitenkorrektur vorzunehmen.

In Abb. 55 sind unter Zugrundelegung eines Abstandes $FB = 2{,}5$ cm die beiden Systeme von Kreisen verzeichnet. Diese Zeichnung kann man sich auf Pauspapier in solchem Maßstabe zeichnen, daß man das Pauspapierblatt mit F auf die Feuerstellung, mit B auf die Beobachtungsstelle, auf die Karte oder den Batterieplan auflegen kann. Praktischer ist es, wenn diese Zeichnung in hinreichend großem Maßstab auf Kartonpapier gedruckt geliefert wird, noch mit zwei Teilkreisen um F und B, geteilt in Teilstriche, versehen. Jedes Ziel kann man dann leicht mit Hilfe dieser Teilkreise vom Batterieplan auf diesen Hilfsplan übertragen. Oder man überträgt das Netz der Planquadrate auf den Hilfsplan. Zum

Zwecke des Schießens entnimmt man dem Hilfsplan lediglich die Zahl 0, 1, 2, ... des Gebietes, in dem das Ziel liegt, und die Zahl 10, 20, ... des Kreises, dem es zunächst liegt, mit einer geschätzten Berichtigung. Natürlich kann man beide Systeme von Kreisen verdichten, z. B. noch die Kreise für 5, 15, 25 usw. einfügen, weiter wird man die Zeichnung auf den ganzen Feuerbereich der Batterie ausdehnen.

Durch den Hilfsplan wird das Einschießen eine fast mechanische Sache, die jedem guten Beobachter anvertraut werden kann.

Das Verfahren ist so einfach, wie es im Hinblick auf die Aufgabe möglich ist. Denn die Korrektur jedes Schusses erfordert zwei Zahlen, die also dem Schuß zugeordnet sein müssen. Das verlangt notwendig eine doppelte Art Einteilung des Planes in Gebiete. Es hat für den Stellungs- und Festungskrieg Bedeutung. Vor dem Verfahren der Meßtrupps mit zwei (oder mehr) Beobachtungsstellen hat es den Vorzug größerer Schnelligkeit, Unmittelbarkeit und Einfachheit. Es ist schon in einem frühen Stadium verwendbar, während die Einrichtung der Meßtrupps erst spät erfolgen kann.

§ 105. Höhenmesser für Luftziele

Bei Luftzielen kommt zur Seitenrichtung und Entfernung noch die Höhe hinzu. Ist die Erhöhung der Visierlinie gegen die Waagerechte bekannt, so ist die Höhe gleich der Entfernung mal dem sin dieses Winkels. Auf Grund dieser Beziehung und zur Vermeidung jeder Rechnung und Tabelle habe ich im April 1915 für mehrere Flugzeugabwehrformationen einen Höhenmesser konstruiert. Er besteht aus einer rechteckigen Tafel von (z. B.) 50×30 cm, auf dem parallele „Niveaulinien", bezeichnet mit 0, 100, 200, ..., 3000 m, in Zentimeterabstand eingeritzt sind, und von deren oberer Ecke ein Lot mit Zentimeterteilung herabhängt (Abb. 56). Hält man die Tafel senkrecht, visiert über die obere Kante das Luftziel an, so schneidet z. B. die 2500-m-Linie das Lot an der Stelle, die die Entfernung bei 2500 m Höhe angibt, in der Zeichnung bei 4700; umgekehrt, ist die Entfernung bekannt, so liest man die Höhe ab, z. B. zur Entfernung 5000 findet man in der Zeichnung 2800 Höhe. Trüge man noch zu den Punkten der Tafel die Erhöhungen ω_0 ein, mit denen man schießen müßte, so geben die zu den gleichen Werten von ω_0 gehörigen Punkte verbunden ein im Maßstab 1 : 10000 verkleinertes

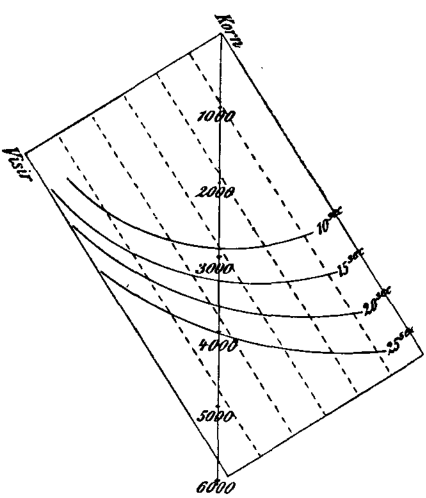

Abb. 56

Abbild der Schußbahn zur Erhöhung ω_0 und lassen erkennen, welcher Teil der Schußbahn durch das Ziel geht.

Statt dessen tragen wir aus später verständlichen Gründen zu jedem Punkte der Tafel die Zünderstellung ein, die ein im entsprechenden Raumpunkte platzendes Geschoß haben muß. Dann geben die zu gleichen Zünderstellungen gehörigen Punkte verbunden die Bilder der „Sprenglinien"; nach § 18 sind das nahezu Kreise, deren Mittelpunkte senkrecht unter dem Geschützstand liegen. Man vervollständigt so den Höhenmesser zu einem Tempierungsmesser (Brennlängenmesser), der zu jeder Entfernung sofort die Tempierung (Brennlänge) gibt, mit der geschossen werden müßte. Über die Berücksichtigung der Bewegung des Zieles siehe § 107.

Dieser Höhenmesser kann mit irgendeinem Visierinstrument (z. B. Entfernungsmesser, Scherenfernrohr u. dgl.) verbunden werden; dessen Visierlinie und die Oberkante des Höhenmessers müssen dann parallel gestellt sein.

§ 106. Feld- und Luftaufsatz

Wenn die Visierlinie (Visier—Korn) durch das Ziel gelegt wird, soll die Seelenachse eine solche Erhöhung ω_0 erhalten, daß die Schußbahn durch das Ziel geht. Das wird bei Feldzielen in der Weise erreicht, daß der Linie Visier—Korn durch senkrechtes Verschieben des Visiers eine Neigung ω_0 gegen die Seelenachse gegeben wird. Das Maß der Verschiebung des Visiers wird an der Aufsatzstange abgelesen, an der aber statt (oder außer) den Erhöhungen ω_0 gleich die Schußweiten x^0 eingetragen sind. Ein solcher Aufsatz bezieht sich auf Ziele im Geschützniveau. Würde es sich um Ziele in 3000 m Höhe handeln, so wäre genau entsprechend ein Luftaufsatz herzustellen, da auch für diese Ziele zu jeder Entfernung eine bestimmte Erhöhung gehört. Da man aber nicht zu jeder Zielhöhe einen besonderen Aufsatz nehmen kann, kam es darauf an, einen Luftaufsatz zu entwerfen, der selbsttätig zu jeder Zielhöhe die richtige Erhöhung gibt, wenn das richtige Visier genommen wird. Nun ist zu bedenken, daß es beim Schießen gegen Luftziele gar nicht auf die Entfernung derselben ankommt, sondern auf die Zünderstellung der dahin zu feuernden Geschosse. Gleich tempierte Geschosse bei verschiedenen Erhöhungen platzen aber nach § 18 auf einem Kreise nicht um den Geschützort O, sondern um einen Punkt M, der um Z unter O liegt. Und wegen der Gleichungen [vgl. § 18 (7)]

$$x = X(t) \cos \omega_0 , \qquad z = X(t) \sin \omega_0 - Z(t)$$

hat der Radius MS immer die Neigung

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{z + Z}{x} = \omega_0 ,$$

ist also immer der Seelenachse parallel. Daraus folgt, daß die Visierlinie VKS bei gegebener Zünderstellung t und allen Erhöhungen ω_0 immer durch denselben Punkt V der Linie OM hindurchgeht, der also das zu t gehörige Visier ist. Die Gesamtheit der Visiere ist also an einem senkrechten, nach Zeit geteilten Maßstabe anzuordnen, der nicht, wie der Feldaufsatz, mit dem Rohre, sondern mit der Lafette derart verbunden ist, daß er vermittels Libelle immer senkrecht gestellt werden kann, oder durch sein Gewicht sich selbst so stellt. Der Satz, auf dem dieser Luftaufsatz beruht, ist aber nur angenähert richtig, also auch der Luftaufsatz selbst. Um den genau richtigen Luftaufsatz zu finden, ersetze man den Kreis um M mit MS durch die richtige Linie, auf der die Geschosse sich zur Zeit t befinden. OK (Abb. 59) sei die jedesmalige Rohrneigung, gehörig zum Punkte S. Die sämtlichen Linien SK gehen dann nicht genau durch

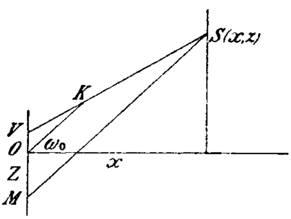

Abb. 57

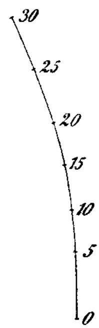

Abb. 58

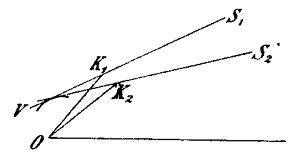

Abb. 59

einen Punkt V, sondern sie umhüllen einen kleinen Kurvenbogen, der als das Visier anzusehen ist. Die sämtlichen Visiere können als senkrechte Parallelschnitte einer krummen Fläche getreppt nebeneinander angeordnet werden. Sie liegen nicht senkrecht übereinander, wie Abb. 57 ergab, sondern auf einer rückwärts gekrümmten Linie, wie Abb. 58 andeutet.

Auf den wesentlichen Unterschied dieses von mir 1916 vorgeschlagenen Luftaufsatzes gegen die früheren und gegen Feldaufsätze ist noch hinzuweisen. Die letzteren legen die Schußbahn durch das Ziel, sofern alles richtig bestimmt ist. Der oben beschriebene legt den Sprengpunkt in die Ziellinie, auch dann, wenn die Tempierung falsch war. Die Vorteile in bezug auf Beobachtung und Abwehr sind augenscheinlich.

Auf technische oder artilleristische Einzelheiten wird nicht eingegangen; es kommt hier nur auf die mathematischen Grundgedanken an.

§ 107. Bewegte Ziele

Die Bewegung eines Zieles erfolgt nach drei Komponenten: Seite, Höhe, Entfernung. Die Veränderung von Seite und Höhe kann man ermitteln aus der Veränderung der Entfernung und der scheinbaren Veränderung nach Seite und Höhe. Die Entfernung ist nun immer das unsichere Element wegen der Mängel, die jedem Entfernungsmessen anhaften und dessen Zeitdauer. Demgegenüber ist die Ziellinie und die Bewegung der Ziellinie viel genauer zu erfassen, was ja auch darin zum Ausdruck kommt, daß es nicht schwer ist Strich zu schießen, aber schwer, die Entfernung richtig zu treffen. Außerdem ist gegenüber der etwas unsicheren Entfernung vollkommen sicher die Zünderstellung, mit der im Moment des Abschusses geladen ist, also die Sekundenzahl t zwischen Abschuß und dem Zerspringen des Geschosses. Demgemäß ist es von erheblichem Vorteil, erstens von der wirklichen Bewegung des Zieles nach Seite und Höhe abzusehen und statt dessen die Bewegung der Ziellinie zu berücksichtigen, und zweitens nicht die Entfernung des Zieles, sondern die Tempierung des Geschosses zugrunde zu legen, in der Weise, daß bezweckt wird, den Sprengpunkt in die Ziellinie zu bringen. Beträgt die Geschoßtempierung t Sekunden, so muß man am Visier in Richtung der scheinbaren Zielbewegung so viel vorhalten, als sich die Ziellinie in t Sekunden in dieser Richtung bewegt. Um diesen Betrag zu messen, werde ein Stab von 13 mm Dicke in Armlängenabstand (ca. 65 cm), so daß also seine scheinbare Dicke $1000 \cdot \frac{1{,}3}{65} = 20$ Teilstriche ist, senkrecht zur scheinbaren Bewegungsrichtung des Zieles vor das Auge gehalten, eventuell mit Auflegen. Mißt man die Zeit, die das Ziel hinter dem Stab passiert, mit einer Fünftel-Sekundenuhr oder durch schnelles Zählen, so gibt die gefundene Zahl n von Fünftel-Sekunden in 100 dividiert die Winkelgeschwindigkeit des Zieles in Teilstrichen pro Sekunde.

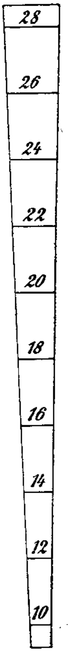

Abb. 60

Das t-fache dieser Geschwindigkeit ist das Vorhaltemaß in Teilstrichen, also $100 \cdot t/n$. Um den Übergang vom Messen zum Zielen möglichst unmittelbar zu machen, werde die Vorhalteskala am Visier, statt nach Teilstrichen, gleich nach Fünftel-Sekunden geeicht, und zwar für das größte vorkommende t, z. B. für $t = 24$. Die Stelle der Skala, die $2400/n$ Teilstrichen entspricht, sei also mit n bezeichnet. Handelt es sich nun um einen Schuß von 12 Sekunden, so muß man die scheinbare Geschwindigkeit des Zieles an einer halb so starken Stelle des Stockes messen usw. Der Stock ist also so zu eichen, daß 24 Sekunden dort steht, wo er 13 mm stark ist, 12 Sekunden dort, wo er 6,5 mm stark ist, usw. [vgl. Abb. 60]. Dieses Gerät wurde von mir im Frühjahr 1915 eingeführt.

Die Vorhalteskala UV werde nun im Nullpunkt O der Linie Visier—Korn und senkrecht zu dieser Linie in jeder Richtung auszieh- und feststellbar angebracht. An ihrem Ende V trage sie den Luftaufsatz, der durch ein Gewicht G immer senkrecht eingestellt sei (s. Abb. 61).

Nachdem die Entfernung ermittelt, Brennlänge t sec befohlen ist, spielt sich das Schießen so ab: Fünftel-Sekunden abzählen, die das Ziel braucht, um hinter dem Stab an der Stelle t zu passieren (n); Kommando „n“: Einstellen der Skala UV in Abb. 61 mit n auf O und in Richtung der scheinbaren Zielbewegung, Richten, Schuß.

Dieses Verfahren ist zwar schon bedeutend kürzer, als wenn Höhen- und Seitengeschwindigkeit für sich gemessen werden müssen, und jedenfalls für Behelfs-Luftabwehrgeschütze ausreichend. Aber jedem Verfahren, bei dem das Zielen erst nach vorausgegangenem Messen des Vorhaltemaßes erfolgen kann, haftet der Nachteil an, daß das Meßergebnis im Moment des Abschusses nicht mehr zutreffend zu sein braucht. Man muß deshalb darauf ausgehen, daß das Vorhalten selbsttätig erfolgt, also in jedem Moment richtig ist. Dabei ist zu bedenken, daß das Vorhalten in bezug auf Zünderstellung nur möglich ist, wenn man ein dauerndes Zünderstellen am geladenen Geschoß vornehmen will. Das ist vorläufig in hinreichend einfacher und sicherer Weise nicht möglich. Wir können aber auch darauf verzichten. Denn auch bei nicht ganz zutreffender Zünderstellung wird doch, wenn nur das Vorhalten richtig ist, der Sprengpunkt in die Ziellinie fallen, was aus Gründen der Beobachtung, der Abwehr und Treffaussicht die Hauptsache ist. Außerdem kann man aber auch den Fehler aus der Zünderstellung dadurch unwirksam machen, daß man in dem Moment feuert, in dem die Zünderstellung genau zutrifft. Zu dem Zwecke braucht man einen Tempierungsmesser mit selbsttätiger Bewegungsberichtigung.

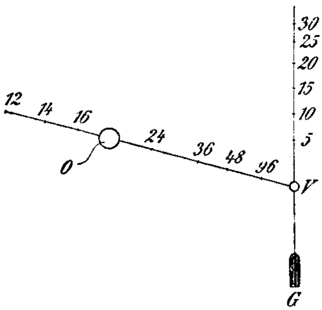

Abb. 61

§ 108. Tempierungsmesser mit selbsttätiger Bewegungsberichtigung

Denken wir uns den Höhen- und Tempierungsmesser (§ 105) mit den Niveaulinien waagerecht gehalten, so daß das Lot als Visierstab OP zum Ziel hin gerichtet ist (s. Abb. 62), während die kurze Seite OT jetzt senkrecht steht. Der Bildpunkt eines feststehenden Zieles auf dem Zielstab OP gibt durch seine Lage zu den Sprenglinien die erforderliche Zünderstellung an. Wenn das Ziel kommt (geht), gibt der Bildpunkt nur dann die richtige Zünderstellung an, wenn jede Sprenglinie entsprechend ihrer Zünderstellung und proportional der Geschwindigkeit des Kommens (Gehens) des Zieles diesen entgegen- (gleich-) gerichtet verschoben würde. Diese Verschiebung muß bei allen Sprenglinien gleichzeitig erfolgen. Zu dem Zweck seien die Sprenglinien aus Draht gebogen und an Schiebern befestigt, die in waagerechten Schlitzen der Tafel gleiten und vermittels Führungsstiften durch den um Q drehbaren Arm QR ihrer Sekundenzahl proportional gleichzeitig verschoben werden. Der Bildpunkt P überträgt die Geschwindigkeit des Kommens und Gehens mittels eines Fadens L, der über die Walze M durch einen Ring bei P zurückläuft und durch das Gewicht N gespannt wird, auf den Schwungkugelregulator K. Dieser hebt den Stab J durch die Achse von M hindurch, senkt den um S drehbaren Bügel FGH und drückt damit den Arm QR, an dem die Schieber der Sprenglinien befestigt sind, aus der senkrechten Lage heraus. Anfänglich,

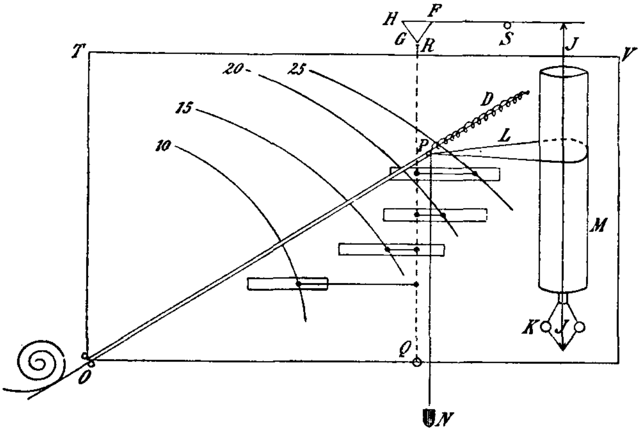

Abb. 62

oder wenn das Ziel „steht", d. h. seine Entfernung sich nicht ändert, liegt R in G. In dieser Anfangslage wird der Arm QR durch Feder oder Gewicht festgehalten. Aus der Anfangslage wird dem Arm QR am einfachsten durch Anstoß entgegen der Bewegungsrichtung des Zieles hinweggeholfen.

Das dauernde Einstellen des Bildpunktes P kann am besten durch den Entfernungsmesser selbst erfolgen. Dazu werde die Tafel mit dem Okularträger, der Stab OP mit dem Objektivträger des Entfernungsmessers so verbunden, daß die Tafel in die Zielebene, der Stab in die Ziellinie fällt, wenn der Entfernungsmesser das Ziel anrichtet. Auf dem Zielstab gleitet als Bildpunkt der Ring P. Dieser Ring ist an einer am Stabe entlang laufenden Schnur fest und mit dem Ende des Stabes durch eine Spiralfeder D verbunden. Die Schnur läuft über ein Schneckenrad bei O, auf das die Bewegung der Rolle übertragen wird, durch welche beim Entfernungsmesser die beiden Bilder zur Deckung gebracht werden. Möglichkeit und Ausführung der Konstruktion dieses Schneckenrades ergeben sich aus der auf einer Walze spiralig verlaufenden Skala des Entfernungsmessers, von der die Entfernungen abgelesen werden. Auf dieser Skala nehmen die Teilstrichintervalle bei wachsenden Entfernungen ab. Man übertrage diese spiralige Skala von dem Zylinder auf einen koaxialen Kegel derart, daß die Verkleinerung der Intervalle durch Vergrößerung des Radius gerade aufgehoben wird, daß also die spiralige Skala auf dem

Kegel Teilstrichintervalle gleichbleibender Größe aufweist. Mit Rücksicht auf den Maßstab der Tafel muß 1 km einem Zentimeter entsprechen. Dieses flache Schneckenrad verschiebt sich auf seiner Achse, so daß der Berührungspunkt des Fadens OP an der Schnecke stets in der Verlängerung der Tafelebene liegt.

In entsprechender Weise, wie wir hier die Bewegung des Bildpunktes auf dem Tempierungsmesser durch Vermittlung eines Schwungkugelregulators zur selbsttätigen Berichtigung der Lage der Sprenglinien für Kommen oder Gehen des Zieles verwandt haben, können wir die Seiten- und Höhenrichtbewegung des Rohres zur selbsttätigen Berichtigung des Seiten- bzw. Höhenvisiers benutzen. Dabei ist aber zu bemerken, daß z. B. das seitliche Vorhalten nicht nur von der scheinbaren seitlichen Geschwindigkeit des Zieles, sondern auch von der Tempierung des abzufeuernden Geschosses abhängt. Die Übertragung der Richtgeschwindigkeiten des Rohres auf die Visiere muß also auf die Tempierung einstellbar eingerichtet sein. Das kann z. B. so erfolgen: Ein Schwungkugelregulator stellt seiner Geschwindigkeit entsprechend einen Punkt in einer bestimmten Höhenlage ein. Die Höhe dieses Punktes kann durch einen Hebel die Höhe eines anderen Punktes bewirken. Durch Verschiebung des Unterstützungspunktes kann man diese Übertragung von dem einen auf den anderen Punkt verschieden einstellen. In welcher speziellen Weise die Rohrbewegungen auf Schwungmassen einwirken und wie die Einstellung auf die betreffende Tempierung erfolgen soll, davon sehen wir im folgenden ab, um das Wesentliche um so deutlicher hervortreten zu lassen.

§ 109. Geschütz mit selbstberichtigenden Richtgeräten

Der Entfernungsmesser EM steht derart links seitlich des Geschützrohres, daß seine Längsachse zunächst in die Verlängerung der Schildzapfenachse K des Rohres D fällt. Die Bewegungen des Rohres übertragen sich in der Weise auf den Entfernungsmesser, daß, wenn der Entfernungsmesser richtige Höhen- und Seitenrichtung hat, dies auch mit dem Rohre der Fall ist. Dabei muß die Bewegung des Rohres der des Entfernungsmessers immer um das bestimmte Vorhaltemaß nach Seite und Höhe voraus sein. In bezug auf die Seitendrehung nimmt deshalb die Achse E des Geschützes die senkrechte Achse F des Entfernungsmessers erst mit, wenn der Arm R (bzw. bei Linksdrehung der Arm R') gegen die Achse F stößt. Die beiden Arme werden aber durch den Schwungkugelregulator auseinandergetrieben, der durch die Seitendrehung des Geschützes betätigt wird.

Zur Einstellung des Vorhaltewinkels in der Höhenrichtung ist der Stab TU vorgesehen, der senkrecht zur Achse des Entfernungsmessers steht und mit dessen Objektivteil so verbunden ist, daß der Stab TU stets in die Visierrichtung fällt. Der Schieber T, durch den der Stab gleitet, wird an dem Bogen LN, der wie in Abb. 58 konstruiert ist, bei der betreffenden Zünderstellung (im Bilde bei 15 Sekunden) festgestellt. Das Stäbeparallelogramm $HLNM$ nimmt also, wenn es bewegt wird, die Visierrichtung TU mit; dabei ist die Seite HM fest, nur LN beweglich. Die Bewegung des Parallelogramms wird nun durch die Höhenrichtbewegung des Rohres wie folgt veranlaßt. An der Wiegenkappe des Rohres sind die beiden Stäbe P, Q fest (Abb. 63, 65), parallel zur Schildzapfenachse. Zwischen

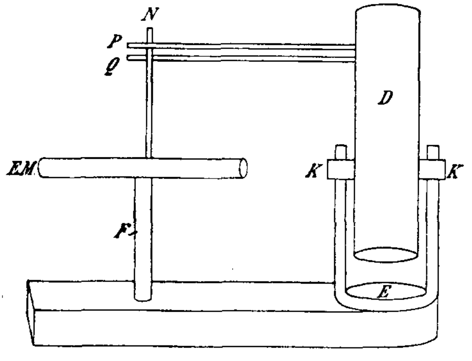

Abb. 63

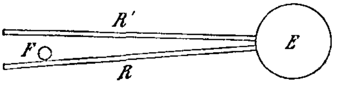

Abb. 64

ihnen gleitet der Stab HN. Die Stäbe P, Q werden durch einen Keil vermittels eines Schwungkugelregulators entsprechend der Drehgeschwindigkeit des Rohres auseinandergedrückt. Bei sich hebendem (senkendem)

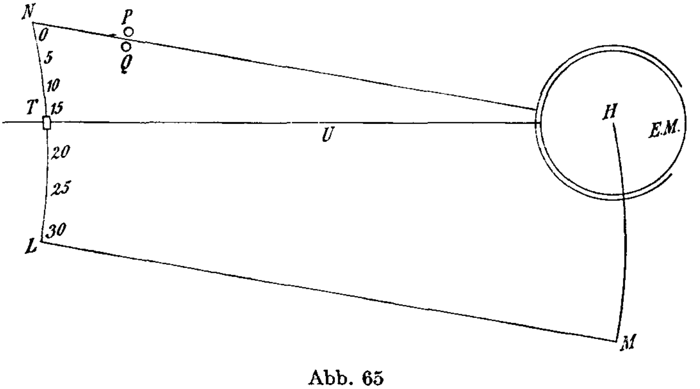

Abb. 65

Rohr, d. h. bei wachsender (abnehmender) scheinbarer Zielhöhe wird der Stab N an dem Stab Q (P) anliegen, d. h. die Erhöhung entsprechend größer (kleiner) sein, als bei gleichbleibender scheinbarer Höhe des Zieles.

Der sehr kleine Einfluß der geringen Seitenrichtungsunterschiede (von etwa 10° höchstens) zwischen dem Entfernungsmesser und dem Geschützrohr wird noch verringert, wenn man den Stab TU, mit ihm das Parallelogramm, um einen konstanten Winkel nach oben um die Entfernungsmesserachse, die Stäbe P, Q um denselben Winkel um die Schildzapfenachse dreht, derart, daß bei mittleren Visierhöhen der Stab HN nahezu senkrecht steht. Der Höhenrichtkanonier bedient zugleich den Entfernungsmesser; dadurch, daß er das Rohr so einstellt, daß er das Ziel im Entfernungsmesser sieht, gibt er dem Rohr die richtige Höhenrichtung.

Die Abgabe eines Schusses vollzieht sich also so: Es wird dauernd richtige Höhen- und Seitenrichtung genommen. Dann wird Zünderstellung abgelesen, entsprechend (d. h. mit angemessener Vorgabe) geladen, Höhen- und Seitenrichtung für die geladene Zünderstellung eingestellt, und abgefeuert, wenn der Bildpunkt genau die Sprenglinie passiert, die der geladenen Zünderstellung entspricht. Die Korrekturen wirken so, wie es der Bewegung des Zieles im Moment des Abschusses entspricht; nach dem Abschuß erfolgende Bewegungsänderungen zu berücksichtigen, liegt nicht in unserer Macht. Wir können nur die Lösung der Aufgabe erstreben: den Schuß dorthin zu bringen, wo das Ziel ist, falls es seine Bewegung vom Zeitpunkt des Abschusses an beibehält. Außerdem muß die Zeitspanne zwischen Abschuß und Geschoßzerspringen durch hohe Anfangsgeschwindigkeit v_0 möglichst kurz gemacht werden. Dichte Schußfolge und großer Wirkungsbereich eines Schusses müssen hinzukommen.

Die Vorgaben nach Seite und Höhe erfolgen so, als ob die scheinbare Zielbewegung konstant ist. Der daraus entspringende Fehler ist gering und kann in die übrigen mit eingerechnet werden. Seine Beseitigung ist nur durch so verwickelte Vorrichtungen möglich, daß der etwa gewonnene Vorteil durch die Unsicherheit vielgliedriger Mechanismen wieder aufgehoben wird. Die oben beschriebenen Vorrichtungen streben nach möglichster Einfachheit.

Anmerkung

In dem vorliegenden Buche ist vielfach, namentlich in den §§ 6, 17, 82, 99, davon Gebrauch gemacht, die Form eines physikalischen Gesetzes aus den Dimensionen der darin vorkommenden Größen zu erschließen. Ich habe dieses heuristische Prinzip zuerst im Mathematischen Verein der Universität Berlin am 17. Februar 1893 vorgetragen und an den Beispielen der Formeln für den Fall, für das mathematische Pendel, die schwingende Saite, das physikalische Pendel, den Magneten, die Fliehkraft, die Schallgeschwindigkeit in Gasen usw. erläutert und erhärtet. Damals erhob sich Widerspruch und Zweifel, so daß eine Veröffentlichung unterblieb. Heute ist die fragliche Schlußweise wohl allgemein anerkannt (vgl. z. B. Hopf in „Die Naturwissenschaften" 1912; Bridgman, Theorie der physikalischen Dimensionen, 1931, deutsch von Holl, Teubner 1932). In der ersten Auflage dieses Buches kommt sie in der Ballistik zum erstenmal zur Geltung. Es wird tunlichst aufgeräumt mit unhomogenen Formeln, wie „Gipfelhöhe der Schußbahn gleich $^5/_4$mal Quadrat der Schußdauer". Diese Formel müßte lauten: $z_* = \frac{1}{8}\, g\, t^{0 2}$. Erst jetzt erkennt man ihre Verläßlichkeit; sie ist nur für die Parabel genau richtig [vgl. § 14 (42), (43)]. Dimensionierte Konstante in einem physikalischen Gesetz sind ihrer Dimension entsprechend zu interpretieren, wie das Beispiel der im Luftwiderstandsgesetz vorkommenden Schallgeschwindigkeit erläutert. Das wird in entsprechender Weise nicht immer möglich sein. Aber immer läßt sich die Homogenität herstellen durch Einführung normierter Größen der Dimension Eins, wie dies z. B. in § 6 beim Bernoullischen Gesetz geschieht und wie es in § 88 bei den Sarrauschen Formeln geschehen müßte. Dadurch tritt das Wesen einer solchen Formel als Näherungsformel hervor, die nur in der Umgebung einer Stelle gilt, oder als erstes Glied einer Entwicklung aufzufassen ist. Sarraus Formel § 84 (55) für milde Pulver gibt die ersten zwei Glieder; aber die Wahl der Größe, nach der entwickelt wird, bleibt zweifelhaft. Auch bei roh empirischen Formeln ist die Forderung der Homogenität durchführbar (§ 99) oder bleibt anzustreben (§ 102).

Das Newtonsche Gravitationsgesetz setzt, wenn man der darin vorkommenden Gaußschen Konstanten die Dimension 1 beilegt, die drei Grunddimensionen M, L, T in die Beziehung $M = L^3 T^{-2}$, aus der das dritte Keplersche Gesetz folgt und die das astronomische Maß der Massen liefert, die nach dem reziproken Entfernungsquadrat anziehen (oder abstoßen). Dasselbe gilt für elektrisch oder magnetisch anziehende oder abstoßende Massen, die also als solche dieselbe Dimension $L^3 T^{-2}$ bekommen. Nur Inkonsequenz in bezug auf die Behandlung der Konstanten führte zu den bekannten irrationalen Dimensionen. Vielmehr muß man die Dimensionen der Elektrizitätsmenge, der Intensität, der elektromotorischen Kraft, des Widerstandes usw. bestimmen aus dem Coulombschen, Ampèreschen, Jouleschen, Ohmschen Gesetz usw., wie ich das in meinem oben erwähnten Vortrage (III. Vortragsbuch des Mathematischen Vereins, S. 270—273) getan habe.

Namen- und Sachverzeichnis